PROBLEMA 8

El símbolo de Levi-Civita es un objeto completamente antisimétrico cuyas componentes valen ±1 en cualquier sistema de referencia

En n-dimensiones tiene n índices

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares de } \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ -1 & \text{permutaciones impares de } \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Claramente la regla de transformación del ε no corresponde a un tensor

Qué objeto tiene una regla de transformación que cumple la propiedad que tiene el símbolo de Levi-Civita?

Regla de transformación de una densidad tensorial de "peso w" (ver Weinberg p 99)

"peso" de la densidad tensorial

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'} = \underbrace{\det(\underbrace{\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}}_{\text{cambio de sistema de referencia}})^{w}}_{\text{factor extra}} \underbrace{\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\beta'}\, T^{\alpha}{}_{\beta}}_{\text{transformación de un tensor}}$$

para cambios de coord

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}, \quad \Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}$$

cambio de sistema de referencia
Para transf de Lorentz:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} V^{\mu}, \quad \omega_{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\omega_{\mu}$$

Las densidades tensoriales no son cosas (tan) raras:

- Determinante de la métrica

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\, g_{\mu\nu}$$

$$\det M^{-1} = 1/\det M$$

$$\underbrace{\det(g_{\mu'\nu'})}_{\det g'} = \det(\Lambda^{\mu}{}_{\mu'})^2 \underbrace{\det g_{\mu\nu}}_{\det g} = (\det \Lambda^{\mu'}{}_{\mu})^{-2} \det(g_{\mu\nu})$$

$\det g$ densidad tensorial de peso w=-2

- $$t^{\mu\nu} = 2\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

(Es una nota de "color", quizá se vea al final de la materia)

$t^{\mu\nu}$: densidad tensorial

$T^{\mu\nu}$: tensor de energía-momentos

($T^{(\text{Maxwell})}_{\mu\nu}$ se puede obtener de $S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x \sqrt{|g|}\, F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$)

Ahora veamos que el símbolo de Levi-Civita se corresponde a una densidad tensorial de peso w=+1

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \mapsto \varepsilon_{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \left[\det\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\right)\right]^{w} \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \Lambda^{\rho}{}_{\rho'} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \qquad (1)$$

Evaluemos en $\lambda'=0'$, $\mu'=1'$, $\nu'=2'$, $\rho'=3'$

$$\varepsilon_{0'1'2'3'} = \det\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\right)^{w} \underbrace{\Lambda^{\lambda}{}_{0'} \Lambda^{\mu}{}_{1'} \Lambda^{\nu}{}_{2'} \Lambda^{\rho}{}_{3'} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}}_{=\det\left(\Lambda^{\beta}{}_{\beta'}\right)} = 1 \quad \text{si } w = 1$$

(ver Schutz Maths... sec 4.12, prob 4.12 pag 131)

Haciendo lo mismo para $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ se puede ver que es una densidad tensorial de peso w=-1

Recordemos que

$$\det g' = \det\left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\right)^{2} \det g \qquad (2)$$

Es posible definir un objeto que transforme como un tensor a partir del símbolo de Levi-Civita

$$\boxed{\Omega_{\lambda\mu\nu\rho} \equiv \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}}$$

Más adelante identificaremos a $\Omega_{\lambda\mu\nu\rho}$ con la **forma de volumen métrico** (guía 3)

Combinando las reglas de transformación (1) y (2) obtenemos cómo transforma Ω

$$\Omega_{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \sqrt{|g'|}\,\varepsilon_{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \det\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'}\right)\sqrt{|g|}\,\det\left(\Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'}\right)^{-1} \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \Lambda^{\rho}{}_{\rho'} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$$

$$\Omega_{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \Lambda^{\rho}{}_{\rho'} \underbrace{\left(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\right)}_{=\Omega_{\lambda\mu\nu\rho}}$$

$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \rightsquigarrow w = +1$

$\sqrt{|g|} \rightsquigarrow w = -1$

$\Rightarrow \Omega_{\lambda\mu\nu\rho}$ transforma como un tensor

También se puede definir $\Omega^{\lambda\mu\nu\rho} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$

Comentarios:

- $$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\gamma}\eta^{\rho\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon^{0123} = \eta^{00}\eta^{11}\eta^{22}\eta^{33}\varepsilon_{0123} = \boxed{-\varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123}}$$

En general "$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \underbrace{\mathrm{sgn}(s)}\, \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$"

signatura de la métrica

OJO: NO es una ecuación tensorial, simplemente indica que puede haber una diferencia de signos en los valores numéricos de las componentes de ε con los índices arriba y con los índices abajo

- Hay autores que definen el símbolo con los índices arriba con el mismo signo que el símbolo con los índices abajo (Schutz Geom methds ec. 4.28 pág 128)

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$$

- Hay autores que comienzan definiendo el símbolo con los índices arriba (Weinberg Cosm & Grav ec 4.4.7 pág 99)

$$\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares de } \{0, 1, 2, ..., n\} \\ -1 & \text{permutaciones impares de } \{0, 1, 2, ..., n\} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

por si chequean otros libros

Problema 6

$n=2$ $\quad \vec{A}, \vec{B}$ l i $\quad \mathrm{vol}_2 = |\vec{A}\times\vec{B}|$

$n=3$ $\quad \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ l i $\quad \mathrm{vol}_3 = |\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})|$

(hacer la cuenta explícita)

n, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots \vec{Z}$ n vectores l i $\rightsquigarrow$ Ver libro de Ferraro Sec. 7.5 pag 250

Problema 12

- coords $x^\mu = \{ct, x, y, z\}$

$$ds^2_{Mink} = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$= -c^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

$$|\phi|/c^2 \ll 1, \quad \partial_t \phi = 0 \Rightarrow \phi = \phi(\vec{x})$$

- Unidades

$[\phi] = \frac{m^2}{s^2}$, ϕ se identifica con el potencial newtoniano

$$\phi = -\frac{GM}{r} \Rightarrow V = -\frac{GMm}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Se pide:

a) Variar la acción de la partícula libre y obtener la ec. de la geodésicas en la aprox

$$\frac{|\phi|}{c^2} \ll 1 \qquad \partial_t \phi = 0$$

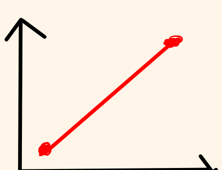
b) Aproximar el resultado anterior para el caso de partículas con movimiento no relativista

$$\frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \ll 1$$

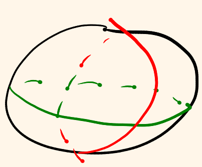
- Qué es una geodésica?

Son las curvas que extremizan el intervalo entre dos puntos. Puede haber geodésicas tipo tiempo (las que siguen las partículas masivas), tipo nulo (las que siguen los rayos de luz) y tipo espacio (no hay relación causal entre los puntos)

En espacio euclídeo plano las geodésicas son rectas.



En la superficie de una esfera son los círculos máximos (meridianos).



a)

partícula masiva

Acción de la partícula libre

$$S_p = -mc \int \underbrace{\sqrt{-g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}}_{d\tau}$$

tipo tiempo

(una vez elegida la parametrización)

Notemos que ahora la métrica no es plana (Minkowski)

$$g_{00} = -(1+2\phi)$$
$$g_{ij} = (1-2\phi)\,\delta_{ij}$$

(elijo unidades c=1)

$\phi \to \frac{|\phi|}{c^2} \ll 1 \quad |\phi| \ll 1$

$\to \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \ll 1 \quad |\vec{u}|^2 \ll 1$

$$S_p = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\, d\tau$$

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (U^0, U^i)$$

$$= -m \int \sqrt{(1+2\phi)[U^0(\tau)]^2 - (1-2\phi)\underbrace{\delta_{ij}\, U^i(\tau)\, U^j(\tau)}_{= \vec{U}\cdot\vec{U}}}\, d\tau$$

$$S_p = -m \int L\left(\tau, x^i, \frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau}\right) d\tau$$

Es como una acción de mecánica clásica para las funciones $x^\mu(\tau)$ y sus derivadas primeras

Voy a usar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)}\right) = 0 \qquad \alpha = \{0, 1, 2, 3\}$$

Vamos a tener cuatro ecuaciones de movimiento, una para cada valor de α

Conviene separar en los casos α=0 y α=i

Recordemos el lagrangiano

$$L = \sqrt{\left(1+2\phi(x)\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1-2\phi\right)\frac{d\vec{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\vec{x}}{d\tau}}$$

- $\alpha = 0$

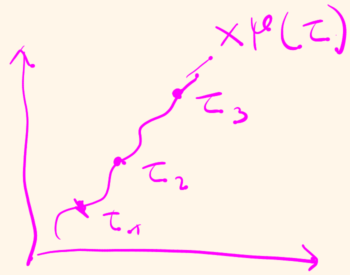
$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = 0 \quad , \quad \partial_0 \phi = \partial_t \phi = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)} = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dt}{d\tau}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\underbrace{\sqrt{-\frac{ds^2}{d\tau^2}}}_{=1}}\,2\left(1+2\phi\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$= \left(1+2\phi\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \text{E-L}: \quad \boxed{\frac{d}{d\tau}\left[\left(1+2\phi\right)\frac{dt}{d\tau}\right] = 0} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e \equiv \left(1+2\phi\right)\frac{dt}{d\tau} = \text{const}} \qquad (2)$$



e es constante a lo largo de toda la geodésica

Derivando (1)

$$\left(1+2\phi\right)\underbrace{\frac{d^2t}{d\tau^2}}_{\equiv \ddot{t}} + 2\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\equiv \dot{t}}\underbrace{\frac{d\phi}{d\tau}} = 0$$

$$= \frac{dx^\mu}{d\tau}\partial_\mu \phi = \frac{dx^k}{d\tau}\partial_k \phi \qquad \partial_t \phi = 0 \qquad \frac{dx^k}{d\tau} \equiv \dot{x}^k$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+2\phi\right)\ddot{t} + 2\dot{t}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\phi\right) = 0$$

$$\boxed{\dot{(\ )} = \frac{d}{d\tau}}$$

Aproximando $\phi \ll 1$

$$\boxed{\ddot{t} = -2\,\dot{t}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\phi\right) = 0} \quad (3)$$

- $\alpha = i$

$$L = \sqrt{\left(1+2\phi(x)\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1-2\phi\right)\frac{d\vec{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\vec{x}}{d\tau}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-\frac{ds^2}{d\tau^2}}}}_{=1}\left\{+2\,\partial_i\phi\;\dot{t}^2 + 2\,\partial_i\phi\;\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right\}$$

$$= \left(\partial_i\phi\right)\left(\dot{t}^2 + \dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{}}\left(-2\left(1-2\phi\right)\frac{dx_i}{d\tau}\right) = -\left(1-2\phi\right)\dot{x}_i$$

Obs/ $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\vec{x}\cdot\vec{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\delta_{k\ell}x^k x^\ell\right) = \delta_{k\ell}\left(x^k\underbrace{\frac{\partial x^\ell}{\partial x^i}}_{\delta^\ell_i} + \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x^i}}_{\delta^k_i}x^\ell\right)$

$$= \delta_{k\ell}\left(x^k\delta^\ell_i + \delta^k_i x^\ell\right) = 2x_i$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\right) = -\left(1-2\phi\right)\ddot{x}_i + 2\dot{x}_i\left(\dot{x}^k\partial_k\phi\right)$$

$$\Rightarrow \text{E-L} \quad \partial_i\phi\left[\dot{t}^2 + \dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}\right] + \left(1-2\phi\right)\ddot{x}_i - 2\left(\dot{x}^k\partial_k\phi\right)\dot{x}_i = 0$$

Obs/ $x^i = \delta^{ij}x_j = x_i$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi\left(\dot{t}^2 + |\dot{\vec{x}}|^2\right) + \underbrace{\left(1-2\phi\right)}_{\simeq 1}\ddot{\vec{x}} - 2\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)\dot{\vec{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{x}} = -\left(\dot{t}^2 + |\dot{\vec{x}}|^2\right)\vec{\nabla}\phi + 2\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)\dot{\vec{x}}} \quad (4)$$

b) Aproximar para velocidades no relativistas $|\vec{u}|^2 \ll 1$ y $|\phi| \ll 1$

Qué esperan obtener?

Obs: tenemos que quedarnos a "orden 1" tanto en ϕ como en $|\vec{u}|^2$

vamos a tirar términos de la pinta ϕ^2, $|\vec{u}|^3$, $\phi|\vec{u}|$, etc

Ec (2)

$$H = (1+2\phi)\,\dot{t} = \text{const}$$

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = ?$$

$$d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu \Rightarrow d\tau = \pm\sqrt{-g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu}$$

Elijo $d\tau \doteq \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\,dt$ (τ y t aumentan al mismo tiempo)

$u^i = \frac{dx^i}{dt}$

$$\Rightarrow d\tau = \sqrt{(1+2\phi)-(1-2\phi)\,u^2}\;dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1+2\phi-\underbrace{(1-2\phi)\,u^2}_{\simeq\, u^2 \text{ a orden } 1}} \simeq \sqrt{1+2\phi-u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dt} \simeq 1+\frac{1}{2}(2\phi-u^2) = \boxed{1+\phi-\frac{u^2}{2} \simeq \frac{d\tau}{dt}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{d\tau} \simeq 1+\frac{1}{2}u^2-\phi}$$

$$\Rightarrow e = (1+2\phi)\frac{dt}{d\tau} \simeq (1+2\phi)\left(1+\frac{1}{2}u^2-\phi\right)$$

$$e \simeq 1+\frac{1}{2}u^2+2\phi-\phi = \boxed{1+\frac{1}{2}u^2+\phi = \text{const}}$$

$\frac{E_{cl}}{m}$!

!

Ec (3)

$$\ddot{t} = -2\,\dot{t}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)$$

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt} \simeq \left(1-\phi+\frac{1}{2}u^2\right)u^i \simeq u^i$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\dot{\vec{x}}}_{\text{"}O(x/2)\text{"}}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{O(1)} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{t}\simeq 0$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}\simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t(\tau) = a\tau + b} \quad !$$

Aplicar los mismos razonamientos para la ec (4) para obtener

$$\boxed{\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi}$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\left(\dot{t}^2 + |\dot{\vec{x}}|^2\right)\vec{\nabla}\phi + 2\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)\dot{\vec{x}}$$