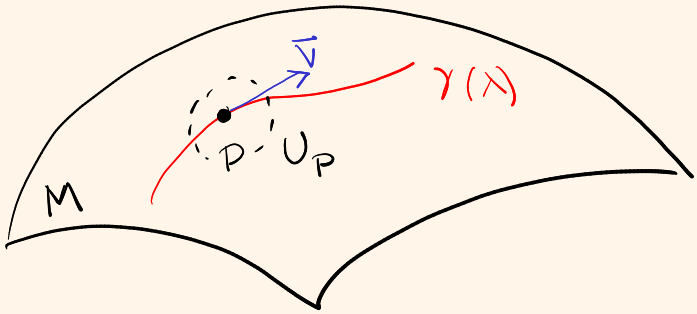
Guía 3: Vectores y 1-formas. Bases.

Vectores

Repaso: un vector $\bar{V}$ tangente a una curva γ en un punto P pertenciente a una variedad M es un operador diferencial que toma funciones y devuelve números.



$$P \in U_P \subseteq M$$

$$\gamma(\lambda) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$$

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

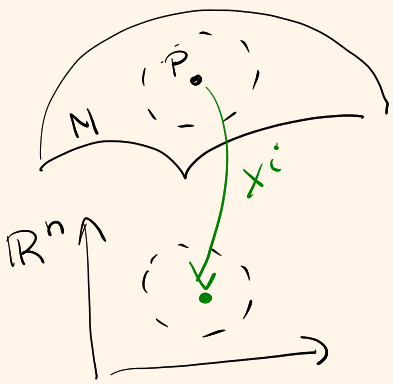
$$\bar{V} : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \bar{V}(f)$$

Podemos escribir

$$\bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \Rightarrow \bar{V}(f) = \frac{df}{d\lambda}$$

Si la variedad está dotada de coordenadas $\{x^i\}$



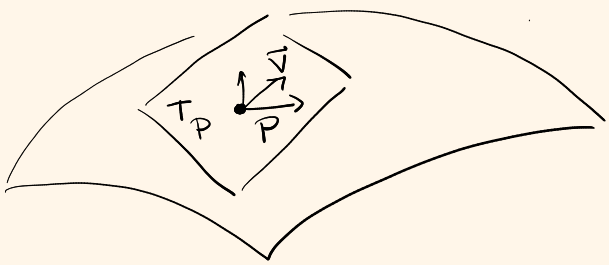
$$\bar{V}(f) = \frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \forall f$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V} = \underbrace{\frac{dx^i}{d\lambda}}_{\text{componentes}} \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\text{base}}$$

componentes = componentes del vector tangente a la curva γ

Un vector actuando sobre una función es una derivada direccional

- El conjunto de todos lo vectores tangentes a una curva γ en un punto $P \in M$ forman un espacio vectorial denominado espacio tangente que se denota T_P



Los elementos de T_P son justamente los vectores tangentes

$$\left\{\bar{U} = \frac{d}{d\lambda}, \bar{V} = \frac{d}{d\mu}, \dots\right\}$$

Se puede prober que T_P es un espacio vectorial

El chiste es poder armar combinaciones lineales.

$$a, b \in \mathbb{R}, \qquad a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\sigma}$$

$$\bar{U}, \bar{V} \in T_P \qquad a\bar{U} + b\bar{V} = \bar{W} \in T_P$$

- Dado un sistema de coordenadas $\{x^i\}$ el conjunto de las derivadas parciales $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ forman una base de T_P para los vectores tangentes en $P \in M$

  dim(Base) = dim(T_P) = dim(M) = n

- Cambio de coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

- Las bases coordenadas tienen la particularidad de que sus elementos conmutan. Se dice que la base es holónoma

  Conmutador de vectores

$$[\bar{U}, \bar{V}](f) = \bar{U}(\bar{V}(f)) - \bar{V}(\bar{U}(f))$$

  Para los elementos de la base coordenada se tiene que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right](f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\right) f = 0 \quad \forall f$$

$$\Rightarrow \boxed{[\partial_i, \partial_j] = 0}$$

- Bases no coordenadas: en realidad cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes sirve como base. Aquellas bases cuyos elementos no conmutan se denominan anholónomas. (ver Schutz Geom & Math Sec 2.14 pag 43)

- Expansión de un vector en una base

$$\boxed{\bar{V} = V^i \partial_i \quad \text{base coordenada}} \qquad [\partial_i, \partial_j] = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{V} &= V^a \bar{e}_a \quad \text{base anholónoma} \\ &= V^a \bar{E}_a \end{aligned}} \qquad [\bar{e}_a, \bar{e}_b] \neq 0$$

- Cambio de base $B = \{\bar{e}_a\}, B' = \{\bar{e}_{a'}\}$

$$\bar{v} = v^a \bar{e}_a = v^{a'} \bar{e}_{a'}$$

$$\boxed{\bar{e}_{a'} = \Lambda^a{}_{a'} \bar{e}_a}, \quad \boxed{\bar{e}_a = \Lambda^{a'}{}_a \bar{e}_{a'}}, \quad \Lambda^a{}_{a'} \Lambda^{a'}{}_b = \delta^a_b$$

$$\Lambda^{a'}{}_a \Lambda^a{}_{b'} = \delta^{a'}{}_{b'}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = v^{a'} \bar{e}_{a'} = v^{a'} \Lambda^a{}_{a'} \bar{e}_a = v^a \bar{e}_a$$

$$\boxed{v^a = v^a{}_{a'} v^{a'}}, \quad \boxed{v^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a v^a}$$

Si el cambio de base es un cambio de coordenadas se tiene que $\Lambda^a{}_{a'} = \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$

1-formas (co-vectores)

Una 1-forma en un punto $P \in M$ se define como una funcional lineal que "actúa" sobre vectores y los "manda a números reales

$$\tilde{\alpha} : T_p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{v} \longmapsto \tilde{\alpha}(\bar{v}) \in \mathbb{R}$$

Estamos siguiendo la notación del Schutz donde $\bar{(\cdot)}$ indica vector

$\tilde{(\cdot)}$ indica forma

El conjunto de todas las 1-formas en $P \in M$ forman un espacio vectorial denominado espacio co-tangente y de denota T^*_P

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T^*_p \Rightarrow a\tilde{\alpha} + b\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} \in T^*_p$$

- Prototipo de 1-forma: el gradiente

Dada $f : M \to \mathbb{R}$ definimos el gradiente $\tilde{d}f$

$$\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) \equiv \frac{df}{d\lambda}$$

En el caso de que contemos con una base coordenada

$$\tilde{d}f = \frac{df}{d\lambda} = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}}^{\text{gradiente}} \cdot \underbrace{\frac{dx^i}{d\lambda}}_{\text{vector tangente}}$$

- Base dual $\{\tilde{\omega}^i\}$

$$\tilde{\alpha} = \underbrace{\alpha_i}_{\text{componentes de la 1-forma}} \overbrace{\tilde{\omega}^i}^{\text{base de 1-formas}}$$

Se define la base dual como aquella base de 1-formas que al actuar sobre la base de vectores cumple

$$\boxed{\tilde{\omega}^i(\bar{e}_j) = \delta^i_j}$$

En particular, la base dual a la base coordenada $\{\partial_i\}$ es la base de gradientes $\{\tilde{d}x^i\}$

$$\boxed{\tilde{d}x^i(\partial_j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j}$$

- Operaciones con 1-formas: componentes de $\bar{V}$, componentes de $\tilde{\alpha}$ y contracción

▷ Dada $\tilde{\alpha} = \alpha_i \tilde{\omega}^i$ cómo actúa sobre los elementos de la base de vectores $\{\bar{e}_i\}$?

$$\tilde{\alpha}(\bar{e}_j) = (\alpha_i \tilde{\omega}^i)(\bar{e}_j) = \alpha_i \tilde{\omega}^i(\bar{e}_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}(\bar{e}_j) = \alpha_j}$$

▷ Y si $\tilde{\omega}^i$ actúa sobre un vector $\bar{V} = V^j \bar{e}_j$?

$$\tilde{\omega}^i(\bar{V}) = \tilde{\omega}^i(V^j \bar{e}_j) = V^j \tilde{\omega}^i(\bar{e}_j) = V^j \delta^i_j = V^i$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\omega}^i(\bar{V}) = V^i}$$

▷ Y si $\tilde{\alpha}$ actúa sobre un vector $\bar{V}$?

$$\tilde{\alpha}(\bar{V}) = \alpha_i \tilde{\omega}^i(V^j \bar{e}_j) = \alpha_i V^j \tilde{\omega}^i(\bar{e}_j)$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}(\bar{V}) = \alpha_i V^j \delta^i_j = \alpha_i V^i$$

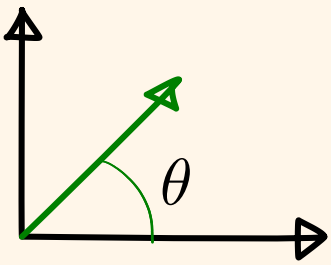
$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}(\bar{V}) = \langle \tilde{\alpha}, \bar{V} \rangle = \alpha_i V^i}$$

Contracción entre 1-forma y vector (producto interno)
Notar que no introdujimos ningun métrica!

Problema 1

$x^i = \{x, y\}$ coords s/ variedad diferencial 2D

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_r &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \bar{e}_\theta &= -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$ base anholónoma?



(definidos en un abierto que no contenga el origen)

θ no está bien definido en el origen

Base holónoma (coordenada) si el conmutador de sus elementos es cero.

Ej: base cartesiana $\{\partial_x, \partial_y\} \Rightarrow [\partial_x, \partial_y] = \partial_x(\partial_y) - \partial_y(\partial_x) = 0$

Si $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta\}$ es una base anholónoma, entonces $[\bar{e}_r, \bar{e}_\theta] \neq 0$

Cómo se hace la cuenta? Hay que desarrollar el corchete

$$[\bar{e}_r, \bar{e}_\theta] = \bar{e}_r(\bar{e}_\theta) - \bar{e}_\theta(\bar{e}_r)$$

$$\bar{e}_r(\bar{e}_\theta) = (\cos\theta\, \partial_x + \sin\theta\, \partial_y)\, \bar{e}_\theta = \cos\theta\left(\partial_x(\bar{e}_\theta)\right) + \sin\theta\left(\partial_y(\bar{e}_\theta)\right)$$

$$\partial_x(\bar{e}_\theta) = \partial_x(-\sin\theta\, \partial_x + \cos\theta\, \partial_y)$$

$$= -\sin\theta\, \partial_x^2 - (\partial_x \sin\theta)\, \partial_x + \cos\theta\, \partial_x \partial_y + (\partial_x \cos\theta)\, \partial_y$$

hay que usar que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad [\partial_x, \partial_y] = 0$$

les dejo a uds completar la cuenta (es sencilla pero un poco tediosa)

Es más interesante ver el cambio de base/coordenadas

Cambio de base

cambio de coordenadas

$$\bar{e}_{i'} = \Lambda^i{}_{i'}\, \bar{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \bar{e}_i$$

Ya sabemos cuál es el cambio de coordenadas entre cartesianas y polares (Guía 2 Problema 1)

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

y las matrices de cambio de coordenada

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Recordemos un vector es un objeto geómetrico que tiene entidad propia, no depende de qué base usemos para desarrollarlo.

$$\vec{v} = v^i \partial_i = v^{i'} \partial_{i'} \quad ,$$

Cuáles son las componentes de $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta\}$ en la base $\{\partial_r, \partial_\theta\}$?

componente

indica la componente

$$\bar{e}_r = (\bar{e}_r)^i \partial_i = \cos\theta\, \partial_x + \sin\theta\, \partial_y \Rightarrow (\vec{e}_r)^x = \cos\theta$$

base

etiqueta de la base

$$(\vec{e}_r)^y = \sin\theta$$

$$\bar{e}_\theta = (\bar{e}_\theta)^i \partial_i = -\sin\theta\, \partial_x + \cos\theta\, \partial_y \Rightarrow (\vec{e}_\theta)^x = -\sin\theta$$

$$(\vec{e}_\theta)^y = \cos\theta$$

$$\Rightarrow (\bar{e}_r)^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} (\bar{e}_r)^i$$

$$\boxed{i' = r} \quad (\bar{e}_r)^r = \frac{\partial x^r}{\partial x^x} (\bar{e}_r)^x + \frac{\partial x^\theta}{\partial x^y} (\bar{e}_r)^y$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x} (\bar{e}_r)^x + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) (\bar{e}_r)^y$$

$$= \cos\theta \cos\theta + \sin\theta \sin\theta = 1$$

$$\boxed{i' = \theta} \quad (\vec{e}_r)^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} (e_r)^x + \frac{\partial \theta}{\partial y} (e_r)^y = -\frac{\sin\theta}{r} \cos\theta + \frac{\cos\theta}{r} \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}_r = \partial_r}$$

Veamos otra manera para $\vec{e}_\theta$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} = -\sin\theta\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= -\sin\theta\left(\cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right) + \cos\theta\left(\sin\theta\,\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta\right)$$

$$= \left(-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\right)\partial_r + \left(\frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\right)\partial_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta}$$

Ahora podemos calcular más fácilmente el conmutador $[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta]$

$$[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta] = \vec{e}_r(\vec{e}_\theta) - \vec{e}_\theta(\vec{e}_r) = \partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right) - \frac{1}{r}\partial_\theta(\partial_r)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r = -\frac{1}{r^2}\partial_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta] = -\frac{1}{r}\vec{e}_\theta \neq 0}$$

$[\bar{e}_r, \bar{e}_\theta]$ es una base anholónoma (no es una base coordenada)

Adicional: si el espacio está dotado de una métrica entonces podemos hablar de base de versores.
El espacio plano tiene una métrica natural

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 \Rightarrow g_{ij} = \delta_{ij}$$

$$ds^2 = g_{i'j'}\,dx^{i'}dx^{j'} = dr^2 + r^2 d\theta^2 \Rightarrow g_{i'j'} = \mathrm{diag}(1, r^2)$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = g(\vec{v}, \vec{w}) = g_{ij}v^i v^j$$

$$\langle \partial_x, \partial_x\rangle = g(\partial_x, \partial_y) = g_{xx} = 1$$

$$\langle \partial_\theta, \partial_\theta\rangle = g(\partial_\theta, \partial_\theta) = g_{\theta\theta} = r^2 \neq 1 \qquad \langle \bar{e}_\theta, \bar{e}_\theta\rangle = \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} = 1$$

1-formas y base dual

Sea α una 1-forma $\tilde{\alpha} = \alpha_i \tilde{\omega}^i$

Los elementos de la base dual cumplen

$$\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$$

Base dual a la base coordenada ∂_i

$$\tilde{d}x^i(\partial_j) = \delta^i_j$$

Cómo obtener las componentes de una 1-forma? Actuando sobre los elementos de la base de vectores.

$$\boxed{\tilde{\alpha}(\vec{e}_j) = \alpha_j}$$

Sabemos que $\{\tilde{d}r, \tilde{d}\theta\}$ es la base dual de la base coordenada $\{\partial_r, \partial_\theta\}$

Cómo se expresa la base en términos de $\{\tilde{d}r, \tilde{d}\theta\}$?

Sabemos que

$$\tilde{\omega}^r(\vec{e}_r) = 1 \quad , \quad \tilde{\omega}^r(\vec{e}_\theta) = 0$$
$$\tilde{\omega}^\theta(\vec{e}_r) = 0 \quad , \quad \tilde{\omega}^\theta(\vec{e}_\theta) = 0$$

y también que

$$\vec{e}_r = \partial_r \quad , \quad \vec{e}_\theta = 1/r\, \partial_\theta$$

Entonces

$$0 = \tilde{\omega}^r(\vec{e}_\theta) = \tilde{\omega}^r(1/r\, \partial_\theta) = 1/r\, \tilde{\omega}^r(\partial_\theta) = 1/r\, (\tilde{\omega}^r)_\theta$$
$$\Rightarrow (\tilde{\omega}^r)_\theta = 0$$

Hallar el resto de la componentes y comprobar que

$$\tilde{\omega}^r = \tilde{d}r \qquad \tilde{\omega}^\theta = r\tilde{d}\theta$$