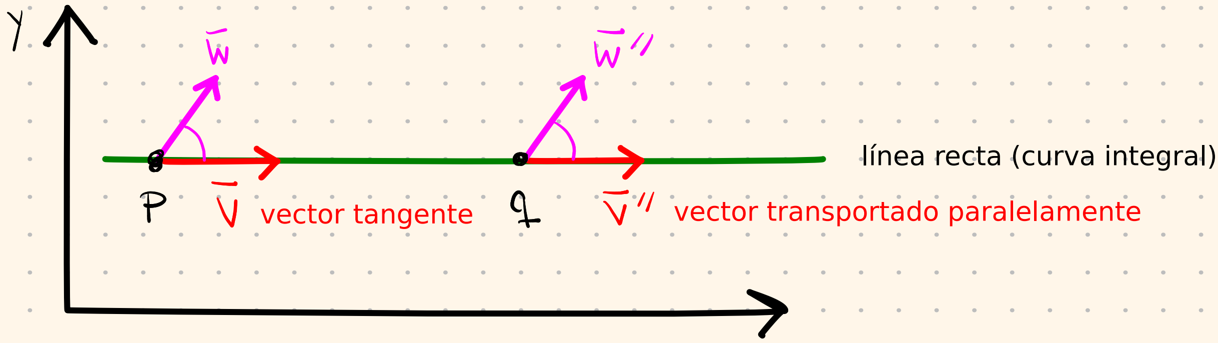
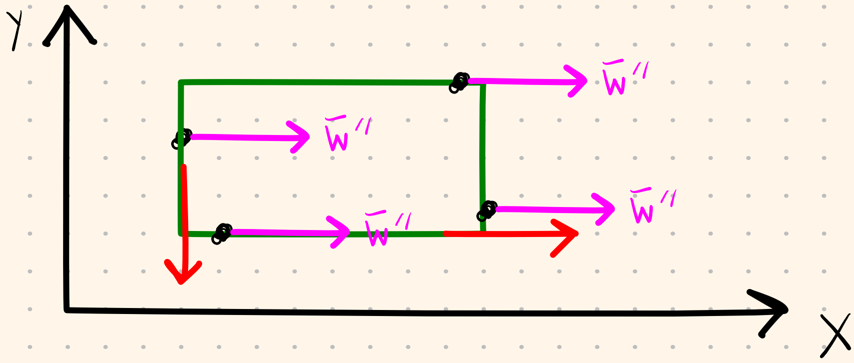
Guía 4: Derivada Covariante y Transporte Paralelo

Motivación: transporte paralelo y curvatura en espacio euclídeo 2D

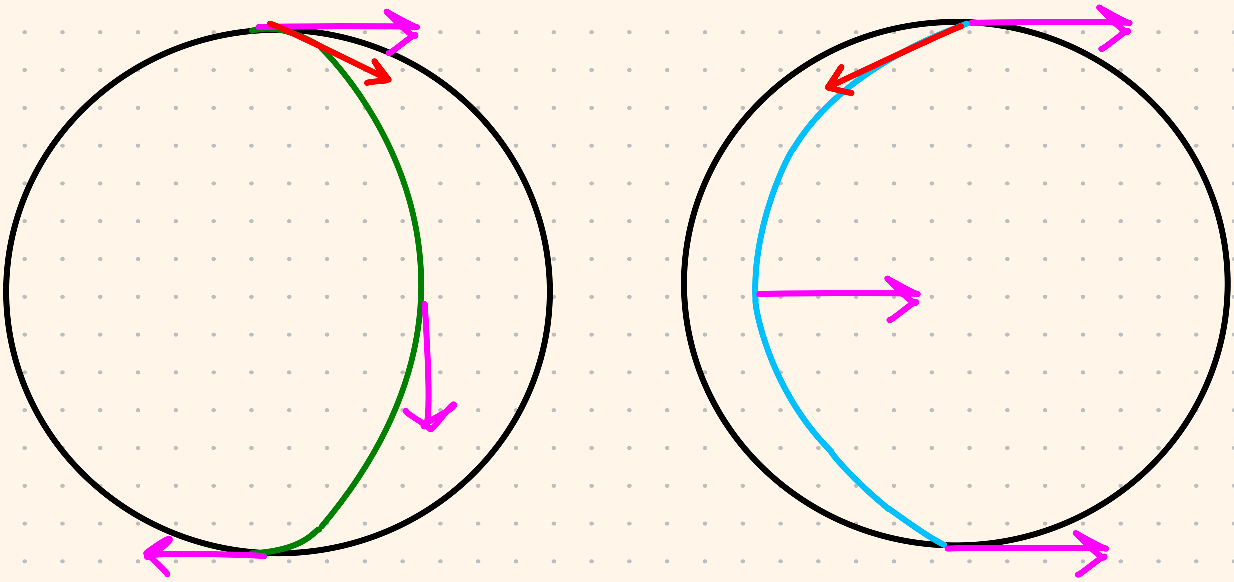
La noción de transportar paralelamente un vector en espacio plano euclídeo es tan natural que no solemos detenernos a pensar en sus "detalles".





En espacio plano hay una noción global de paralelismo.

En espacio curvo no hay una noción global de paralelismo.



Quisiéramos tener un operador derivada que actúe como derivada direccional, que nos de por resultado un tensor y que sólo necesite información sobre la curva a través de la cuál se transporta paralelamente.
Poder derivar y hacer transporte paralelo nos permite comparar vectores (y tensores) de distintos puntos de la variedad (pertenecen a espacios tangentes diferentes).
Esto lo va a cumplir la DERIVADA COVARIANTE.

(Brevísimo) Repaso de distintas derivadas

Hasta ahora vimos dos derivadas que pueden ser construidas únicamente utilizando la estructura de variedad diferencial: la derivada exterior $\tilde{d}$ y la derivada de Lie $\pounds_V$.

Derivada exterior

La derivada exterior es un operador diferencial que actúa sobre p-formas y devuelve (p+1)-formas.

$\tilde{A} \in \Omega^p(M)$ espacio vectorial de p-formas

$\tilde{d}\tilde{A} \in \Omega^{p+1}(M)$ espacio vectorial de (p+1)-formas

En coordenadas:

$$\tilde{A} = \frac{1}{p!} A_{\underbrace{\mu\dots\nu}_{p}} \tilde{d}x^\mu \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^\nu$$

$$\tilde{d}\tilde{A} = \frac{1}{p!} \partial_\lambda A_{\mu\dots\nu} \tilde{d}x^\lambda \wedge \tilde{d}x^\mu \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^\nu$$

Limitación: actúa solamente sobre formas diferenciales.

Derivada de Lie

La derivada de Lie toma un vector (que define una familia uniparámetrica de difeomorfismos) y devuelve otro vector. Nos permite "comparar" dos vectores definidos en distintos puntos de una variedad ("dragueo" de Lie).
La derivada de Lie se puede extender a tensores de rango arbitrario (ésto no era posible con la derivada exterior).

Algunos ejemplos:

- $\bar{U} \in T_pM$, $f \in C^\infty(M)$

$$\pounds_{\bar{U}} f = \bar{U}(f) \underset{\text{coords}}{=} U^\mu \partial_\mu f$$

(coincide con la noción de derivada direccional de cálculo diferencial)

- $\bar{U}, \bar{V} \in T_pM$

$$\pounds_{\bar{U}} \bar{V} = - \pounds_{\bar{V}} \bar{U} = [\bar{U}, \bar{V}]$$

En coordenadas

$$[\pounds_{\bar{U}} \bar{V}]^\mu = U^\lambda \partial_\lambda V^\mu - V^\lambda \partial_\lambda U^\mu$$

- $\bar{U} \in T_pM, \tilde{\omega} \in T_p^*M$

$$\pounds_{\bar{U}} \tilde{\omega} = \tilde{d}(\tilde{\omega}(\bar{U})) + \tilde{d}\tilde{\omega}(\bar{U})$$

En coordenadas

$$[\pounds_{\bar{U}} \tilde{\omega}]_\mu = U^\lambda \partial_\lambda \omega_\mu + \omega_\lambda \partial_\mu U^\lambda$$

Algunas limitaciones: no depende únicamente de la dirección en la que queremos derivar. Aparecen derivadas del vector respecto del cual tomamos la derivada.

Derivada covariante

Para poder introducir la derivada covariante va a ser necesario introducir una estructura extra a la variedad. Este objeto nuevo se llama conexión.

Dado un campo vectorial $\vec{U}$ en $p \in M$ vamos a definir un operador diferencial $\nabla_{\vec{U}}$ que mapea un campo vectorial $\vec{V}$ a otro campo vectorial $\nabla_{\bar{U}} \vec{V}$ y cumple la siguientes propiedades:

1) $\nabla_{\bar{U}} \vec{V}$ es un tensor en su argumento $\bar{U}$, es decir, dadas funciones arbitrarias f, h y campos vectoriales $\bar{U}, \bar{W}$ se tiene que

$$\nabla_{f\bar{U} + h\bar{W}} \bar{V} = f \nabla_{\bar{U}} \bar{V} + h \nabla_{\bar{W}} \bar{V}$$

en particular, si $\bar{U} = U^a \bar{E}_a$, $\{\bar{E}_a\}$ base de vectores

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = \nabla_{U^a \bar{E}_a} \bar{V} = U^a \nabla_{\bar{E}_a} \bar{V} \underset{\text{notación}}{\equiv} U^a \nabla_a \bar{V}$$

($\nabla_{\bar{U}}$ sólo depende de la dirección de $\bar{U}$ en p)

2) $\nabla_{\bar{U}} \bar{V}$ también es lineal en $\bar{V}$ para $a, b \in \mathbb{R}$

$$\nabla_{\bar{U}} (a\bar{V} + b\bar{W}) = a \nabla_{\bar{U}} \bar{V} + b \nabla_{\bar{U}} \bar{W}$$

3) Dadas $f \in C^\infty(M)$, $\bar{W}$ campo vectorial $\nabla_{\bar{U}}$ cumple Leibniz

$$\nabla_{\bar{U}} (f\bar{V}) = (\nabla_{\bar{U}} f)\bar{V} + f(\nabla_{\bar{U}} \bar{V})$$

También vamos a pedir que

$$\nabla_{\bar{U}} f = \bar{U}(f) = U^a \bar{E}_a(f) \underset{\text{coords}}{=} U^\mu \partial_\mu f$$

Desarrollemos la expresión en una base de vectores para ver las componentes

$$\bar{U} = U^a \bar{E}_a \,, \quad \bar{V} = V^b \bar{E}_b$$

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = \nabla_{U^a \bar{E}_a} \bar{V} \underset{\text{prop (1)}}{=} U^a \nabla_{\bar{E}_a} \bar{V} = U^a \nabla_{\bar{E}_a} (V^b \bar{E}_b)$$

$$\underset{\text{Leibniz (3)}}{=} U^a \left[(\nabla_{\bar{E}_a} V^b) \bar{E}_b + V^b \underbrace{\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b}_{\equiv \Gamma^c{}_{ba} \bar{E}_c} \right]$$

(notación Schutz)

$$\boxed{\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = U^a \left[\bar{E}_a(V^c) + \Gamma^c{}_{ba} V^b \right] \bar{E}_c}$$

$\Gamma^c{}_{ba}$ conexión

▷ *Componentes en base anholónoma*

$$\boxed{(\nabla_{\vec{U}} \vec{V})^c = U^a [\vec{E}_a(V^c) + \Gamma^c{}_{ba} V^b]}$$

▷ *En base coordenada* $\{\partial_\mu\}$

$$\boxed{[\nabla_{\vec{U}} \vec{V}]^\mu = U^\lambda \underbrace{(\partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} V^\nu)}_{\text{componentes de tensor (1,1)}}}$$

▷ $\nabla \vec{V}$ es un tensor (1,1). Dada una base $\{\vec{E}_a\}$ de vectores y una base $\{\tilde{E}^b\}$ de 1-formas

$$\nabla \vec{V} = [\nabla \vec{V}]^a{}_b \, \tilde{E}^b \otimes \vec{E}_a$$

Se suele denotar las componentes de $\nabla \vec{V}$

$$[\nabla \vec{V}]^a{}_b = V^a{}_{;b} \qquad\qquad \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = V^\mu{}_{,\nu}$$

En base coordenada $\{\partial_\mu\}, \{\tilde{d}x^\mu\}$

$$[\nabla \vec{V}]^\mu{}_\nu = V^\mu{}_{;\nu} = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} V^\nu$$

También se suele usar la notación

$$[\nabla \vec{V}]^\mu{}_\nu = \nabla_\nu V^\mu$$

OJO: no confundir este sub-índice ∇_ν con un vector, indica la componente covariante de $\nabla \vec{V}$

▷ *Cómo transforma la conexión?*

$$\Gamma^c{}_{ab} \vec{E}_c = \nabla_{\vec{E}_b} \vec{E}_a \Rightarrow \boxed{\Gamma^c{}_{ab} = \langle \tilde{E}^c, \nabla_{\vec{E}_b} \vec{E}_a \rangle}$$

Esta última expresión nos permite obtener la regla de transformación de la conexión

$$\Gamma^{c'}{}_{a'b'} = \langle \tilde{E}^{c'}, \nabla_{\vec{E}_{b'}} \vec{E}_{a'} \rangle = \langle \Lambda^{c'}{}_c \tilde{E}^c, \nabla_{\Lambda^b{}_{b'} \vec{E}_b} \Lambda^a{}_{a'} \vec{E}_a \rangle$$

linealidad de 1-forma + prop (1)

$$= \Lambda^{c'}{}_c \langle \tilde{E}^c, \Lambda^b{}_{b'} \nabla_{\vec{E}_b} \Lambda^a{}_{a'} \vec{E}_a \rangle$$

Leibniz (3)

$$= \Lambda^{c'}{}_c \{ \langle \tilde{E}^c, \Lambda^b{}_{b'} (\nabla_{\vec{E}_b} \Lambda^a{}_{a'}) \vec{E}_a \rangle + \langle \tilde{E}^c, \Lambda^b{}_{b'} \Lambda^a{}_{a'} \nabla_{\vec{E}_b} \tilde{E}^a \rangle \}$$

$\Rightarrow \dots$ (distribuir, usar la dualidad de las bases, definición de conexión y cómo actúa la derivada covariante sobre una función escalar)

$$\boxed{\Gamma^{c'}{}_{a'b'} = \Lambda^{c'}{}_{c}\Lambda^{a}{}_{a'}\Lambda^{b}{}_{b'}\Gamma^{c}{}_{ab} + \Lambda^{c'}{}_{a}\Lambda^{b}{}_{b'}\vec{E}_{b}(\Lambda^{a}{}_{a'})}$$

En base coordenada $\Lambda^{c'}{}_{c} \longmapsto \Lambda^{\gamma'}{}_{\gamma} = \dfrac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}}$, $\vec{E}_{b} \longmapsto \partial_{\beta}$

$$\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}}_{\underbrace{\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^{2} x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}}}$$

Otra manera (Problema 2a)

Por un lado

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{V})^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}(\nabla_{\bar{U}}\bar{V})^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} U^{\nu} V^{\mu}{}_{;\nu}$$

Por otro lado

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{V})^{\mu'} = U^{\nu'} V^{\mu'}{}_{;\nu'} = U^{\nu'}\left(\frac{\partial V^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} + \Gamma^{\mu'}{}_{\lambda'\nu'}V^{\lambda'}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} U^{\nu}\left[\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}V^{\mu}\right) + \Gamma^{\mu'}{}_{\lambda'\nu'}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}V^{\lambda}\right]$$

Igualar ambas expresiones y obtener la transformación de $\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'}$

Comentario: hay dos expresiones equivalentes para el término inhomogéneo de la transformación

$$\Gamma^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x'}{\partial x}\cdots\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^{2} x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}$$

$$- \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial^{2} x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}$$

(partes)

Extensión a tensor de rango (r,s)

1) Si T es un tensor de rango (r,s), entonces ∇T es un tensor de rango (r,s+1)

2) ∇ satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(S \otimes T) = \nabla S \otimes T + S \otimes \nabla T$$

4) Para funciones escalares f

$$\nabla f = df \quad \text{equiv} \quad \nabla_{\bar{U}} f = \bar{U}(f) = \tilde{d}f(\bar{U}) = \langle \tilde{d}f, \bar{U}\rangle$$

En particular, podemos obtener una expresión para la derivada covariante de 1-formas

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle = \iota_{\bar{V}} \tilde{\omega} \in C^\infty(M)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}(\bar{V}) = \nabla_{\bar{U}} \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle = \bar{U}(\langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle)$$ (sabemos cómo escribir esto)

Por otro lado,

$$\nabla_{\bar{U}} \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle \overset{\text{Leibniz}}{=} \langle \nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle + \langle \tilde{\omega}, \overbrace{\nabla_{\bar{U}} \bar{V}}^{\text{(también sabemos cómo escribir esto)}} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle = \nabla_{\bar{U}} \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle - \langle \tilde{\omega}, \nabla_{\bar{U}} \bar{V} \rangle$$

p/ $\bar{V} = \bar{E}_a$

$$\langle \nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}, \bar{E}_a \rangle = [\nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}]_a = \underbrace{\nabla_{\bar{U}} \overbrace{\tilde{\omega}(\bar{E}_a)}^{\omega_a}}_{\bar{U}(\omega_a) = U^b \bar{E}_b(\omega_a)} - \langle \tilde{\omega}, \nabla_{\bar{U}} \bar{E}_a \rangle$$

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{E}_a = U^b \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a = U^b \Gamma^c_{ab} \bar{E}_c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[\nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}]_a = U^b \left(\bar{E}_b(\omega_a) - \Gamma^c_{ab} \omega_c \right)}$$

En base coordenada

$$[\nabla_{\bar{U}} \tilde{\omega}]_\mu = U^\nu \left(\partial_\nu \omega_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda \right)$$

$\nabla \tilde{\omega}$ es un tensor (0,2)

$$[\nabla \tilde{\omega}]_{\mu\nu} = \partial_\nu \omega_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda = \omega_{\mu;\nu}$$

Expresión en coordenadas para la derivada covariante de un tensor (r,s)

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s ; \lambda} = \partial_\lambda \left(T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} \right)$$
$$+ \Gamma^{\mu_1}_{\rho\lambda} T^{\rho \mu_2 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} + \dots$$
$$- \Gamma^{\rho}_{\nu_1 \lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\rho \nu_2 \dots \nu_s} - \dots$$

Transporte paralelo y autoparalela

La conexión y la derivada covariante nos dan una noción de transporte paralelo a lo largo de una curva $\gamma(\lambda)$

con vector tangente $\bar{U} = \frac{d}{d\lambda}$

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = \lim_{\Delta\lambda} \frac{\bar{V}''_{\Delta\lambda}(\lambda_0) - \bar{V}(\lambda_0)}{\Delta\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V}''_{\Delta\lambda} = \bar{V}(\lambda_0) + \nabla_{\bar{U}} \bar{V} \Big|_p \Delta\lambda + O(\Delta\lambda^2)$$

Se dice que un vector se transporta paralelamente a lo largo de una curva cuando

$$\boxed{\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = 0}$$

$\bar{V}$ se transporta paralelamente a lo largo de la curva con vector tangente $\bar{U}$

- Autoparalela: un curva se dice que es autoparalela cuando su vector tangente se transporta paralelamente a lo largo de ella misma

$$\boxed{\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0} \quad (*)$$

Observación: la condición más general para una autoparalela es

$$\boxed{\nabla_{\bar{W}} \bar{W} = a \bar{W} \quad , \quad a \in \mathbb{R}}$$

Pero siempre es posible elegir una reparametrización de la curva de modo tal de llevarla a la forma $(*)$

- Geodésica: curva que extrema la distancia entre dos puntos (requiere una métrica).

  Observaciones:
  1) A veces se utiliza la misma definición que la de autoparalela.
  2) En espacios métricos con conexión simétrica ambas nociones coinciden.
  2') En espacio plano ambas nociones coinciden.

Problema 1b)

Dada una base coordenada $\{\partial_\mu\}$ nos piden calcular $\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu$ en la base de coordenadas polares $\{\partial_r, \partial_\theta\}$ y en la base anholónoma $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ sabiendo que en coordenadas cartesianas $\{\partial_x, \partial_y\}$ se cumple que

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x = \nabla_{\partial_x}\partial_y = \nabla_{\partial_y}\partial_x = \nabla_{\partial_y}\partial_y = 0$$

Cambio de base para transformación de coordenadas

$$\partial_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i$$

Cambio de base (bases anholónomas)

$$\bar{e}_{a'} = \Lambda^a{}_{a'}\bar{e}_a \quad , \quad \bar{e}_{a'} = \Lambda^i{}_{a'}\partial_i$$

Entonces

$$\partial_r = \cos\theta\,\partial_x + \sin\theta\,\partial_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_y$$

$$\partial_\theta = -r\sin\theta\,\partial_x + r\cos\theta\,\partial_y = -y\,\partial_x + x\,\partial_y$$

$$\hat{e}_r = \partial_r \,,\quad \hat{e}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{e_r}{}_{\partial_r} = 1, \quad \Lambda^{e_\theta}{}_{\partial_\theta} = \frac{1}{r}$$

- Base coordenada polar

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = ? \qquad \partial_r = (\partial_r)^i\partial_i$$

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = \nabla_{\partial_r}\left[(\partial_r)^x\partial_x + (\partial_r)^y\partial_y\right]$$

$$= \nabla_{\partial_r}\left[(\partial_r)^x\partial_x\right] + \nabla_{\partial_r}\left[(\partial_r)^y\partial_y\right]$$

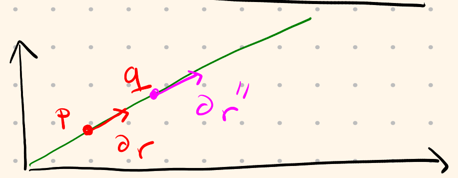
Leibniz

$$\underbrace{\left\{\nabla_{\partial_r}\Big[\underbrace{(\partial_r)^x}_{=\cos\theta}\Big]\right\}}_{\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta = 0}\partial_x + (\partial_r)^x\,\underbrace{\nabla_{\partial_r}\partial_x}$$

$$\nabla_{(\partial_r)^i\partial_i}\partial_x = (\partial_r)^x\nabla_{\partial_x}\partial_x + (\partial_r)^y\nabla_{\partial_y}\partial_x = 0$$

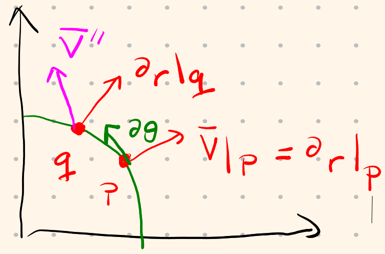
$$\Rightarrow \boxed{\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0}$$

∂_r se transporta autoparalelo a lo largo de sus propias curvas integrales



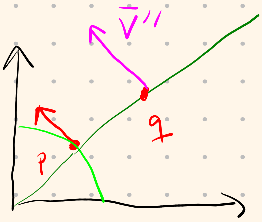
$$\bar{V}''_{\Delta\lambda} = \bar{V}(\lambda_0) + \nabla_{\bar{U}}\bar{V}\big|_p\,\Delta\lambda$$

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_r = \frac{1}{r}\partial_\theta$$

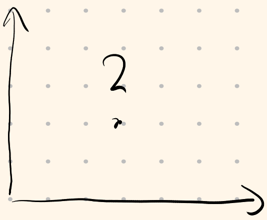


$$\nabla_{\partial_r} \partial_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta$$

$\bar{V}|_p = \partial_\theta|_p$



$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = -r\,\partial_r$$



Base anholónoma $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$

$$\nabla_{\hat{e}_r} \hat{e}_r = \nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$$

$$\nabla_{\hat{e}_r} \hat{e}_\theta = \nabla_{\partial_r}\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right) = \underbrace{\left(\nabla_{\partial_r}\frac{1}{r}\right)}_{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)}\partial_\theta + \frac{1}{r}\underbrace{\nabla_{\partial_r}\partial_\theta}_{\frac{1}{r}\partial_\theta} = 0$$

$$\nabla_{\hat{e}_\theta} \hat{e}_r = \frac{1}{r}\hat{e}_\theta \,, \quad \nabla_{\hat{e}_\theta} \hat{e}_\theta = -\frac{1}{r}\hat{e}_r$$

Problema 2

b) Corroborar que $V^{\mu}{}_{;\nu}$ transforma como un tensor (1,1)

$$V^{\mu'}{}_{;\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} V^{\mu}{}_{;\nu}$$

$\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ permite corregir el término molesto que hacía que $\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ no transformara adecuadamente (G2P1)

Para obtener expresiones tensoriales a partir de otras que contienen derivadas parciales

$$\partial_{\mu} \longmapsto \nabla_{\mu}$$

c) Hallar $\nabla_{\vec{v}} \tilde{w}$ en base coordenada (ya lo hicimos más arriba) y obtener $\nabla_{\partial_{\nu}} \tilde{d} x^{\mu}$

Pueden verlo desde la expresión en componentes de $\nabla_{\vec{v}} \tilde{w}$

o también hallar $\left[\nabla_{\vec{E}_c} \tilde{E}^{a}\right]_b = -\Gamma^{a}{}_{bc}$ y pasar a base coordenada