19/10 Clase 13: Guía 4 - Tensor de Riemann

	Newton	Einstein	En el origen de un SLI
potencial	Φ	$g_{\mu\nu}$	$\eta_{\mu\nu}$
fuerza	$\partial\Phi$	$\partial g_{\mu\nu}\ (\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})$	$=0$
"mareas"	$\partial^2\Phi$	$\partial^2 g_{\mu\nu}\ (\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) \sim R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$	$\neq 0$

En la clase pasada vimos que es posible hallar un cambio de coordenadas que anule las componentes de la conexión en un punto de la variedad. Esto es equivalente a pedir que en dicho punto la métrica sea la de Minkowski en el caso de que la variedad sea lorentziana.

Un sistema localmente inercial es un sistema de coordenadas local en el cual las componentes de la métrica son las de Minkowski y las derivadas primeras de la métrica son cero (condición suficiente para que los símbolos de Christoffel se anulen).

Qué pasa con las derivadas segundas de la métrica? Vamos a ver que no es posible anularlas con un cambio de coordenadas. Esto sólo sucede si la variedad es plana.

Veámoslo explícitamente:

Variedad M carta $\{x^\mu\}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$$

Transformación de coordenadas en el punto $p \in M : x^\mu \mapsto \xi^\alpha(x)$

x^μ carta de la variedad $\quad$ ξ^α carta del SLI

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}\, g_{\mu\nu} \quad , \quad x^\mu(p) = x^\mu_0 \quad , \quad \xi^\alpha(p) = \xi^\alpha(0)$$

Vamos a pedir que:

1) $$g'_{\alpha\beta}\big|_p = \eta_{\alpha\beta}$$

2) $$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}\Big|_p = 0$$

3) $$\frac{\partial^2 g'_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\delta \partial \xi^\gamma}\Big|_p = 0 \quad ?$$

Expandimos el cambio de coordenadas en torno a P

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \simeq \underbrace{\left.\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\right|_P}_{} + \underbrace{\left.\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha}\right|_P}_{} (\xi^\beta - \xi^\beta_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha}\right|_P}_{} (\xi^\gamma - \xi^\gamma_0)(\xi^\beta - \xi^\beta_0)$$

\# incógnitas= n^2 $\quad n \times n(n+1)/2 \quad n \times n(n+1)(n+2)/6$

CAUX/ $T_{abc} = T_{(abc)} \rightarrow$ 3 tipos de componentes $T_{aaa}, T_{aab}, T_{abc}$ $\quad b \neq a \quad c \neq b \neq a$

$\# T_{aaa} = n$, $\# T_{aab} = n \times (n-1)$, $\# T_{abc} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$$\Rightarrow \# T_{(abc)} = n + n(n-1) + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

También vamos a necesitar expandir la métrica $g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x(\xi))$

en torno a $\xi^\alpha(P)$

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} g_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu} \simeq \underbrace{g_{\mu\nu}\big|_P}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\left.\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \xi^\alpha}\right|_P}_{\frac{n(n+1)}{2} \times n} (\xi^\alpha - \xi^\alpha_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha}\right|_P}_{\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}} (\xi^\beta - \xi^\beta_0)(\xi^\alpha - \xi^\alpha_0)$$

$$\Rightarrow \quad g'_{\alpha\beta} \simeq \left(\left.\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\right|_P + \left.\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi \partial \xi}\right|_P (\ ) + \ldots \right) \left(\text{idem} \right)^\nu_\beta \left(g_{\mu\nu}\big|_P + \frac{\partial g}{\partial \xi}(\ ) + \ldots \right) \quad (*)$$

▶ Orden 0: evaluamos $(*)$ en P y pedimos que $g'_{\alpha\beta}\big|_P = \eta_{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow \quad \eta_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} g_{\mu\nu} \right)\Big|_P$$

\# ecuaciones = $n(n+1)/2$

\# incógnitas = n^2

diferencia = $n(n-1)/2 \overset{n=4}{=} 6 =$ Transf. Lorentz

En dimensión arbitraria n, el número de generadores del grupo de Lorentz SO(n-1,1) es n(n-1)/2

▶ Orden 1: derivamos respecto a ξ^γ evaluamos en P

$$0 = \underbrace{\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}}\Big|_P = \text{cosas}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}, \underbrace{\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha}}\right)\Big|_P$$

ecuaciones = $\frac{n(n+1)}{2} \times n$ $=$ # incógnitas = $n \times \frac{n(n+1)}{2}$

▶ Orden 2: derivamos respecto a ξ^γ, ξ^δ evaluamos en P

$$0 = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\delta \partial \xi^\gamma}\Big|_P = \text{cosas}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha}, \frac{\partial^3 x^\mu}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha}\right)\Big|_P$$

ecuaciones = $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $>$ # incógnitas = $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$

Sistema sobre determinado.

La diferencia entre #ec - #inc = $\frac{1}{12} n^2(n^2-1) \overset{n=4}{=} 20$

$\overset{n=3}{=} 6$

$\overset{n=2}{=} 1$

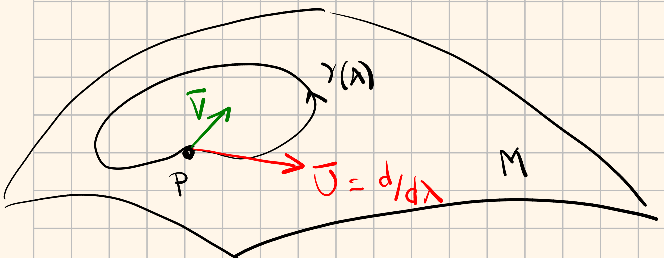
No es posible anular todas las derivadas segundas mediante una transformación de coordenadas.

Vamos a ver que la cantidad de derivadas segundas que no podemos hacer cero es la misma que la cantidad de componentes independientes del tensor de Riemann.

Transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada infinitesimal

(Weinberg Sec 6.3 pág 135 -ojo que él usa una conveción distinta para el tensor de Riemann ver también Schutz "A 1st course GR" Sec 6.5 pág 157)

Vamos a ver cómo aparece el tensor de Riemann al transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada infinitesimal. El hecho de que en general el vector final no sea igual al vector inicial nos indica que la variedad métrica está curvada.



$\gamma(\lambda): I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ curva cerrada

$\bar{U} = \frac{d}{d\lambda}$ vector tangente

Ec. de transporte || $\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = U^\nu V^\mu{}_{;\nu} = U^\nu \left(V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} V^\rho\right) = \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} V^\rho U^\nu$$

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu = - \Gamma^\mu_{\rho\nu} V^\rho U^\nu \qquad (1)$$

Vector inicial $V^\mu(\lambda_0)$ Vector final $V^\mu(\lambda_1)$ $\Rightarrow$ $V^\mu(\lambda_1) = V^\mu(\lambda_0)$?

A primer orden en $\lambda - \lambda_0$ o equivalentemente $x^\mu - x^\mu_0$ tenemos que

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} \simeq \frac{\Delta V^\mu}{\Delta\lambda}, \quad U^\nu = \frac{\Delta x^\nu}{\Delta \lambda} \Rightarrow \Delta V^\mu \simeq - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x_0) V^\rho(x_0) \Delta x^\nu \qquad (3)$$

Pero ésta expresión tiende a cero cuando $x^\mu(\lambda_1) = x^\mu(\lambda_0)$

Tenemos que ir a un orden más alto. Integremos la ecuación de transporte || (1)

$$\Delta V^\mu = - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x(\lambda)) V^\rho(x(\lambda)) \underbrace{U^\nu(x(\lambda))\, d\lambda}_{\frac{dx^\nu}{d\lambda}(\lambda)\, d\lambda \,=\, dx^\nu} \qquad (4)$$

También tenemos que aproximar Γ a primer orden

$$\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x) \simeq \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x_0) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x_0)\left(x^\sigma - x^\sigma_0\right) \qquad (5)$$

Como la curva es infinitesimal esto es suficiente. Reemplacemos (3) y (5) en (4)

$$\Delta V^\mu \simeq - \oint_{x_0}^{x(\lambda_1)} \left(\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x_0) + \Gamma^\mu_{\rho\nu,\sigma}(x_0)\Delta x^\sigma\right) \cdot \left(V^\rho(x_0) - \Gamma^\rho_{\eta\kappa}(x_0) V^\eta(x_0) \Delta x^\kappa\right) dx^\nu$$

A primer orden en Δx tenemos

$$\Delta V^\mu \simeq - \oint_{x_0}^{x_1} \underbrace{\Gamma^\mu_{\rho\nu}(x_0) V^\rho(x_0)}_{\text{const}} dx^\nu$$

$$- \oint_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left(\Gamma^\mu_{\rho\nu,\sigma}(x_0) V^\rho(x_0) \Delta x^\sigma - \Gamma^\mu_{\rho\nu}(x_0) \Gamma^\rho_{\eta\kappa}(x_0) V^\eta(x_0) \Delta x^\kappa\right)}_{\underbrace{\left(\Gamma^\mu_{\rho\nu,\sigma} - \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\rho\sigma}\right)\Big|_{x_0}}_{\text{const}} V^\rho \left(x^\sigma - \underset{\downarrow\,\text{const}}{x^\sigma_0}\right)} dx^\nu$$

Notemos que $\oint dx^\nu = 0$ ya que $x^\mu(\lambda_0) = x^\mu(\lambda_1)$

Entonces el único término que sobrevive es

$$\Delta V^\mu \simeq \left(-\Gamma^\mu_{\rho\nu,\sigma} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\rho\sigma}\right)\Big|_{x_0} V^\rho(x_0) \underbrace{\oint dx^\nu x^\sigma}_{\text{antisimétrico en } \nu,\sigma}$$

$$\oint dx^\nu x^\sigma = \underbrace{\oint d(x^\nu x^\sigma)}_{=0} - \oint dx^\sigma x^\nu = -\oint dx^\sigma dx^\nu$$

Por lo tanto, nos quedamos con la parte antisimétrica en ν,σ del paréntesis

$$\Delta V^\mu \simeq \frac{1}{2}\underbrace{\left(\Gamma^\mu_{\rho\sigma,\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\nu,\sigma} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu_{\kappa\sigma}\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\right)}_{\equiv R^\mu{}_{\rho\nu\sigma}}\Big|_{x_0} V^\rho(x_0) \oint dx^\nu x^\sigma$$

(la posición de los índices y el signo dependen de la conveción utilizada)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V^\mu = V^\mu_{\circlearrowleft} - V^\mu_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} R^\mu{}_{\rho\nu\sigma}(x_0)\, V^\rho(x_0) \oint dx^\nu x^\sigma}$$

SIGN CONVENTIONS

This book follows the "Landau-Lifshitz Spacelike Convention" (LLSC). Arrows below mark signs that are "+" in it. The facing table shows signs that other authors use.

$$+\boldsymbol{g} = -(\boldsymbol{\omega}^0)^2 + (\boldsymbol{\omega}^1)^2 + (\boldsymbol{\omega}^2)^2 + (\boldsymbol{\omega}^3)^2$$

g sign
(col. 2)

$$+\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}$$

$$+R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}$$

Riemann sign
(col. 3)

$$+R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$$

quotient of ***Einstein***
and ***Riemann*** signs

$$\textbf{Einstein} = +8\pi \boldsymbol{T}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = +8\pi T_{\mu\nu}$$

Einstein sign
(col. 4)

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{\hat{0}}, \boldsymbol{e}_{\hat{0}}) > 0$$

all authors agree
on this "positive
energy density" sign

The above sign choice for ***Riemann*** is convenient for coordinate-free methods, as in the curvature operator $\mathcal{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ above, in the curvature 2-forms (equation 14.19), and for matrix computations (exercise 14.9). The definitions of ***Ricci*** and ***Einstein*** with the signs adopted above are those that make their eigenvalues (and $R \equiv R^\mu{}_\mu$) positive for standard spheres with positive definite metrics.

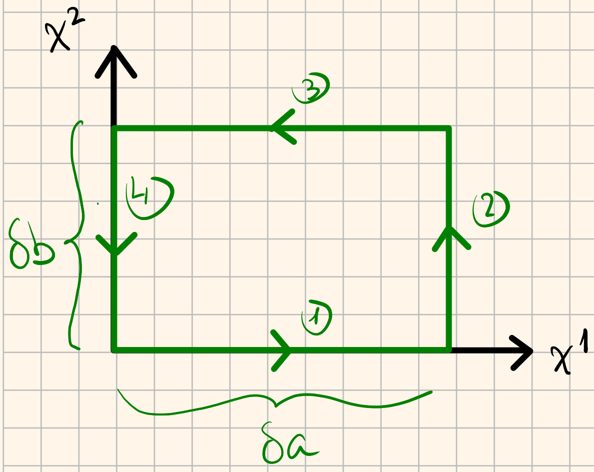
(Misner, Thorne & Wheeler contratapa 1)

TABLE OF SIGN CONVENTIONS

Reference	*g sign*	*Riemann*	*Einstein*	*Spacetime four-dimensional indices*
Landau, Lifshitz (1962) "spacelike convention"	+	+	+	latin
Landau, Lifshitz (1971) "timelike convention"	−	+	+	latin
Misner, Thorne, Wheeler (1973; this text)	+	+	+	greek
Adler, Bazin, Schiffer (1965)	−	−	−	greek
Anderson (1967)	−	−	−[b]	greek
Bergmann (1942)	−	−[a]	−	greek
Cartan (1946)		−	−	
Davis (1970)	−	+	−	latin
Eddington (1922)	−	+	−	greek
Ehlers (1971)	+	+	+	latin
Einstein (1950)	−	+	−	greek
Eisenhart (1926)		+	−	
Fock (1959)	−	−[a]	−	greek
Fokker (1965)	−	−	+	latin
Hawking and Ellis (1973)	+	+	+	latin
Hicks (1965)		+	+	
Infeld, Plebanski (1960)	−	+	−	greek
Lichnerowicz (1955)	−	+	+	greek
McVittie (1956)	−	+	−	greek
Misner (1969a)	+	+	+	greek
Møller (1952)	+	−	−	latin
Pauli (1958)	+	−	−	latin
Penrose (1968)	−	−	−	latin
Pirani (1965)	−	−	−	latin
Robertson, Noonan (1968)	+	+	−	latin
Sachs (1964)	±	+	+	latin
Schild (1967)	−	+	−	latin
Schouten (1954)		−	+	
Schroedinger (1950)	−	+	−	latin
Synge (1960b)	+	+	−	latin
Thorne (1967)	−	+	+	greek
Tolman (1934a)	−	+	−	greek
Trautman (1965)	−	−	−	latin
Weber (1961)	+	+	+	greek
Weinberg (1972)	+	−	−	greek
Weyl (1922)	−	+	+	latin
Wheeler (1964a)	+	+	+	greek

(Misner, Thorne & Wheeler contratapa 2)

Volviendo a la cuenta: qué es $\oint dx^\nu x^\sigma$?



$$\oint = \int_{1} + \int_{2} + \int_{3} + \int_{4}$$

1 : $dx^\nu = \delta^\nu_1 dx^1$, $x^\sigma = x^1 \delta^\sigma_1$, $x^1 : 0 \to \delta a$

2 : $dx^\nu = \delta^\nu_2 dx^2$, $x^\sigma = \delta a\, \delta^\sigma_1 + x^2 \delta^\sigma_2$

$x^2 : 0 \to \delta b$

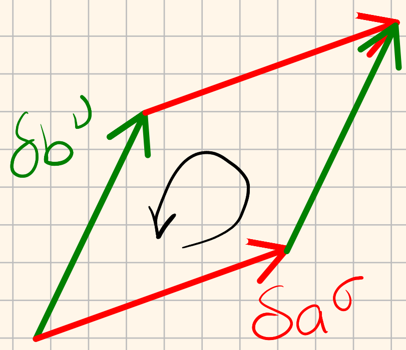
...

$$\oint dx^\nu x^\sigma = \delta a\, \delta b \left(\delta^\nu_2 \delta^\sigma_1 - \delta^\nu_1 \delta^\sigma_2\right)$$

$\Rightarrow$ En este caso particular, tenemos que $\Delta V^\mu = \delta a\, \delta b\, R^\mu{}_{\rho 21}$

En general se obtiene que

$$\boxed{\Delta V^\mu = R^\mu{}_{\rho\nu\sigma} V^\rho \delta a^\sigma \delta b^\nu}$$



- ***Distintas expresiones/definiciones para el tensor de Riemann***

▸ $R(\bar{W}, \bar{U}, \bar{V}) = [\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{V}}]\bar{W} - \nabla_{[\bar{U},\bar{V}]}\bar{W} \overset{\text{otra notación}}{=} R(\bar{U}, \bar{V})\bar{W}$

En base coordenada $\{\partial_\mu\}$

$$R^\lambda{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\rho}$$

En base anholónoma $\{E_a\} \to [E_a, E_b] = C^c{}_{ab} E_c$

$$R^c{}_{adb} = E_d\left(\Gamma^c_{ab}\right) + \Gamma^c_{ed}\Gamma^e_{ab} - E_b\left(\Gamma^c_{ad}\right) - \Gamma^c_{eb}\Gamma^e_{ad} - C^e_{db}\Gamma^c_{ea}$$

▸ En base coordenada (sin torsión)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \underbrace{V^\rho{}_{;\nu\mu}}_{\left(V^\rho{}_{;\nu}\right)_{;\mu}} - V^\rho{}_{;\mu\nu} = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma$$

Propiedades del tensor de Riemann

1) $R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\nu} = -R_{\mu\lambda\nu\rho}$

2) $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$

3) $R_{\lambda[\mu\nu\rho]} = 0$

Utilizando estas tres propiedades podemos ver que el número de componentes independientes del tensor de Riemann es

comp indep Rmn = $\frac{1}{12} n^2 (n^2-1)$ (el mismo número de derivadas segundas de la métrica que no podemos anular con un cambio de carta)

Ayuda Problema 12b:
considerar "índices colectivos" $R_{(\lambda\mu)(\nu\rho)}$ "=" $R_{(AB)}$ para contar cuantas componentes tiene.

Esto tiene en cuenta las propiedades 1 y 2.

Luego restar las restricciones de la propiedad 3.

Tensor de Ricci y escalar de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} \quad , \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Identidad de Bianchi

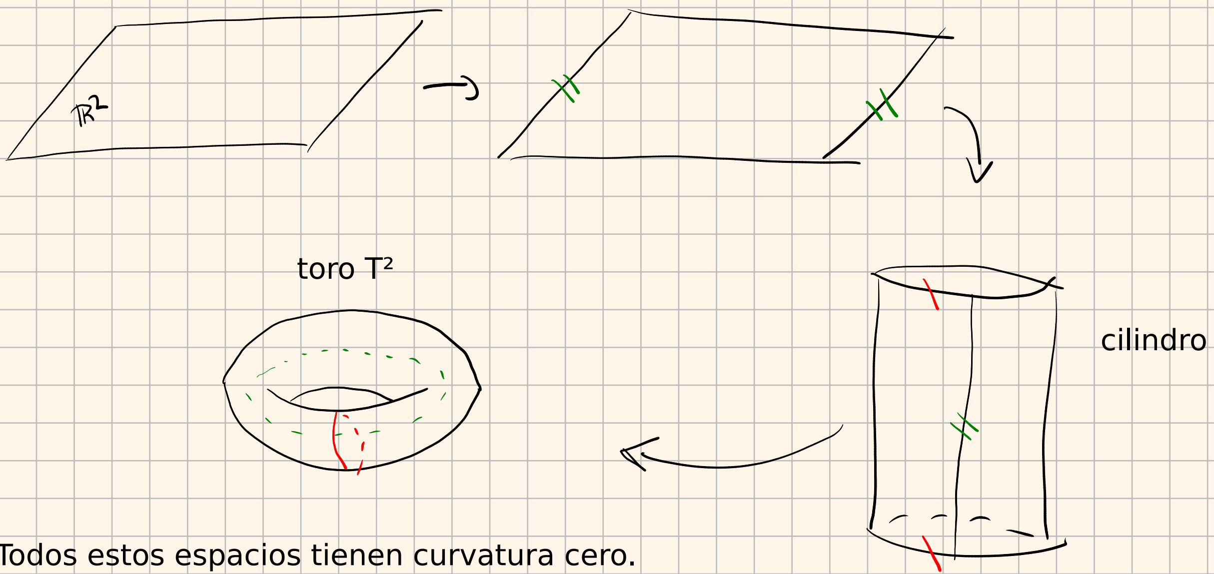
$$R_{\lambda\mu[\rho\nu;\sigma]} = 0$$

$$R^{\rho}{}_{\mu;\rho} = \frac{1}{2} R_{;\mu}$$

Problema 13

Nos piden:
a) Mostrar que la superficie de un cilindro es plana
b) Calcular el tensor de Riemann de la 2-esfera
c) Calcular el tensor de Riemann de la 3-esfera (se los dejo a uds)

a) El tensor de Riemann mide la curvatura localmente, no tiene en cuenta efectos globales



Todos estos espacios tienen curvatura cero.
Los podemos equipar con la métrica plana.

b) S^2:
$$dl^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \qquad \theta\in[0,\pi),\quad \varphi\in[0,2\pi)$$

$$g_{ij} = a^2\begin{pmatrix}1 & \\ & \sin^2\theta\end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix}1 & \\ & 1/\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

Los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk}\right)$$

Se pueden calcular por definición utilizando la expresión de arriba o bien utilizando el principio variacional que vieron en la clase de Juan del 07/10.

El resultado es:

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

El tensor de Riemann en una base coordenada es

$$R^i{}_{kjl} = \partial_j\Gamma^i{}_{kl} + \Gamma^i{}_{mj}\Gamma^m{}_{kl} - \partial_l\Gamma^i{}_{kj} - \Gamma^i{}_{ml}\Gamma^m{}_{kj}$$

Del Problema 12a sabemos que el tensor de Riemann con todos los índices abajo se puede escribir:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(g_{il,jk} - g_{ik,jl} + g_{jk,il} - g_{jl,ik}\right) + g_{mn}\left(\Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{il} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^m_{ik}\right)$$

(simplemente reemplazar la expresión de los símbolos de Levi-Civita)
(notar que el primer término cumple con las propiedades algebráicas del tensor de Riemann)

Calculemos la componente independientes del Rmn (sabemos que sólo hay una componente independiente en dos dimensiones).

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{g_{\theta\varphi,\varphi\theta}} - \cancelto{0}{g_{\theta\theta,\varphi\varphi}} + \cancelto{0}{g_{\varphi\theta,\theta\varphi}} - g_{\varphi\varphi,\theta\theta}\right)$$

$$+ g_{mn}\left(\Gamma^n_{\varphi\theta}\Gamma^m_{\theta\varphi} - \Gamma^n_{\varphi\varphi}\Gamma^m_{\theta\theta}\right)$$

▸ $-\frac{1}{2}\partial^2_\theta g_{\varphi\varphi} = -a^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$

▸ $g_{mn}\left(\Gamma^n_{\varphi\theta}\Gamma^m_{\theta\varphi} - \Gamma^n_{\varphi\varphi}\Gamma^m_{\theta\theta}\right) = g_{\theta\theta}\left(\cancel{\Gamma^\theta_{\varphi\theta}}\,\cancel{\Gamma^\theta_{\theta\varphi}} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\cancel{\Gamma^\theta_{\theta\theta}}\right)$

$$+ g_{\varphi\varphi}\left(\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} - \cancel{\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}}\Gamma^\varphi_{\theta\theta}\right) =$$

$$= g_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = a^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{\theta\varphi\theta\varphi} = a^2\sin^2\theta}$$

Ya que estamos calculemos tmb el tensor de Ricci y el escalar de Ricci

$$R_{ij} = R^l{}_{ilj} = g^{kl}R_{kilj}$$

prop(1)

$$R_{\theta\theta} = g^{kl}R_{k\theta l\theta} = g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\theta\varphi\theta} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta}R_{\theta\varphi\theta\varphi} = 1$$

$$R_{\theta\varphi} = g^{kl}R_{k\theta l\varphi} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta\theta\varphi} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\theta\varphi\varphi} = 0$$

$$R_{\varphi\varphi} = g^{kl}R_{k\varphi l\varphi} = g^{\theta\theta}R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta$$

$$\boxed{R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \sin^2\theta \end{pmatrix}}$$

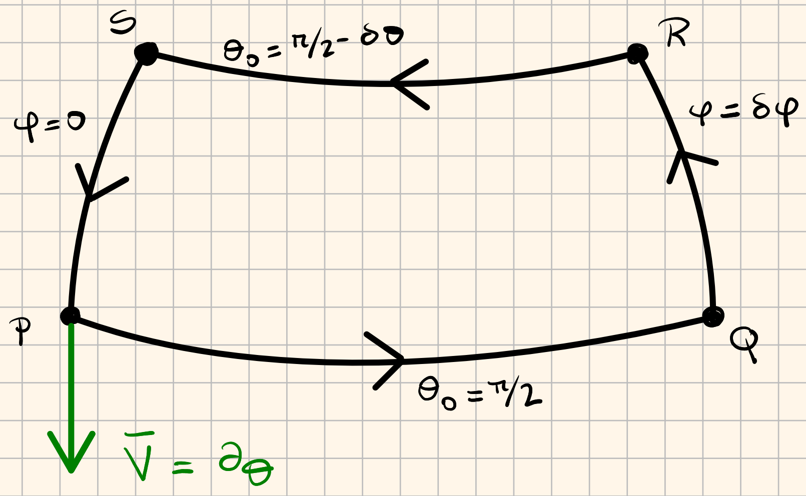
$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = \boxed{2 = R_{S^2}}$$

● Tarea: calcular las componentes de R_{ijkl}, R_{ij}, R para el plano hiperbólico

$ds^2 = d\rho^2 + sh^2\rho\, d\varphi$ y chequear que $R_{H^2} = -2$

Problema 15

Nos piden calcular el transporte paralelo de un vector en un cuadrilatéro cerrado (P → Q → R → S → P) sobre la 2-esfera



y comparar con la expresión $\Delta V^\mu = \delta\varphi\,\delta\theta\, R^\mu{}_{\nu\varphi\theta} V^\mu$

▶ $P \to Q$ En el Problema 7 (explicado por Juan) ya calculamos el transporte || a lo largo de un paralelo

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\varphi \overset{\theta=\pi/2}{=} 0 \Rightarrow$$ sobre el Ecuador de la 2-esfera el vector $\bar{V} = \partial_\theta$ no cambia

$$P \to Q : \bar{V}_P = \partial_\theta \longmapsto \bar{V}_Q = \partial_\theta$$

▶ $Q \to R$: los meridianos son geodésicas de ∂_θ es decir, ∂_θ se transporta autoparalelo

$$Q \to R : \bar{V}_Q = \partial_\theta \longmapsto \bar{V}_R = \partial_\theta$$

▶ $R \to S$: Del Problema 7 sabemos que el transporte paralelo de ∂_θ a lo largo de un paralelo arbitrario $\theta_0 \neq \pi/2$ es

$$\bar{V}^{\parallel}(\sigma) = \cos(\cos\theta_0\,\sigma)\partial_\theta - \frac{\sin(\cos\theta_0\,\sigma)}{\sin\theta_0}\partial_\varphi$$

σ es el parámetro de la curva y en este caso recorremos la curva en sentido inverso es decir $\sigma : \delta\varphi \to 0$

$$\bar{V}^{\parallel}(-\delta\varphi) = \cos(\cos\theta_0(-\delta\varphi))\partial_\theta - \frac{\sin(\cos\theta_0(-\delta\varphi))}{\sin\theta_0}\partial_\varphi$$

$$= \cos(\cos\theta_0\,\delta\varphi)\partial_\theta + \frac{\sin(\cos\theta_0\,\delta\varphi)}{\sin\theta}\partial_\varphi$$

Recordemos que $\theta_0 = \pi/2 - \delta\theta$ que basta con quedarse a segundo orden en $\delta\theta, \delta\varphi$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_0 = \cos(\pi/2 - \delta\theta) = \sin\delta\theta \simeq \delta\theta$$

$$\sin\theta_0 = \sin(\pi/2 - \delta\theta) = \cos\delta\theta \simeq 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{V}_S = \bar{V}''(-\delta\varphi) \simeq \partial_\theta + \delta\theta\,\delta\varphi\,\partial_\varphi}$$

▶ $S \to P$: Para este tramo no nos queda otra que calcular el transporte paralelo de un vector con componente en ∂_φ a lo largo de un meridiano

$$\bar{V} = V^\varphi \partial_\varphi \;, \qquad \nabla_{\partial_\theta} V^\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\sigma} V^\varphi + \Gamma^\varphi{}_{\rho\nu} V^\rho \underbrace{U^\nu}_{(\partial_\theta)^\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV^\varphi}{d\sigma} + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} V^\varphi = 0$$

notemos que el parámetro de la curva σ es en realidad el mismo ángulo θ (las curvas integrales de ∂_θ tienen como parámetro afín a θ).

$$\Rightarrow \quad \frac{dV^\varphi}{d\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} V^\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV^\varphi}{V^\varphi} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\varphi$$

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \ln(\sin\theta)$$

$$\int_{V^\varphi(\theta_0)}^{V^\varphi(\theta)} \frac{dV^\varphi}{V^\varphi} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta \quad \Rightarrow \quad V^\varphi(\theta) = \frac{V_0^\varphi \sin\theta_0}{\sin\theta}$$

En nuestro caso $V_0^\varphi = \delta\varphi\,\delta\theta$ y la componente V^θ no cambia

$$\Rightarrow \quad \bar{V}''_P = \partial_\theta + \delta\varphi\,\delta\theta\, \frac{\sin(\pi/2 - \delta\theta)}{\sin\pi/2}\, \partial_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{V}''_9 = \partial_\theta + \delta\varphi\,\delta\theta\,\partial_\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\bar{V} = \bar{V}''_9 - \bar{V}_P = \delta\varphi\,\delta\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta V^\varphi = \delta\varphi\,\delta\theta}$$

Por otro lado $\delta V^\varphi = \delta\varphi\,\delta\theta\, R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta}$

Del Problema 13 $\underset{(a=1)}{R_{\theta\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta} \underset{(\text{prop } 1)}{=} R_{\varphi\theta\varphi\theta} \Rightarrow R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta} = 1$ ✓