28/10 Clase 16: Guía 5 - Geodésicas nulas (rayos de luz) en campo débil

Geodésicas

La ecuación de la geodésica (o autoparalela) en una variedad dotada de una métrica y una conexión compatible con la misma es

$$\nabla_{\vec{V}} \vec{V} = 0 \,, \quad \text{con } \vec{V} = \frac{d}{d\lambda} \text{ vector tangente}$$

Si tenemos una carta de coordenadas $\{x^\mu\}$ entonces $\{\partial_\mu\}$ es una base de vectores

Entonces, la ecuación de las geodésicas se lee

$$0 = V^\rho \, V^\mu{}_{;\rho} = V^\rho \left(\partial_\rho V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu\right)$$

donde $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ son los símbolos de Christoffel.

Recordando que $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ podemos escribir la ecuación anterior como

$$0 = \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu V^\rho = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}$$

Otra propiedad importante de las geodésicas y el tranporte paralelo es que el producto interno entre vectores transportados paralelamente se mantiene constante a lo largo de una geodésica. En particular, la norma del vector tangente conserva su valor a lo largo de su geodésica correspondiente.
Se dice que una geodésica es tipo tiempo, nula o espacio según la norma de su vector tangente sea negativa, cero o positiva, respectivamente.

$$\bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \,, \qquad \|\bar{V}\|^2 = g(\bar{V},\bar{V}) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$$

$$\bar{V}\left(g(\bar{V},\bar{V})\right) = \frac{d}{d\lambda} g(\bar{V},\bar{V}) = \nabla_{\bar{V}}\, g(\bar{V},\bar{V}) = \underbrace{\left(\nabla_{\bar{V}} \bar{g}\right)}_{=0}(\bar{V},\bar{V}) + 2\, g(\underbrace{\nabla_{\bar{V}} \bar{V}}_{=0}, \bar{V}) = 0$$

Vectores de Killing

Un vector de Killing $\vec{\xi}$ es un campo vectorial que cumple

$$\pounds_\xi g = 0$$

en coordenadas

$$\begin{aligned}
(\pounds_\xi g)_{\mu\nu} &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\partial_\nu \xi^\rho + g_{\rho\nu}\partial_\mu \xi^\rho \\
&= \xi^\rho (g_{\mu\nu;\rho}) + g_{\mu\rho}(\xi^\rho{}_{;\nu}) + g_{\rho\nu}(\xi^\rho{}_{;\mu}) \\
&= \underbrace{\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu}}_{=0 \text{ para ser vector de Killing}} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}
\end{aligned}$$

(notación alternativa)

Leyes de conservación y vectores de Killing

Si tenemos un vector de Killing, entonces podemos definir una cantidad conservada a lo largo de la geodésica.

Recordemos la acción de la geodésica

$$S = \frac{1}{2}\int d\lambda\ \mathcal{L}\left(\lambda, x(\lambda), \frac{dx}{d\lambda}(\lambda)\right) = \frac{1}{2}\int d\lambda\ g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange son las ecuaciones de la geodésica

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}$$

Si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de una coordenada x^β (β está fijo, por ejemplo $\beta = 1$)

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)} = \text{const}}$$ a lo largo de la geodésica

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)} = g_{\beta\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = V_\beta = \text{const}$$

La contracción de un vector de Killing con el vector tangente de la geodésica nos da una cantidad conservada

$$\frac{d}{d\lambda}(\xi\cdot\bar{V}) = \frac{d}{d\lambda}g(\xi,\bar{V}) = \nabla_{\bar{V}}\, g(\xi,\bar{V}) = \underbrace{(\nabla_{\bar{V}}g)}_{=0}(\xi,\bar{V}) + g(\nabla_{\bar{V}}\xi,\bar{V}) + g(\xi,\underbrace{\nabla_{\bar{V}}\bar{V}}_{=0})$$

$$= g_{\mu\nu}V^\rho(\xi^\mu{}_{;\rho})V^\nu = \overbrace{V^\rho V^\nu}^{\text{sim en }(\rho,\nu)}\xi_{\nu;\rho} = V^\rho V^\nu \xi_{(\nu;\rho)} = 0 \Rightarrow \boxed{\xi \quad \text{Killing}}$$

▶ Qué tiene que ver una cosa con la otra? Lo más sencillo es verlo con un ejemplo.

Ejemplo: si β=1, entonces $\partial_1 g_{\mu\nu} = 0$

Podemos definir un campo vectorial $\xi = \partial_1 = \delta^\mu_1\partial_\mu = (0,1,0,0)$ que es un vector de Killing

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \xi^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\partial_\nu\xi^\rho + g_{\rho\nu}\partial_\mu\xi^\rho$$

$$= \underbrace{\partial_1 g_{\mu\nu}}_{=0} + g_{\mu\rho}\underbrace{\partial_\nu\delta^\rho_1}_{=0} + g_{\rho\nu}\underbrace{\partial_\mu\delta^\rho_1}_{=0} = 0 \quad ✓$$

En este caso, notemos que la contracción del vector de Killing con el vector tangente nos da la componente covariante que se conserva

$$\xi\cdot\bar{V} = g(\xi,\bar{V}) = g_{\mu\nu}\xi^\mu V^\nu = g_{\mu\nu}\delta^\mu_1 V^\nu = g_{1\nu}V^\nu = V_1 = \text{const}$$

En general resolver las ecuaciones de las geodésicas es bastante complicado. Si contamos con vectores de Killing tenemos automáticamente cantidades conservadas (constantes de integración).

En n dimensiones tenemos n ecuaciones diferenciales para resolver.

La norma del vector tangente de la geodésica siempre provee una "conservación"

$$\frac{d}{d\lambda} g(\bar{v}, \bar{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\bar{v}, \bar{v}) = \text{const}$$

Para geodésicas temporales o espaciales esto nos dice cómo conviene elegir el parámetro afín:

- Geodésica temporal

$$\bar{v} \cdot \bar{v} < 0 \quad , \quad g(\bar{v}, \bar{v}) = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \overset{\lambda = \tau}{=} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1 = \text{const}$$

Notemos que $\frac{dx^\mu}{d\tau} = U^\mu$ la cuadrivelocidad. Se suele usar como vector tangente a las geodésicas temporales el cuadrimomento $p^\mu = m U^\mu \Rightarrow \bar{p} \cdot \bar{p} = -m^2$

- Geodésica espacial

$$\bar{v} \cdot \bar{v} > 0 \quad , \quad g(\bar{v}, \bar{v}) = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \overset{\lambda = s \text{ intervalo}}{=} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = +1 = \text{const}$$

- Geodésica nula: en este caso no hay una elección obvia y conveniente para el parámetro afín. Simplemente se elije λ para que se cumpla

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = 0, \; v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = (\omega, \vec{k}) = k^\mu \quad , \quad -\omega^2 + |\vec{k}|^2 = 0 \quad \text{relación de dispersión}$$

Entonces tenemos (n-1) ecuaciones a resolver. Cuantos más vectores de Killing tengamos menos ecuaciones tendremos que resolver.

Métrica de campo débil

$$ds^2 = -(1+2\phi)\,dt^2 + (1-2\phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \; , \; |\phi| \ll 1 \; , \quad \partial_t \phi = 0$$

- Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^t_{\ ti} = \partial_i \phi \; , \quad \Gamma^i_{\ tt} = \partial^i \phi \; , \quad \Gamma^i_{\ j\ell} = -2\,\delta^i_{(j}\partial_{\ell)}\phi + \delta_{j\ell}\,\partial^i \phi$$

Problema 3

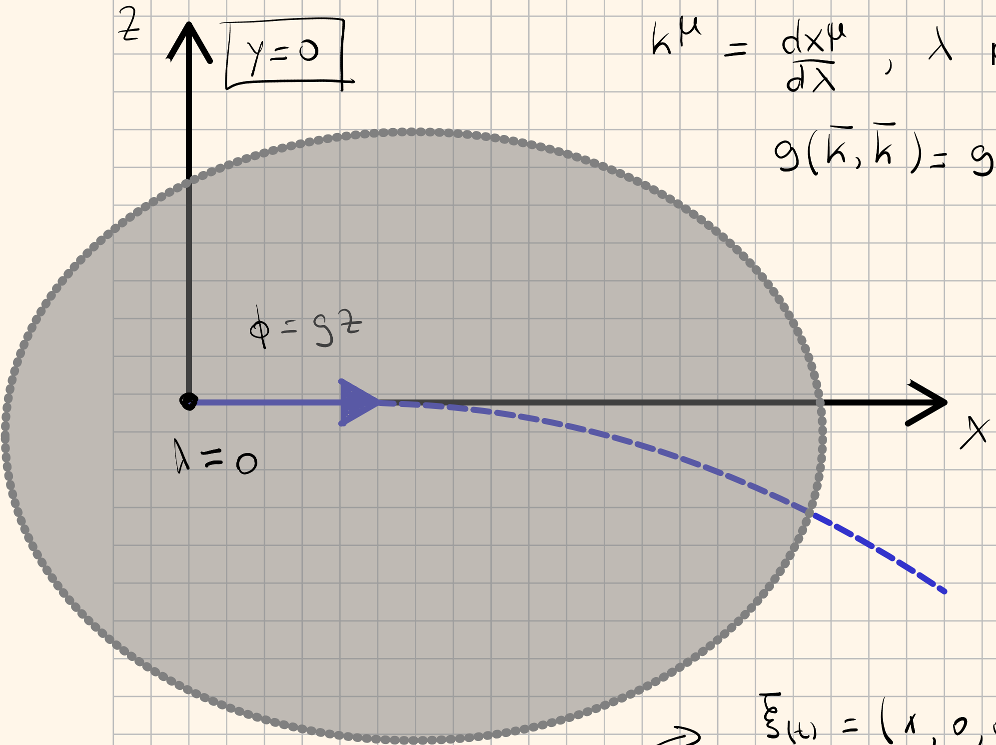
En una región del espacio la métrica es

$$ds^2 = -(1+2\phi)\,dt^2 + (1-2\phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (c=1)$$

$$|\phi| \ll 1, \quad \partial_t \phi = 0, \quad \phi = gz, \quad g = \text{const}, \quad [g] = m/s^2$$

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad \lambda$$ parámetro de la geodésica nula

$$g(\bar{k},\bar{k}) = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$



$$\xi_{(t)} = (1,0,0,0) = \partial_t$$

- Vectores de Killing $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$

Cantidades conservadas

- $-E \equiv g(\bar{k},\partial_t) = g_{tt}k^t = k_t = \text{const}$
- $K \equiv g(\bar{k},\partial_x) = g_{xx}k^x = k_x = \text{const}$
- $K_y \equiv g(\bar{k},\partial_y) = g_{yy}k^y = k_y = \text{const}$

Notemos que debido a que $\left.\frac{dy}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0 \Rightarrow \boxed{k_y = 0 = k^y \quad \forall \lambda}$

- Ecuación de la geodésica

$$\nabla_{\bar{k}}\bar{k} = 0 \Rightarrow \frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}k^\nu k^\rho = 0$$

- Símbolos de Christoffel $\phi = gz$

$$\Gamma^t_{zz} = \frac{g}{1+2gz}, \quad \Gamma^x_{xz} = \Gamma^y_{yz} = -\frac{g}{1-2gz}$$

$$\Gamma^z_{tt} = \Gamma^z_{xx} = \Gamma^z_{yy} = \Gamma^z_{zz} = \frac{g}{1-2gz}$$

Las ecuaciones de la geodésica son ($k^y = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{dk^t}{d\lambda} + \dfrac{2g}{1+2gz} k^t k^z = 0 \\ \dfrac{dk^x}{d\lambda} - \dfrac{2g}{1-2gz} k^x k^z = 0 \\ \dfrac{dk^z}{d\lambda} + \dfrac{g}{1-2gz} \left[(k^t)^2 + (k^x)^2 + (k^z)^2 \right] = 0 \end{cases}$$

Con la restricción $k_\mu k^\mu = 0$

Resolver integrando directamente es un quilombo en general. Si hay vectores de Killing conviene tratar de utilizarlos para resolver el problema.

Comencemos por ver que información podemos obtener de restricción $\bar{k} \cdot \bar{k} = 0$

$$0 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g_{tt} (k^t)^2 + g_{xx} (k^x)^2 + g_{zz} (k^z)^2$$

Notemos que $k_t = g_{tt} k^t \Rightarrow k^t = \dfrac{1}{g_{tt}} k_t = g^{tt} k_t$ (igual para k_x)

$$\Rightarrow \quad 0 = g^{tt} (k_t)^2 + g^{xx} (k_x)^2 + g_{zz} (k^z)^2$$

$$0 = - \underbrace{\frac{1}{1+2\phi}}_{\simeq (1-2\phi)} E^2 + \underbrace{\frac{1}{1-2\phi}}_{\simeq (1+2\phi)} K^2 + (1-2\phi) \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 \qquad |\phi| \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -(1-2\phi) E^2 + (1+2\phi) K^2 + (1-2\phi) \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 \qquad (*)$$

La ecuación anterior vale para cualquier punto de la geodésica (el transporte paralelo preserva el producto interno entre vectores transportados paralelamente), en particular vale para z=0, donde tenemos que

$$\phi(z=0) = g.0 = 0 \quad , \quad \left.\frac{dz}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$$

$$(*) \Rightarrow \quad 0 = -E^2 + K^2 \Rightarrow E^2 = K^2 \Rightarrow \boxed{E = +K = \left.\left(g_{xx} \frac{dx}{d\lambda}\right)\right|_{\lambda=0}}$$

Reemplazando esto en $(*)$

$$0 = -(1-2\phi) E^2 + (1+2\phi) E^2 + (1-2\phi)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2$$

$$0 = 4\phi E^2 + (1-2\phi)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 = -\frac{4\phi}{1-2\phi} E^2 \underset{\phi \ll 1}{\simeq} -4\phi E^2$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} = \pm 2\sqrt{-\phi}\, E$$ (notemos que z decrece, así que la raíz está bien definida)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{d\lambda} = -2\sqrt{-\phi}\, E}$$

Nos va a resultar conveniente hallar la trayectoria z=z(x)

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{k^z}{k^x} = \frac{-2\sqrt{-\phi}\,E}{E} = -2\sqrt{-\phi} = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{-gz}} \underset{u \equiv -z}{=} \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{gu}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, d\left(\sqrt{u}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{g}}\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow u = gx^2 = -z \Rightarrow \boxed{z(x) = -gx^2}$$

Si en física Newtoniana postulamos que la luz también es afectada por la gravedad del mismo modo que una partícula masiva entonces

tiro oblícuo $\left.\begin{aligned} x(t) &= t \\ z(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\}$ $\boxed{z(x) = -\frac{1}{2}g x^2}$

Relatividad General predice una deflexión de la luz debido a efectos de gravedad y en un factor 2 respecto del que "predice" la física Newtoniana.

Problema 4

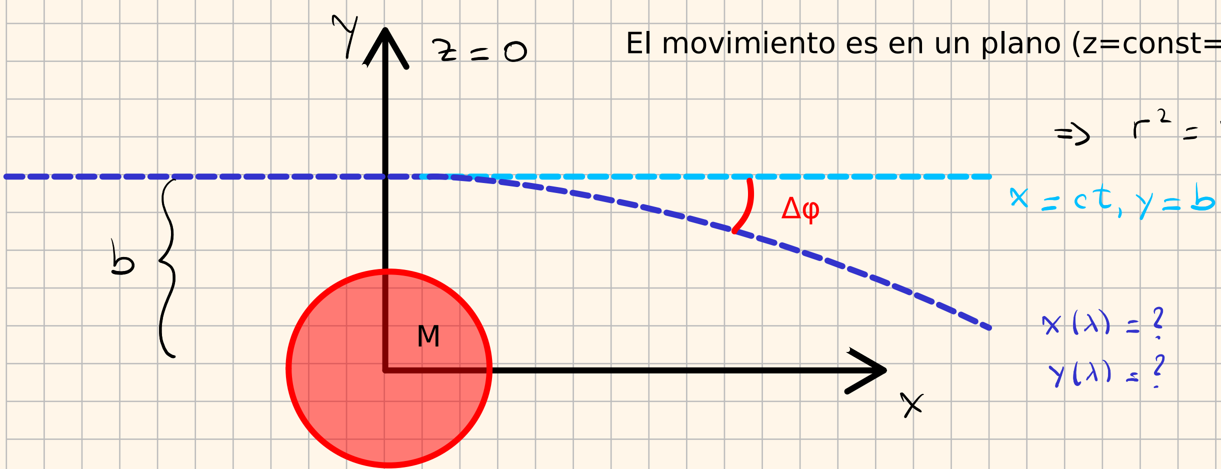
En una región del espacio la métrica es

$$ds^2 = -(1+2\phi)\,dt^2 + (1-2\phi)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \qquad (c=1)$$

$$|\phi| \ll 1, \quad \partial_t \phi = 0, \qquad \phi = -\frac{GM}{r}, \qquad r^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$$

$$h_{\mu\nu} = -2\phi\,\delta_{\mu\nu}$$



El movimiento es en un plano (z=const=0)

$$\Rightarrow \quad r^2 = x^2+y^2$$

Del constraint de geodésica nula tenemos

$$0 = \bar{k}\cdot\bar{k} = g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = (\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})k^\mu k^\nu \cong -(k^t)^2 + |\vec{k}|^2 + \overbrace{h_{tt}(k^t)^2 + h_{ij}k^ik^j}^{\mathcal{O}(\phi)}$$

vamos a ver que es suficiente con quedarnos a primer orden cero en ϕ

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^t_{\ ti} = \partial_i\phi, \qquad \Gamma^i_{\ tt} = \partial^i\phi, \qquad \Gamma^i_{\ jl} = -2\,\delta^i_{(j}\,\partial_{l)}\phi + \delta_{jl}\,\partial^i\phi$$

Notemos que a primer orden en ϕ

$$\partial^i\phi = g^{il}\partial_l\phi \simeq (1+2\phi)\,\delta^{il}\,\partial_l\phi \cong \partial_i\phi$$

Ecuaciones de la geodésica

se cumpe automáticamente gracias a la conservación de k_t

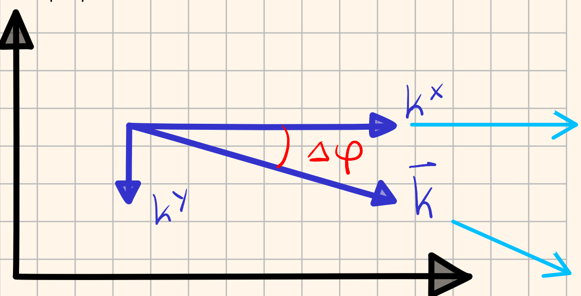
$$\mu = t \qquad \frac{dk^t}{d\lambda} + \Gamma^t_{\ \rho\sigma}k^\rho k^\sigma = \frac{dk^t}{d\lambda} + 2\,\partial_i\phi\,k^ik^t = -2\,\partial_i\phi\,k^ik^t + 2\,\partial_i\phi\,k^ik^t = 0$$

$$\frac{dk^t}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(g^{tt}k_t\right) \simeq \frac{d}{d\lambda}\Big(-(1-2\phi)\overbrace{k_t}^{\text{const}}\Big) = +2\,\partial_i\phi\,k^ik_t \simeq -2\,\partial_i\phi\,k^ik^t$$

$$\mu = i \qquad \frac{dk^i}{d\lambda} = -\Gamma^i_{\ \rho\sigma}k^\rho k^\sigma = -(\partial^i\phi)(k^0)^2 + 2\,\delta^i_{(j}\partial_{l)}\phi\,k^jk^l - \partial^i\phi\,|\vec{k}|^2$$

$$\frac{dk^i}{d\lambda} = -\underbrace{(\partial_i\phi)}_{\mathcal{O}(\phi)}\underbrace{\left[(k^0)^2 + |\vec{k}|^2\right]}_{\mathcal{O}(1)} + 2(\partial_l\phi)\,k^lk^i$$

La ecuación $\vec{k}\cdot\vec{k}=0$ a orden cero nos dice que $k^t = |\vec{k}|$



$$\Rightarrow \frac{dk^i}{d\lambda} = -2|k|^2 \partial_i \phi + 2(\partial_\ell \phi) k^\ell k^i$$

Asumiendo que la desviación del rayo de luz es pequeña, es decir, $|k^y| << |k^x|$

$$\Rightarrow \quad k^0 \simeq |k^x| \qquad |\bar{k}| = |k^x|$$

▶ $i=x \quad \frac{dk^x}{d\lambda} = -2(k^x)^2 \partial_x \phi + 2\underbrace{(\partial_x \phi k^x + \partial_y \phi k^y)}_{\simeq \partial_x \phi k^x} k^x \simeq 0 \Rightarrow \boxed{k^x = \text{const}} \quad (*)$

▶ $i=y \quad \frac{dk^y}{d\lambda} = -2(k^x)^2 \partial_y \phi + 2\underbrace{(\partial_x \phi k^x + \partial_y \phi k^y)}_{\simeq \partial_x \phi k^x} k^y \simeq -2(k^x)^2 \partial_y \phi$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dk^y}{d\lambda} \simeq -2(k^x)^2 \partial_y \phi} \qquad \boxed{\text{Obs}/\ \mathcal{O}(\partial_x \phi) \simeq \mathcal{O}(\partial_y \phi)}$$

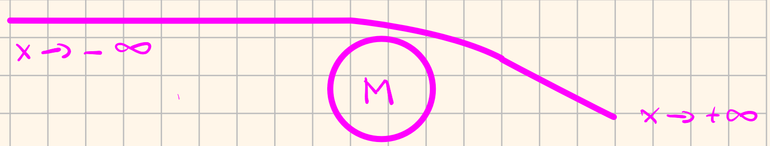
Tenemos que resolver $(**)$ al igual que en el problema anterior nos va a convenir hallar la ecuación de la trayectoria, es decir, hallar y(x)

$$\frac{dk^y}{dx} = \frac{d\lambda}{d\lambda}\frac{dk^y}{dx} = \frac{\frac{dk^y}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{-2(k^x)^2 \partial_y \phi}{k^x} = -2k^x \partial_y \phi = -\frac{2k^x GMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\phi = -GM/\sqrt{x^2+y^2}$$

También podemos aproximar y=b en toda la trayectoria (deflexión pequeña)

$$\Rightarrow \frac{dk^y}{dx} = -\frac{2k^x GMb}{(x^2+b^2)^{3/2}}$$



Asumiendo que muy lejos de la fuente $x \sim -\infty$ la trayectoria es la misma que en espacio plano, es decir, $k^y(x\sim -\infty) = 0$

$$\int_{k^y(-\infty)=0}^{k^y(x=+\infty)} dk^y = -2k^x GMb \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \boxed{-\frac{4GMk^x}{b} = k^y(x\sim+\infty)}$$

La deflexión se obtiene de $\tan(\Delta\varphi) = \left|\frac{k^y}{k^x}\right| = \boxed{\frac{4GM}{c^2 b} \simeq \Delta\varphi}$

Para el Sol: $M_\odot \simeq 2{,}00 \times 10^{30}\,\text{kg}, \quad b = R_\odot \simeq 6{,}96\times 10^8\,\text{m}, \quad G \simeq 6{,}67\times 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi \simeq 8{,}52\times 10^{-6}\,\text{rad} \simeq 1{,}75''} \qquad \text{Eddington 1919}$$