02/11 Clase 17: Guía 5 - Ondas Gravitatorias

Las ondas gravitatorias son perturbaciones del espacio-tiempo. Son soluciones a las ecuaciones de vacío linealizadas en torno a Minkowski (también se pueden estudiar ondas gravitacionales en torno a otros fondos curvos, en general geometrías maximamelmente simétricas: dS, AdS).

Como vieron en la clase del 26/10 al hacer una expansión $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

las expresiones de los símbolos de Levi-Civita, el tensor de Riemann, Ricci, etc a primer orden en h son $(h^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}$, $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu})$

$$\Gamma^{(lin)\,\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu})$$

$$R^{(lin)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma})$$

$$R^{(lin)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu})$$

$$R^{(lin)} = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h$$

$$G^{(lin)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu}\Box h\right)$$

$$G^{(lin)}_{\mu\nu} = 8\pi G T^{(lin)}_{\mu\nu}$$

Utilizando el tensor auxiliar

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \qquad \bar{h} = -h$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

y el gauge de Lorenz

$$T_\mu(h) = \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h = 0$$

$$T_\mu(\bar{h}) = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Las ecuaciones de campo se simplifican considerablemente

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \bar{h}_{\mu\nu} &= -16\pi G T_{\mu\nu} \\ T_\mu(\bar{h}) &= 0 \end{aligned}}$$

En vacío son simplemente

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad T_\mu(\bar{h}) = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Como $\Box = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ cualquier onda plana $e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}}$ con $\bar{k}\cdot\bar{k} = 0$ es solución

Problema 8

Podemos expresar una onda gravitatoria plana monocromática como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \underbrace{\bar{H}_{\mu\nu}}_{\text{const}} e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \qquad \bar{k}\cdot\bar{k} = 0$$

Qué nos dice la condición de gauge?

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = i k^\nu \bar{H}_{\mu\nu} e^{ik\cdot x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k^\nu \bar{H}_{\mu\nu} = 0}$$ onda transversa

Notemos que la condición de gauge se preserva frente a ciertas transformaciones

$$h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \; , \; h \mapsto h' = h + 2\partial_\rho \xi^\rho$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \mapsto \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho \xi_\rho \; , \; \bar{h} \to \bar{h}' = \bar{h} - 2\partial^\rho \xi_\rho \qquad (*)$$

donde $\xi^\rho(x)$ es un campo vectorial que puede interpretarse como un cambio de coordenadas infinitesimal $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$

Reemplacemos el cambio $(*)$ en la condición de gauge asuminedo que $T_\mu(\bar{h}) -$

$$T_\mu(\bar{h}') = \partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\nu \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho \xi_\rho\right)$$
$$= \partial_\mu \partial^\nu \xi_\nu + \Box \xi_\mu - \partial_\mu \partial^\rho \xi_\rho = \Box \xi_\mu = 0$$

Entonces hay una simetría de gauge "residual" en la teoría linealizada ante cambios

$$\bar{h}_{\mu\nu} \mapsto \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho \xi_\rho \quad \text{con} \quad \Box \xi^\mu = 0$$

Entonces cuantas condiciones tenemos que nos restringen las componentes independientes de $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\left.\begin{array}{ll} T_\mu(\bar{h}) = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 & \rightsquigarrow \# T_\mu = n = 4 \\ \Box \xi^\mu = 0 & \rightsquigarrow \# \xi^\mu = n = 4 \\ \text{\# componentes independientes de } \bar{h}_{\mu\nu} & = n(n+1)/2 = 10 \end{array}\right\} \; 10 - 4 - 4 = 2$$

La onda gravitatoria tiene dos polarizaciones posibles.

Ahora veamos como podemos usar esto para fijar el gauge transverse-traceless (TT). Para hacerlo más sencillo consideremos una onda que se propaga en la dirección z, entonces

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^z) = (\omega, 0, 0, \omega), \quad \bar{k}\cdot\bar{k} = 0$$

Podemos elegir

$$\xi_\mu = \underbrace{C_\mu}_{\text{const}} e^{i\omega(z-t)}$$

entonces

$$\bar{H}_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{H}'_{\mu\nu} = \bar{H}_{\mu\nu} + i\left(k_\mu c_\nu + k_\nu c_\nu - \eta_{\mu\nu} k^\rho c_\rho\right)$$

$$\bar{H} \longrightarrow \bar{H}' = \bar{H} - i2\, k^\rho c_\rho$$

podemos elegir los C_μ de modo tal de fijar $\bar{H}'_{0\mu} = 0 \quad \forall \mu$

Son cuatro condiciones y cuatro incógnitas $\checkmark$

- $\boxed{k^\nu \bar{H}'_{\mu\nu} = 0} \Rightarrow k^0 \bar{H}'_{\mu 0} + k^3 \bar{H}'_{\mu 3} = 0 \Rightarrow -\bar{H}'_{\mu 3} = \bar{H}'_{\mu 0}$
- $\bar{H}'_{00} = 0 \Rightarrow 0 = \bar{H}_{00} + i\left(2k_0 c_0 - \eta_{00}(k^0 c_0 + k^3 c_3)\right)$

$$0 = \bar{H}_{00} - i(k^0 c_0 - k^3 c_3) = \bar{H}_{00} - i\omega\,\underline{(c_0 - c_3)} = 0$$

- $\bar{H}'_{10} = 0 \Rightarrow 0 = \bar{H}_{10} + i k_0 c_1$ ✓
- $\bar{H}'_{20} = 0 \Rightarrow 0 = \bar{H}_{20} + i k_0 c_2$ ✓
- $\bar{H}'_{30} = 0 \Rightarrow 0 = \bar{H}_{30} + i(k_3 c_0 + k_0 c_3) = \bar{H}_{30} + i\omega\,\underline{(c_0 - c_3)}$
- $\bar{H}' = 0 \Rightarrow 0 = \bar{H} - i2(k^0 c_0 + k^3 c_3) = \bar{H} - i2\omega\,\underline{(c_0 + c_3)}$

El resto de las componentes se pueden obtener evaluando $\bar{H}'_{\mu 3} = \bar{H}'_{\mu 0}$ para distintos valores de μ

El tensor de polarización queda

$$\bar{H}'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ 0 & H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{H} = 0, \quad \bar{H}_{\mu\nu} = \bar{H}_{\nu\mu}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{H}'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_\times & 0 \\ 0 & H_\times & -H_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

De acá en adelante me olvido de la prima ya que siempre puedo llevar el tensor de polarización a la forma que tiene en el gauge TT.

Problema 9

Acá nos piden ver efectos medibles del paso de una onda gravitatoria.

Consideremos una onda gravitatoria en el gauge TT que se propaga en la dirección z y una partícula libremente gravitante inicialmente en reposo:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \,, \qquad U^\mu\Big|_0 = \frac{dx^\mu}{d\tau}\Big|_0 = (1,0,0,0)$$

La ecuación de la geodésica

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta$$

se reduce a

$$\frac{dU^\mu}{d\tau}\Big|_0 = -\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\left(2\partial_0 h_{\alpha 0} - \partial_\alpha h_{00}\right) \overset{TT}{=} 0$$

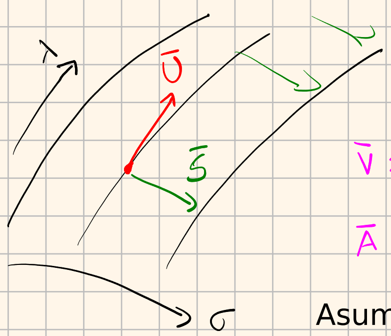
entonces una partícula que inicialmente está en reposo mantiene ese estado ya que no experimenta aceleraciones.

Esto quiere decir que las coordenadas de dicha partícula no cambian

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = 0 \Rightarrow U^\mu = const = (1,0,0,0) \Rightarrow 0 = U^i = \frac{dx^i}{d\tau} \Rightarrow x^i = const$$

Esto no nos dice nada acerca del paso de la onda.

Para ver mejor qué representa el paso de una onda tenemos que considerar más de una partícula. Vamos a utilizar la expresión de la desviación geodésica (ver Carroll Sec 3.10)



$\bar U$ es el vector tangente de una familia de geodésicas

$\bar S$ es el vector "separación" entre geodésicas

$\bar V = \nabla_{\bar U}\bar S$ representa la "velocidad relativa" entre geodésicas

$\bar A = \nabla_{\bar U}\bar V$ representa la "aceleración relativa" entre geodésicas

Asumimos que $[\bar S, \bar T] = 0$ es decir, $\bar S, \bar T$ son vectores base de una carta de coordenadas

$$\Rightarrow \quad A^\mu = \left(\nabla_{\bar U}\nabla_{\bar U}\bar S\right)^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}U^\nu U^\rho S^\sigma$$

Para el caso $\bar U = d/d\tau$ tenemos que

$$\boxed{\frac{d^2 S^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}U^\nu U^\rho S^\sigma}$$

Como estamos en la aproximación linealizada el tensor de Riemann ya es de orden 1 en h, entonces, del lado derecho basta con quedarnos a orden cero en $U^\mu = (1,0,0,0)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 S^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{00\sigma} S^\sigma$$

Evaluando en las expresiones del tensor de Riemann linealizado del principio de la clase tenemos que

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_0\partial_0 h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu \underbrace{h_{00}}_{=0} - \partial_\sigma\partial_0 \underbrace{h_{\mu 0}}_{=0} - \partial_0\partial_\mu \underbrace{h_{0\sigma}}_{=0}\right) = \frac{1}{2}\partial_0^2 h_{\mu\sigma}$$

en TT

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 S^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{00\sigma} S^\sigma$$

Del lado izquierdo tmb es suficiente con quedarnos a orden cero en la derivada si consideramos párticulas que se mueven lentamente $\tau = t$

$$\frac{d^2 S^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2} S^\sigma \partial_t^2 h^\mu{}_\sigma$$

solo nos resta evaluar $\partial_t^2 h^\mu{}_\sigma$ para una onda gravitatoria, por ejemplo, para la polarización +

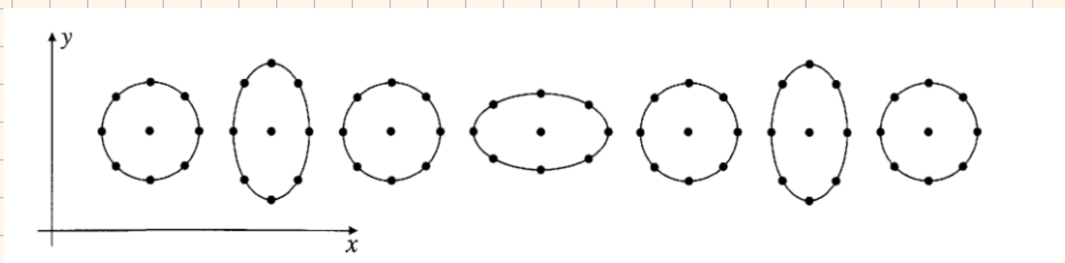
$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} e^{ik(z-t)} , \quad H_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & H_+ & & \\ & & -H_+ & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

las únicas componentes que cambian de S^μ son μ=1,2

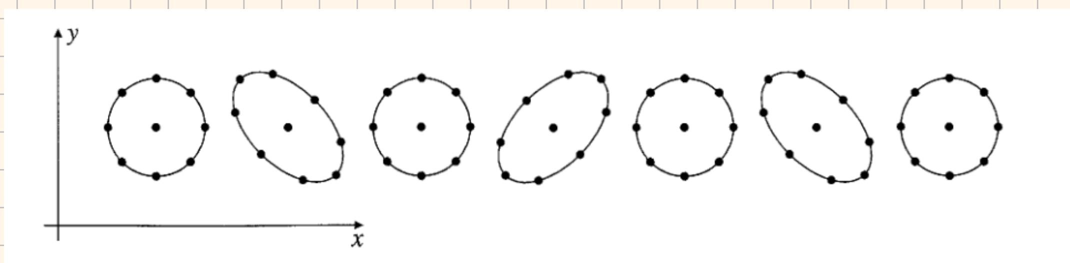
$$\frac{\partial^2 S^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} S^x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(h_+ e^{ik(z-t)}\right) , \quad \frac{\partial^2 S^y}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(h_+ e^{ik(z-t)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} S^x(t) &= S^x(t=0)\left(1 + \frac{1}{2} H_+ e^{ik(z-t)}\right) \\ S^y(t) &= S^y(t=0)\left(1 - \frac{1}{2} H_+ e^{ik(z-t)}\right) \end{aligned}}$$

Pol +

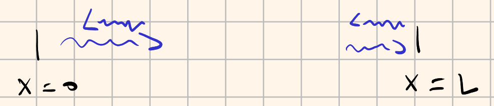


Pol X



El punto b) del problema nos da una idea de cómo detecta un interferómetro tipo LIGO el paso de una ona gravitatoria.

Consideremos como antes una onda gravitatoria de polarización + propagándose en la dirección z y un haz de luz viajando en la dirección x.



El intervalo para una onda + es

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + h_+(z-t)\right) dx^2 + \left(1 - h_+(z-t)\right) dy^2 + dz^2$$

para un fotón $ds^2=0$ y si viaja en la dirección x entonces $dy=dz=0$

$$\Rightarrow \quad dt = \sqrt{1+h_+}\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{\sqrt{1+h_+(t)}} = dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{t_{ida}} \frac{dt}{\sqrt{1+h_+(t)}} = L \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t_{iv}} \frac{dt}{\sqrt{1+h_+(t)}} = 2L$$

A t=T se emite otro fotón que vuelve al punto de partida en t=T'+tiv

$$\Rightarrow \quad \int_T^{T'+t_{iv}} \frac{dt}{\sqrt{1+h_+}} = 2L$$

Restando ambas integrales

$$0 = \underbrace{\int_T^{T'+t_{iv}}}_{\int_T^{t_{iv}} + \int_{t_{iv}}^{t_{iv}+T'}} \frac{dt}{\sqrt{1+h_+(t)}} - \underbrace{\int_0^{t_{iv}}}_{\int_0^{T} + \int_T^{t_{iv}}} \frac{dt}{\sqrt{1+h_+}} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_{iv}}^{T'+t_{iv}} \frac{dt}{\sqrt{1+h_+}} = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1+h_+}}$$

Asumiendo que T, T' « $1/\nu_{gw}$ entonces h+ se mantien prácticamente constante mientras pasa la onda

$$\Rightarrow \quad \frac{T'}{\sqrt{1+h_+(t_{iv})}} \simeq \frac{T}{\sqrt{1+h_+(0)}} , \quad \nu = \frac{1}{T} , \quad \nu' = \frac{1}{T'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T}{T'} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sqrt{1+h_+(0)}}{\sqrt{1+h_+(t_{iv})}} \simeq 1 + \frac{1}{2} h_+(0) - \frac{1}{2} h_+(t_{iv}) \simeq \frac{\nu'}{\nu}$$

Recordemos que h«1, entonces podemos aproximar el tiempo de viaje como el tiempo calculado en espacio plano $t_{iv} = \frac{2L}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\nu'}{\nu} = 1 + \frac{1}{2}\left(h_+(0) - h_+(2L)\right)}$$

El resultado anterior aplica para un fotón viajando en la dirección x. El interferómetro posee dos brazos perpendiculares entre si, entonces, considerando además un fotón que viaja en la dirección y

$$\frac{\nu'_x}{\nu} = 1 + \frac{1}{2}\left(h_+(0) - h_+(2L)\right) \quad , \quad \frac{\nu'_y}{\nu} = 1 - \frac{1}{2}\left(h_+(0) - h_+(2L)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\nu'_x - \nu'_y}{\nu} = h_+(0) - h_+(2L) = \boxed{H_+ \sin(2\omega L) = \frac{\Delta\nu'}{\nu}}$$

↳ frec de emisión

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda_{gw}}$$