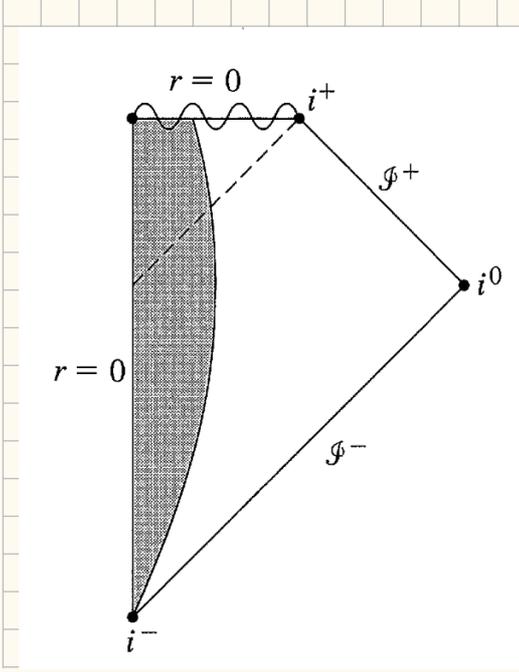
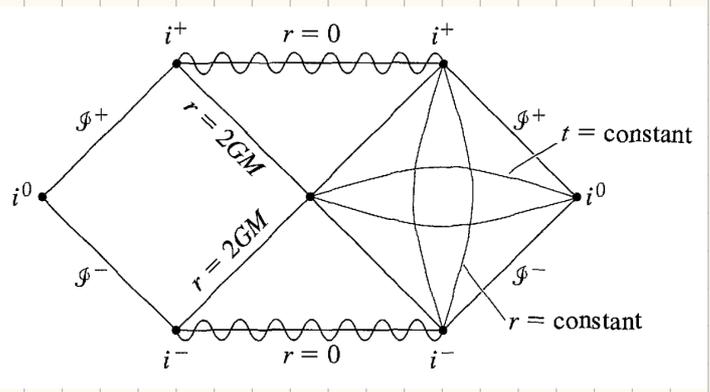
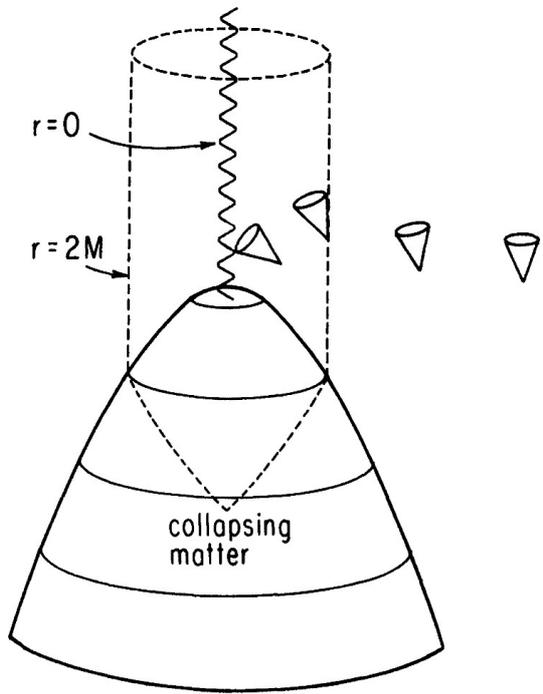
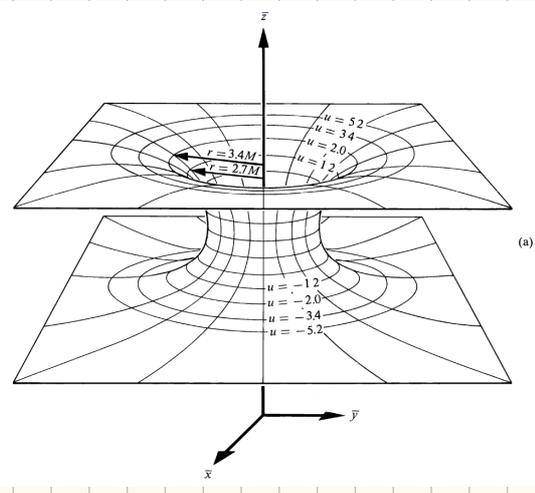
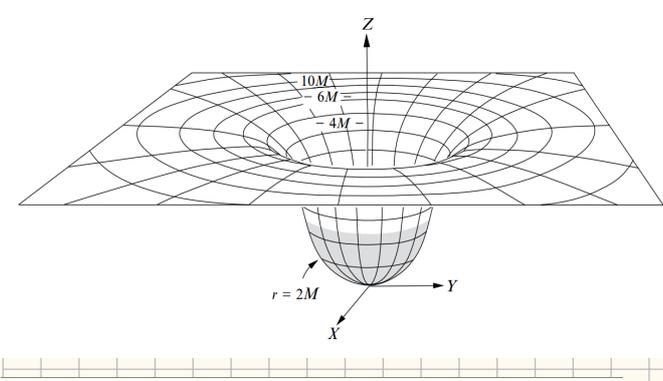


Clase 20: Guía 6 - Solución Interior y Extensión de Kruskal

En esta clase vamos a ver los problemas 10 y 12 de la guía.
 El problema 12 arranca en la página 2 y el problema 10 en la página 7 (una segunda manera de encarar la extensión en la página 15).



Handwritten notes on a blackboard. On the left, a Penrose diagram is shown with labels: SINGULARIDAD (top), HORIZONTE (middle), ESTRELLA (bottom left), INFINITO FUTURO (top right), and INFINITO PASADO (bottom right). The diagram shows a shaded region representing the interior of the Schwarzschild solution. On the right, the following equations are written:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = 0$$

$$\varphi = \sum_j (a_j f_j + a_j^* f_j^*) = \sum_j (b_j F_j + b_j^* F_j^*)$$

$$\langle N_h \rangle = \omega \langle 0 | b_h^\dagger b_h | 0 \rangle_\omega = \sum_j |\beta_{jh}|^2$$

$$a_j = \sum_h (\alpha_{jh}^* b_h - \beta_{jh} b_h^\dagger)$$

$$[\dots]$$

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{T}} - 1}, \quad T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}$$

Problema 12: solución interior

(refs: Carroll Sec 5.8 pág 229)

La métrica de Schwarzschild es ($c=1, G=1$)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

donde M es una constante de integración en principio arbitraria.

Aproximación de campo débil

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad h_{\mu\nu} = -2\phi \delta_{\mu\nu}$$

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + (1 - 2\phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad |\phi| \ll 1, \quad \partial_t \phi = 0 \quad (2)$$

Materia no relativista

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad U^i \approx 0, \quad P \approx 0$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} \approx \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \quad (3)$$

Utilizando las ecuaciones de Einstein para (1) y (2) logramos reproducir la ecuación de Poisson para el potencial newtoniano

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho, \quad \phi = -\frac{GM}{r}, \quad M = \int d^3r \rho$$

El link final viene de hacer una aproximación de campo débil en (1) y obtener (2). Esto lo vieron con Federico en la clase del 04/11 (Problema 3).

Sabemos que la métrica de Schwarzschild (1) es una solución de vacío y describe bien la geometría fuera de un objeto esférico, por ejemplo, para el exterior de una estrella. La solución en el interior es distinta ya que $T_{\mu\nu} \neq 0$ otro indicio a favor de la interpretación de M como la masa de dicha distribución vendría del empalme entre la solución interior con $T_{\mu\nu} \neq 0$ y la métrica de Schwarzschild.

No vamos a hacer la cuenta en detalle (es larga y tediosa) pero vamos a ver algunos puntos importantes.

Consideremos un fluido perfecto estático y esféricamente simétrico

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad U_\mu U^\mu = -1, \quad U^t = 1, \quad U^i = 0$$
$$\rho = \rho(r), \quad P = P(r) \quad U_t = \sqrt{|g_{tt}|} \delta_\mu^t$$

Va a resultar conveniente escribir el ansatz para la métrica de simetría esférica del siguiente modo (facilita las cuentas)

$$ds^2 = - e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

donde $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son funciones arbitrarias de r .

Volviendo al problema

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

El tensor de energía-momento nos queda

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha} \rho & & & \\ & e^{2\beta} p & & \\ & & r^2 p & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta p \end{pmatrix}$$

Ahora hay que calcular los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y finalmente el tensor de Einstein (horror). Les dejo los resultados por si algún o alguna valiente desea emprender semejante tarea:

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{tr}^t = \alpha', \quad \Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \alpha', \quad \Gamma_{rr}^r = \beta', \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\beta}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta$$
$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Tensor de Ricci

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} (\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + 2/r \alpha')$$
$$R_{rr} = -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha' \beta' + 2/r \beta'$$
$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r(\beta' - \alpha') - 1] + 1, \quad R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

Escalar de Ricci

$$R = -2 e^{-2\beta} \left[\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + \frac{2}{r} (\alpha' - \beta') + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right]$$

Tensor de Einstein

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(\alpha-\beta)} (2r \beta' - 1 + e^{2\beta})$$
$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (2r \alpha' + 1 - e^{2\beta})$$
$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\beta} \left[\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + \frac{1}{r} (\alpha' - \beta') \right], \quad G_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}$$

Si estamos en vacío $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} 4R = -R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$

Sin embargo, la expresión para G_{tt} es más sencilla

$$0 = e^{-2\beta} (2r \beta' - 1 + e^{2\beta}) = e^{-2\beta} (2r \beta' - 1) + 1 = -\partial_r (r e^{-2\beta}) + 1$$
$$\Rightarrow \partial_r (r e^{-2\beta}) = 1 \Rightarrow e^{-2\beta} = 1 - \frac{\text{const}}{r} \quad (\text{Schw})$$

Obs: esta parte del cálculo es similar a un tramo del teorema de Birkhoff, ver Carroll Sec 5.2 pág 203

Si $\rho \neq 0$ tenemos que $G_{tt} = 8\pi G T_{tt}$

$$\frac{1}{r^2} e^{2(\alpha-\beta)} (2r\beta' - 1 + e^{2\beta}) = 8\pi G e^{2\alpha} \rho \Rightarrow \partial_r (r e^{-2\beta}) = 1 - 8\pi G \rho r^2$$

Inspirados por el caso vacío proponemos $e^{-2\beta} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}$

$$\Rightarrow r e^{-2\beta} = r - 2Gm(r) \Rightarrow \partial_r (r e^{-2\beta}) = 1 - 2Gm' = 1 - 8\pi G \rho r^2$$

$$\Rightarrow m'(r) = 4\pi \rho(r) \Rightarrow m(r) = 4\pi \int \rho(r') r'^2 dr'$$

Si la estrella tiene radio R_\odot

$$M = m(R_\odot) = 4\pi \int_0^{R_\odot} \rho(r') r'^2 dr' = \int_0^{R_\odot} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$$

Es M la energía/masa de la estrella? Notemos que la medida de integración es la de espacio plano. La medida de integración viene dada por el determinante de la métrica inducida a $t=\text{const}$ (el volumen propio)

$$d\Sigma|_{t=\text{const}} = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \Rightarrow \sqrt{g_\Sigma} = e^\beta r^2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \int_0^{R_\odot} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r') r'^2 \sin\theta'}{\sqrt{1 - \frac{2Gm(r')}{r}}} dr' d\theta' d\varphi' > M$$

La diferencia entre \bar{M} y M es la energía de ligadura (binding energy), es decir, la energía que debemos entregar al sistema para desarmarlo

$$E_B = \bar{M} - M$$

Ahora "solo" resta resolver el resto de las ecuaciones. Les dejo los resultados

De la ecuación (r,r) se obtiene

$$\alpha'(r) = \frac{4\pi G r^3 P(r) + Gm(r)}{r [r - 2Gm(r)]}$$

En vez de resolver la ecuación para (θ,θ) es más sencillo utilizar la conservación de $T_{\mu\nu} \sim T^{\mu\nu}_{; \nu} = 0$

$$P'(r) = - \left[P(r) + \rho(r) \right] \frac{[4\pi G r^3 P(r) + Gm(r)]}{r [r - 2Gm(r)]}$$

Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV)

El modelo más sencillo (aunque no muy realista) es asumir $\rho = \text{const}$

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R_\odot \\ 0 & r > R_\odot \end{cases} \quad m(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 & r < R_\odot \\ \frac{4\pi}{3} R_\odot^3 \rho_0 = M & r > R_\odot \end{cases}$$

Muchas cuentas...

$$P(r) = (5.158) \quad \text{Carroll}$$

$$e^{\alpha(r)} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2GM}{R_\odot} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM r^2}{R_\odot^3} \right)^{1/2}, \quad r < R_\odot$$

Esta expresión se pega suavemente con la solución exterior

$$e^{\alpha(r)} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad r > R_\odot \quad \checkmark$$

Problema 10: Estructura causal de Schwarzschild y extensión maximal

(refs: Wald Sec 6.4 pág 148)

Carta de Schwarzschild ($c=1, G=1$)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Claramente hay problemas en $r=2M$ y $r=0$. Hay dos posibilidades: i) es una singularidad de la geometría (no hay nada que hacer); ó ii) es un problema de la carta utilizada que falla en describir esa región.

Veremos que $r=2M$ es el caso ii): hallaremos una carta que cubre una región mayor de la geometría donde $r=2M$ no presenta problemas.

En $r=0$ hay una singularidad geométrica, corresponde al caso (i): un invariante de curvatura diverge. El escalar de Kretschmann

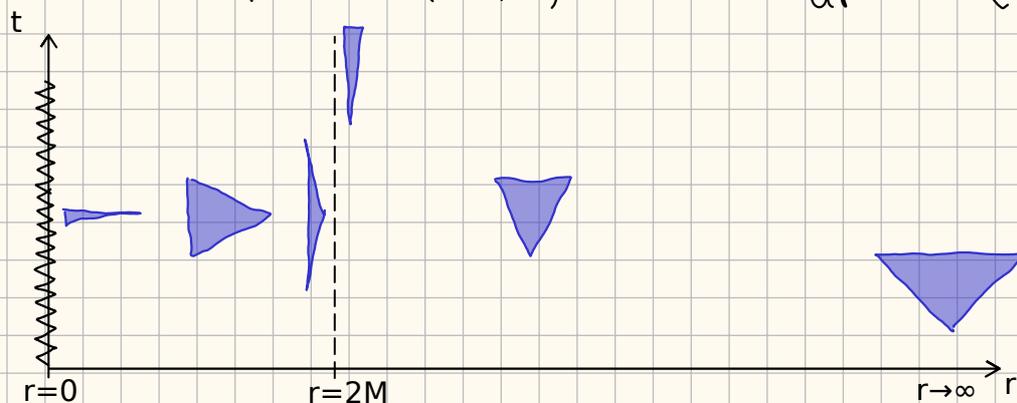
$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48 G^2 M^2 / c^4 r^6$$

Además nos gustaría que en dicha carta los conos de luz no colapsen. Lo ideal sería que sean rectas a 45° . La carta de Kruskal logra esto y cubre toda la geometría.

Rayos de luz radiales ($d\theta=d\phi=0$): conos de luz en el plano t - r

Observación: de ahora en adelante solamente nos vamos a ocupar de la parte t - r de la métrica. Siempre vamos a considerar rayos de luz radiales.

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \Leftrightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$



Objetivo: hallar una nueva carta que represente una extensión de la región espacio-temporal original. Esto equivale a hallar un nuevo espacio-tiempo (M', g') no singular que incluya al espacio-tiempo original (M, g) .

Comencemos viendo un ejemplo simple donde una mala elección de la carta da lugar a una singularidad en una componente de la métrica.

$$ds^2 = - \frac{1}{t^4} dt^2 + dx^2$$

los rangos de las coordenadas son $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$. La métrica de arriba parece tener un problema en $t=0$. Pero podemos ver a ojo que si hacemos un cambio de coordenadas $t \rightarrow t' = 1/t$ resolvemos el problema

$$dt' = -1/t^2 dt \Rightarrow ds^2 = - dt'^2 + dx^2$$

Pasemos ahora a un ejemplo menos obvio que va a resultar útil para nuestro objetivo que es abordar la métrica de Schwarzschild.

Consideremos ahora el espacio-tiempo de Rindler (recordar Problema 2 de la Guía 2)

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 \quad (10.1)$$

los rangos de las coordenadas son $-\infty < t < \infty$, $0 < x < \infty$. En este caso el problema está en $x=0$ dado que en ese punto el determinante se hace cero lo que indica un problema en la métrica inversa (diverge en $x=0$).

En general no hay un método infalible para solucionar este tipo de problemas y poder revelar que la aparente singularidad es sólo una mala elección de la carta pero en dos dimensiones se puede introducir dos "familias" de geodésicas nulas representando rayos de luz "entrantes" y "salientes". Esto invita a utilizar coordenadas nulas adaptadas a esos rayos de luz lo que también nos va a dar información sobre la estructura causal de la geometría.

La condición de normalización de las geodésicas nulas en Rindler es

$$0 = g(d/d\lambda, d/d\lambda) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -x^2 \dot{t}^2 + \dot{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{t}^2}{\dot{x}^2} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{x} \Rightarrow t = \pm \ln x + \text{const} \quad (10.2)$$

"+" para geodésicas nulas salientes (viajan hacia la derecha)
 "-" para geodésicas nulas entrantes (viajan hacia la izquierda)

Definiendo coordenadas nulas (U,V)

$$U \equiv t - \ln x \Rightarrow U = \text{const} \quad \text{geodésicas salientes} \quad (10.3)$$

$$V \equiv t + \ln x \Rightarrow V = \text{const} \quad \text{geodésicas entrantes}$$

$$t = \frac{U+V}{2}, \quad x = e^{(V-U)/2}$$

La métrica (10.1) en coordenadas (U,V) queda

$$dt = \frac{1}{2}(dU + dV), \quad dx = \frac{1}{2}e^{(V-U)/2}(dV - dU)$$

$$\Rightarrow ds^2 = -e^{V-U} dU dV \quad (10.4)$$

Para $-\infty < t < \infty$, $0 < x < \infty$, los rangos de las nuevas coordenadas son $-\infty < U < \infty$, $-\infty < V < \infty$ así que por el momento aún no hemos logrado "extender" la región del espacio-tiempo cubierta por el cambio de carta.

Pero notemos que podemos reparametrizar las geodésicas nulas con nuevas coordenadas $u=u(U)$ y $v=v(V)$. Para ello lo más sencillo es recurrir a la cantidad conservada asociada al vector de Killing ∂_t de (10.1)

$$E \equiv -g(\partial_t, d/d\lambda) = -g_{\mu\nu} \delta_t^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = x^2 \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \quad (10.5)$$

$$\Rightarrow d\lambda = \frac{x^2(u,v)}{E} dt(u,v) \quad (10.6)$$

Para empezar consideremos los rayos de luz salientes $U=\text{const}$ y obtengamos y obtengamos el parámetro afín λ reemplazando el cambio de coordenadas (10.3) en (10.5) e integrando

$$\Rightarrow \lambda_{\text{out}} = \frac{1}{2E} \int e^{V-U} dV = \left(\frac{e^{-U}}{2E} \right) e^V + \text{const} = \lambda_{\text{out}} \quad (10.7a)$$

Haciendo lo mismo para los rayos de luz entrantes $V=\text{const}$ se tiene que

$$\lambda_{\text{in}} = \left(\frac{e^V}{2E} \right) (-e^{-U}) + \text{const} \quad (10.7b)$$

Si definimos las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} u &\equiv -e^{-U} = \lambda_{\text{in}} \\ v &\equiv e^V = \lambda_{\text{out}} \end{aligned} \quad (10.8)$$

la métrica queda

$$ds^2 = -du dv \quad (10.9)$$

Para el rango original de las coordenadas $-\infty < t < \infty$, $0 < x < \infty \rightarrow -\infty < U < \infty$, $-\infty < V < \infty$ solo cubre el rango $-\infty < u < 0$ y $0 < v < \infty$, pero viendo (10.9) notamos que nada nos impide extender las nuevas coordenadas (u,v) a todo el plano \mathbb{R}^2 sin encontrar ninguna singularidad.

Un último cambio de coordenadas para dejar (10.9) de una forma mucho más familiar

$$T \equiv \frac{v+u}{2}, \quad X \equiv \frac{v-u}{2}, \quad v = T+X, \quad u = T-X \quad (10.10)$$

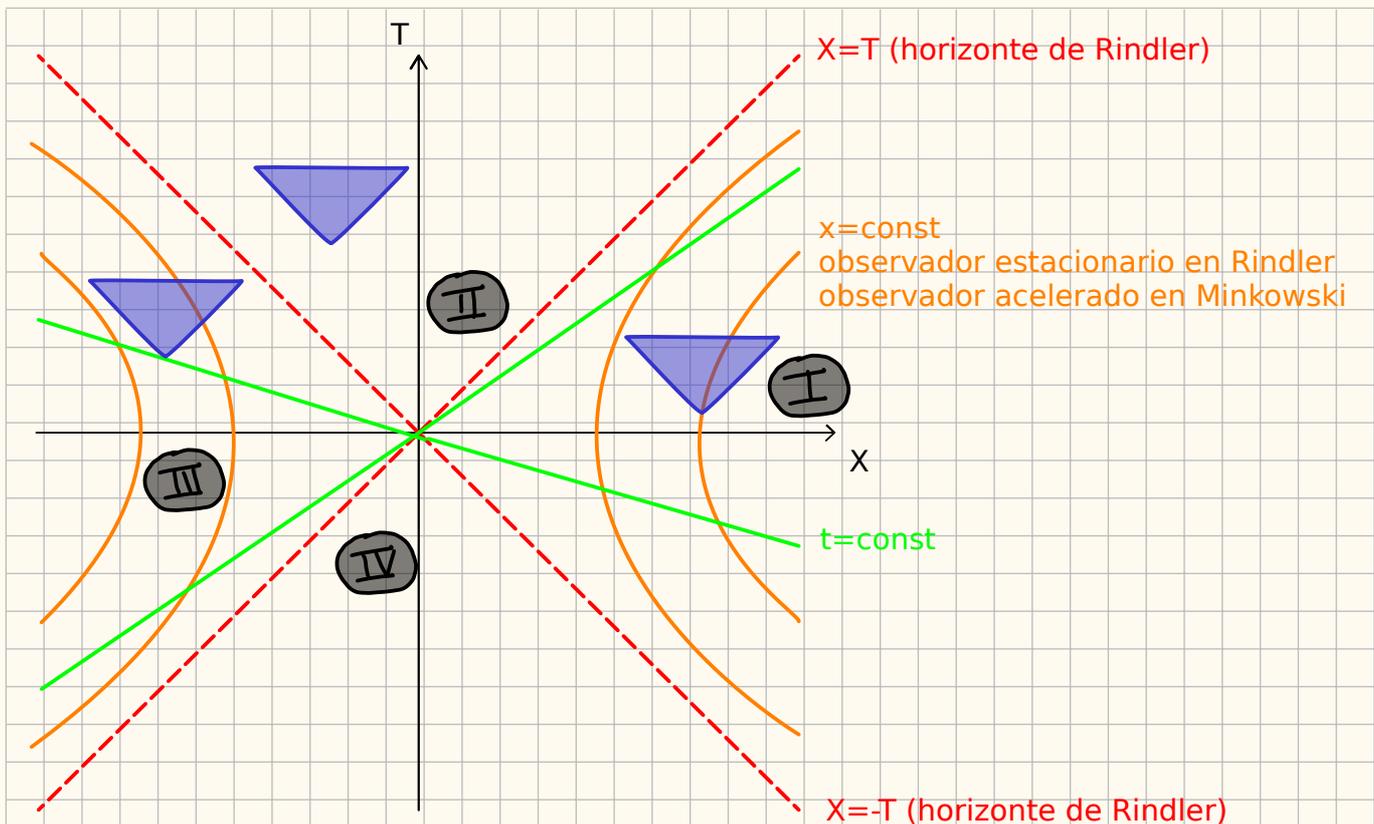
$$\Rightarrow ds^2 = -dT^2 + dX^2 \quad (10.11)$$

Reconstruyendo todos los cambios de coordenadas tenemos que

$$\begin{aligned} X^2 - T^2 &= x^2 \\ T/X &= \tanh(t) \end{aligned} \quad (10.12)$$

De (10.12) podemos ver que la región cubierta por la carta de Rindler es únicamente la caña $X > |T| \rightsquigarrow 0 < x = (X^2 - T^2)^{1/2}$ (recordar Problema 2 de la Guía 2)

De (10.12) también podemos ver que las curvas de $x=\text{const}$ (observadores estacionarios en la carta de Rindler) son hipérbolas en la carta de Minkowski (observadores acelerados) y las curvas $t=\text{const}$ son rectas que cortan el origen.



Ahora sí vamos a atacar el tema de la métrica de Schwarzschild concentrándonos únicamente en la parte (t, r)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (10.13)$$

Como en el caso de Rindler vamos a concentrarnos en la geodésicas radiales nulas

$$0 = g(d/d\lambda, d/d\lambda) = g_{tt} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2$$

$$\frac{\dot{t}^2}{\dot{r}^2} = \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \Rightarrow \left(\frac{dt}{dr}\right) = \pm \left(\frac{r}{r-2M}\right) \quad (10.14)$$

La solución a (10.14) queda mejor expresada en términos de la llamada coordenada "tortuga" r^* (acá el * es simplemente una notación, no es un pullback ni nada)

$$t = \pm r^* + const, \quad r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (10.15)$$

Notemos que el horizonte de eventos $r=2M$ es "empujado" infinitamente lejos en la coordenada r^* :

$$r^*(r=2M) = -\infty$$

Si bien extendimos el rango de las coordenadas de $2M < r < \infty$ a $-\infty < r^* < \infty$ aún no estamos cubriendo una región más extensa del espacio-tiempo.

Como en el caso de Rindler, análogamente a (10.3) podemos definir unas coordenadas adaptadas a los rayos de luz

$$\begin{aligned} U &\equiv t - r^* \Rightarrow U = \text{const} && \text{geodésicas salientes} \\ V &\equiv t + r^* \Rightarrow V = \text{const} && \text{geodésicas entrantes} \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$t = \frac{V+U}{2}, \quad r^* = \frac{V-U}{2}$$

Escribiendo los diferenciales dU y dV y la relación (10.15) entre r y r^*

$$dU = dt - dr^* = dt - \frac{dr^*}{dr} dr = dt - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr$$

$$dV = dt + dr^* = dt + \frac{dr^*}{dr} dr = dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr$$

la métrica de Schwarzschild ahora se lee

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV dU \quad (10.17)$$

Antes de seguir vale la pena detenerse un poco y analizar algunas cartas "intermedias" como (V, r, θ, ϕ) denominada coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes. En esta carta el intervalo queda

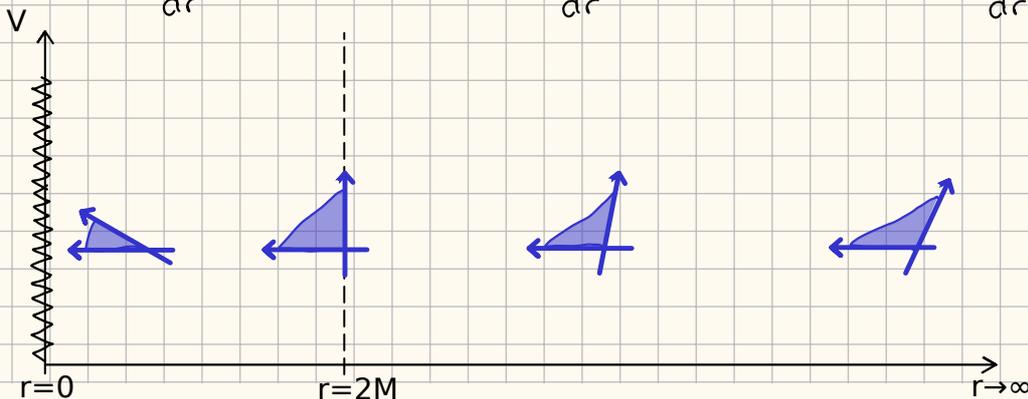
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2 dV dr + r^2 d\Omega^2$$

donde las geodésicas nulas $ds^2=0$ cumplen

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 = 2 dV dr \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} dV = 0 \rightsquigarrow V = \text{const} & \text{rayos entrantes} \\ \frac{dV}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & \text{rayos salientes} \end{cases}$$

Consideremos algunos casos particulares

$$\blacktriangleright r \rightarrow \infty \quad \frac{dV}{dr} = 2 \quad \blacktriangleright r = 2M \quad \frac{dV}{dr} = \infty \quad \blacktriangleright r \rightarrow 0 \quad \frac{dV}{dr} = 0$$



Para poder ver mejor los conos de luz y seguir la trayectoria de una partícula masiva es conveniente introducir una nueva coordenada temporal \tilde{t}

$$V = t + r^* \equiv \tilde{t} + r \Rightarrow \tilde{t} = t + r^* - r = t + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2$$

el intervalo puede ser reescrito de una manera más conveniente

$$ds^2 = (d\tilde{t} + dr) \left\{ - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\tilde{t} + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr \right\}$$

En estas coordenadas los rayos de luz cumplen

$$d\tilde{t} + dr = 0$$

$$\text{ó} \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\tilde{t} = \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr$$

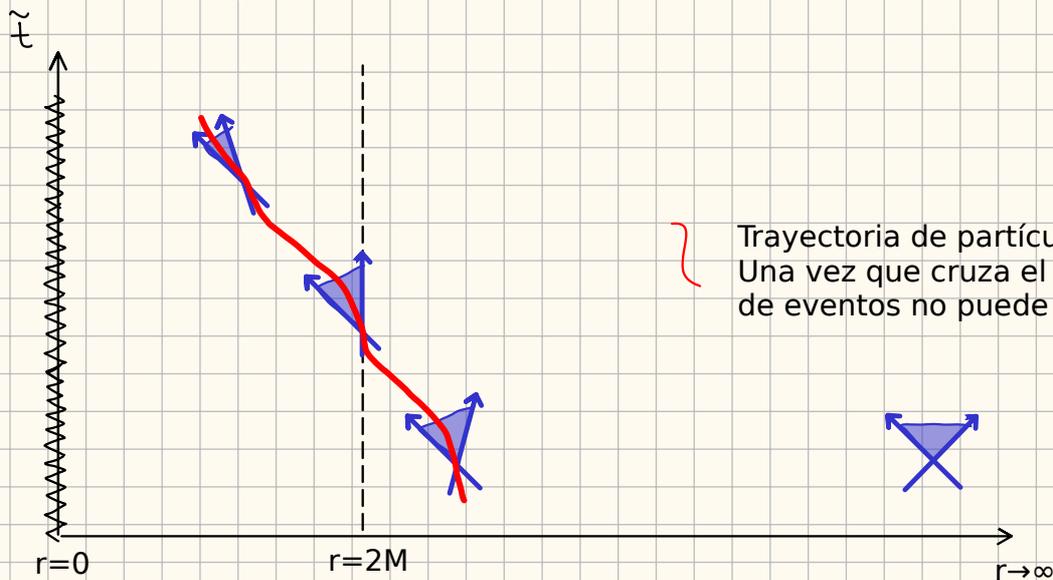
$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = -1$$

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{1 + 2M/r}{1 - 2M/r} > 0 \quad \forall r > 2M$$

rayos entrantes

Algunos casos particulares

$$\blacktriangleright r \rightarrow \infty \quad \frac{d\tilde{t}}{dr} = +1 \quad \blacktriangleright r = 2M \quad \frac{d\tilde{t}}{dr} = \infty \quad \blacktriangleright r = 0 \quad \frac{d\tilde{t}}{dr} = -1$$



Volviendo a la extensión de Kruskal, habíamos llegado a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dV dU \quad (10.17)$$

recordando la definición de r^* podemos reescribir el factor conforme como

$$\frac{V-U}{2} = r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{r}{2M} - 1 \right)}_{= \frac{r}{2M} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} = e^{-r/2M} e^{(V-U)/4M}$$

$$\Rightarrow ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M} dv du, \quad r = r(v, u)$$

Como $V=t+r^*$ y $U=t-r^*$ todavía no logramos extender la región del espacio-tiempo cubierta por los cambios de coordenadas realizados.

Inspirado en el caso de Rindler haremos un cambio de coordenadas similar a (10.8)

$$u \equiv -e^{-u/4M}, \quad v \equiv e^{v/4M} \quad (10.18)$$

De (10.18) podemos notar que la región original (la solución exterior de Schwarzschild) sólo cubre el rango $-\infty < u < 0$ y $0 < v < \infty$ de las nuevas coordenadas (v, u) así que ya casi estamos

$$du = \frac{1}{4M} e^{-u/4M} du = -\frac{u}{4M} du, \quad dv = \frac{1}{4M} e^{v/4M} dv = \frac{v}{4M} dv$$

$$\Rightarrow ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dv du \quad (10.19)$$

Ya la métrica (10.19) es la extensión maximal considerando los rangos de las coordenadas (v, u) en todo el plano \mathbb{R}^2 pero como antes vamos a pasar a coordenadas (T, X) en vez de utilizar coordenadas nulas

$$T \equiv \frac{v+u}{2}, \quad X \equiv \frac{v-u}{2}, \quad v = T+X, \quad u = T-X \quad (10.20)$$

FINALMENTE, la geometría de Schwarzschild en la carta de Kruskal-Szekeres es

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad r = r(T, X) \quad (10.21)$$

Carta maximal de Kruskal-Szekeres

La métrica 2D para las superficies de $\theta = \text{const}$, $\phi = \text{const}$ es conforme a la plana, por lo tanto los conos de luz están formados por rectas a 45° en todo el espacio.

Análisis de curvas de $t = \text{const}$ y $r = \text{const}$ en el diagrama de Kruskal

La relación entre las coordenadas viejas (t, r) y las nuevas (T, X) es

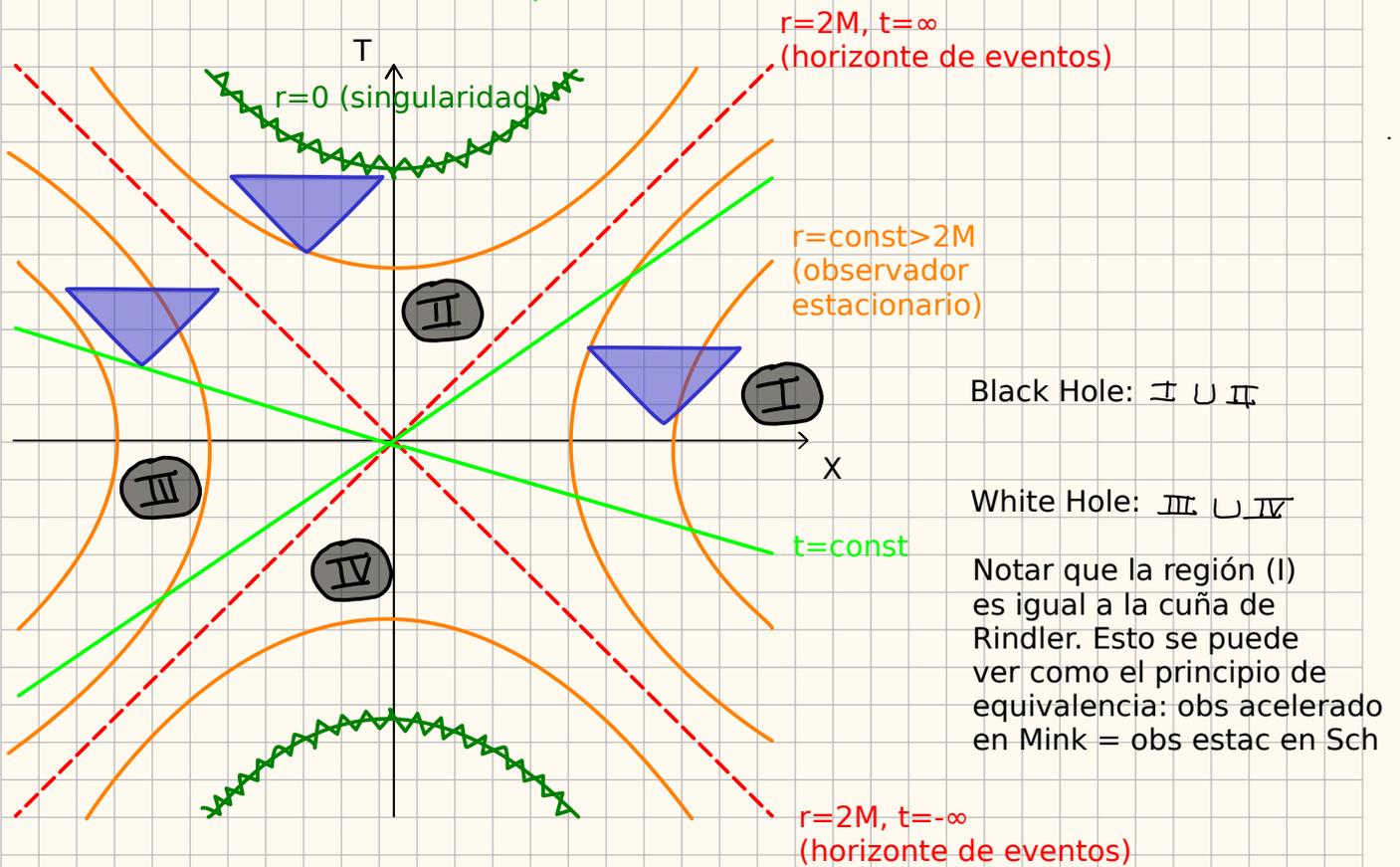
$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{r/2M}, \quad \frac{T}{X} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Podemos ver que las curvas con $r = \text{const}$ (observadores estacionarios) corresponden a hipérbolas que según el valor de r son "verticales" u "horizontales"

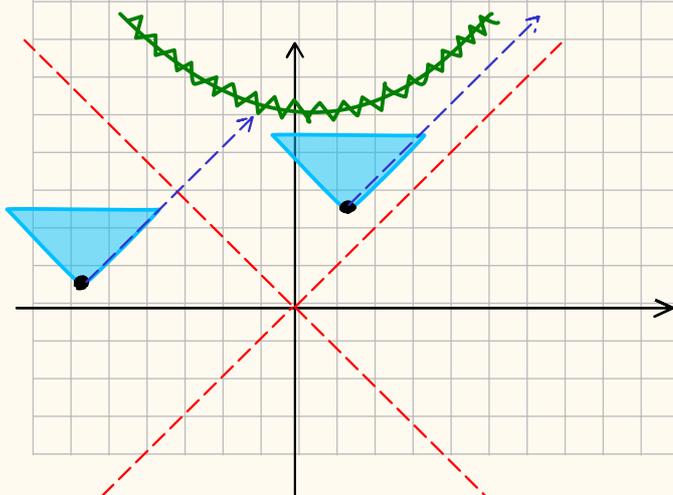
Las curvas de $t = \text{const}$ son rectas que cortan el origen. El signo de la pendiente depende del valor de t .

Algunas curvas particulares

- ▶ $r = 2M \rightsquigarrow X^2 - T^2 = 0 \Rightarrow T = \pm X$ ~~X~~
- ▶ $r = 0 \rightsquigarrow X^2 - T^2 = -1 \Rightarrow T = \pm \sqrt{1+X^2}$ ~~X~~
- ▶ $r = \text{const} > 2M \rightsquigarrow X^2 - T^2 = \ell^2 > 0 \Rightarrow T = \pm \sqrt{\ell^2 - X^2}$) (
- ▶ $r = \text{const} < 2M \rightsquigarrow X^2 - T^2 = -\ell^2 < 0 \Rightarrow T = \pm \sqrt{\ell^2 + X^2}$) (
- ▶ $t = 0 \rightsquigarrow T = 0$ —
- ▶ $t \rightarrow \infty \rightsquigarrow T = X$ /
- ▶ $t \rightarrow -\infty \rightsquigarrow T = -X$ \



Notemos que no hay conexión causal entre las regiones (I) y (II), así como tampoco entre la (III) y la (I)



Comentario "pochoclero": Hawking en 1973 tuvo en cuenta como afectaba la curvatura del espacio-tiempo en cálculos de teoría cuántica de campos y encontró que los agujeros negros emitían radiación con un espectro de cuerpo negro (radiación de Hawking). Esto supone un problema conceptual en física teórica que se conoce como "paradoja de la información".

Problema 10: Extensión de Kruskal bis

Es lo mismo pero a la Carroll

(refs: Carroll Sec 5.7 pág 222)

Carta de Schwarzschild ($c=1, G=1$)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Claramente hay problemas en $r=2M$ y $r=0$. Hay dos posibilidades: i) es una singularidad de la geometría (no hay nada que hacer); ó ii) es un problema de la carta utilizada que falla en describir esa región.

Veremos que $r=2M$ es el caso ii): hallaremos una carta que cubre una región mayor de la geometría donde $r=2M$ no presenta problemas.

En $r=0$ hay una singularidad geométrica, corresponde al caso (i): un invariante de curvatura diverge. El escalar de Kretschmann

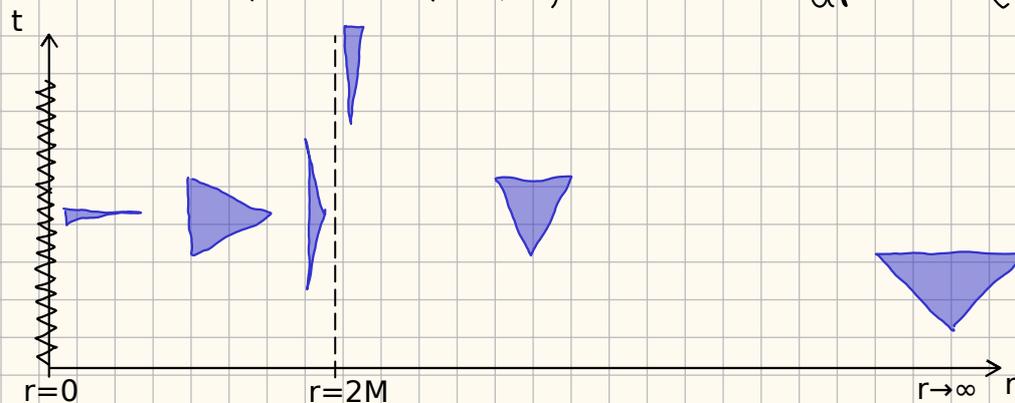
$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48G^2M^2/c^4r^6$$

Además nos gustaría que en dicha carta los conos de luz no colapsen. Lo ideal sería que sean rectas a 45° . La carta de Kruskal logra esto y cubre toda la geometría.

Rayos de luz radiales ($d\theta=d\phi=0$): conos de luz en el plano $t-r$

Observación: de ahora en adelante solamente nos vamos a ocupar de la parte $t-r$ de la métrica. Siempre vamos a considerar rayos de luz radiales.

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \Leftrightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$



Nos gustaría tener una carta donde los conos de luz no colapsen. Uno de los problemas viene de la divergencia del término g_{rr} . Si definimos una coordenada r^* (el "*" no indica conjugado ni pullback ni dual de Hodge, es sólo un nombre)

$$dr^* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \Rightarrow r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

La métrica en coordenadas (t, r^*) queda

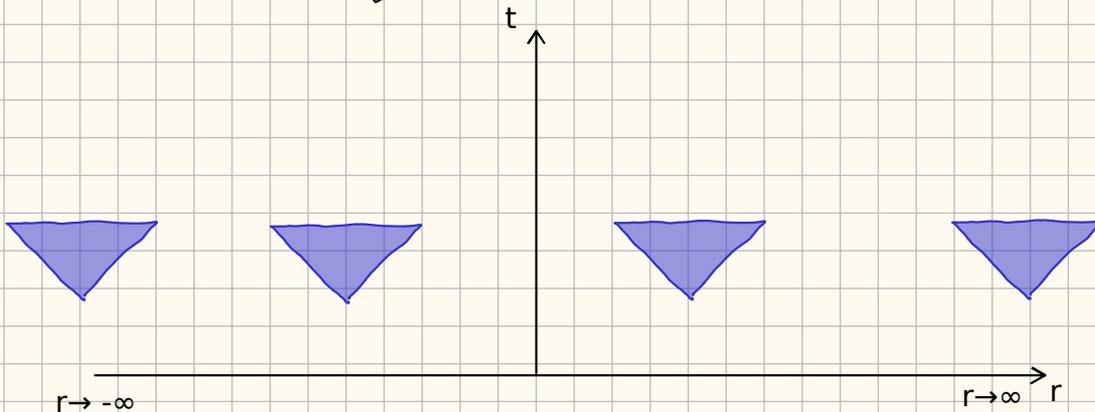
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-dt^2 + dr^{*2}\right), \quad r = r(r^*)$$

La parte relevante para los rayos de luz radiales es conforme al espacio plano 2D. Para $r \geq 2M$ tenemos que $r^* \in \mathbb{R}$

$$0 = ds^2 \Rightarrow \frac{dt}{dr^*} = \pm 1 \quad \text{conos de luz son rectas a } 45^\circ$$

El precio que pagamos fue que ahora el horizonte está infinitamente lejos

$$r^*(r) = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \Rightarrow r^*(r=2M) \rightarrow -\infty$$



Si bien extendimos el rango de las coordenadas no hemos extendido la región del espacio tiempo que estas cubren.

Notemos que las curvas $t \pm r^* = \text{const}$ describen rayos de luz radiales que viajan hacia la izquierda (entrantes) y hacia la derecha (salientes) respectivamente. Veremos que es conveniente utilizar coordenadas adaptadas a esos rayos (llamadas coordenadas nulas):

► Rayos de luz entrantes $V \equiv t + r^*$, $V \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow p/V = \text{const} \rightsquigarrow t = -r^* + V, \frac{dt}{dr^*} = -1$

► Rayos de luz salientes $U \equiv t - r^*$, $U \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow p/U = \text{const} \rightsquigarrow t = +r^* + V, \frac{dt}{dr^*} = +1$

Es fácil ver que $\{\partial_V, \partial_U\}$ son vectores nulos

La carta $\{V, r, \theta, \phi\}$ son llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes.
 La carta $\{U, r, \theta, \phi\}$ son llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes.

Cómo queda la métrica en las coordenadas de EF entrantes?

$$dV = dt + dr^* \Rightarrow dt = dV - dr^* \Rightarrow dt^2 = dV^2 - 2dVdr^* + dr^{*2}$$

$$\Rightarrow -dt^2 + dr^{*2} = -dV^2 + 2dVdr^*$$

Recordemos que $dr^* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \Rightarrow$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2dVdr + r^2 d\Omega^2$$

Métrica de Schwarzschild en coords EF entrantes

Cómo se ven los rayos de luz en estas coordenadas?

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2 dV dr \Rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 = 2 dV dr$$

Una posibilidad es $V=\text{const}$, $dV=0$ que representa rayos de luz entrantes.
La otra posibilidad es

$$\frac{dV}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

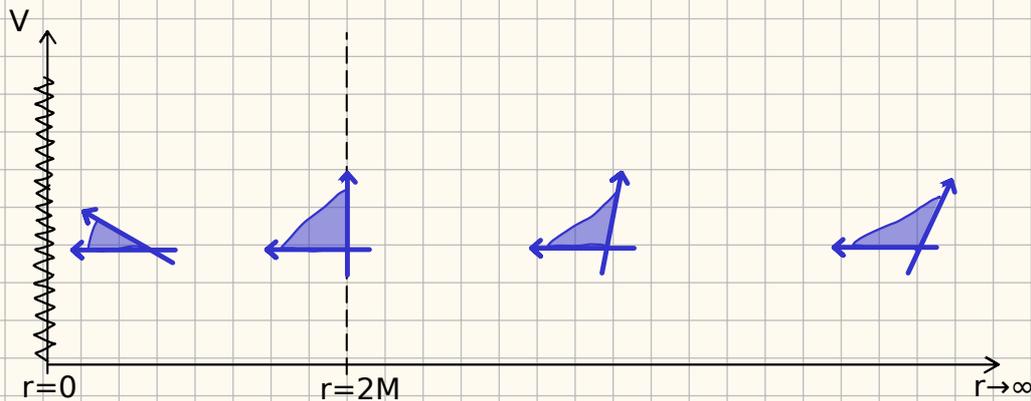
que describe rayos de luz salientes ya que para $U=\text{const}$ tenemos

$$\frac{dt}{dr^*} = 1, \quad dt = \frac{1}{2} dV, \quad dr^* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr$$

equiv

Consideremos algunos casos particulares

$$\blacktriangleright r \rightarrow \infty \quad \frac{dV}{dr} = 2 \quad \blacktriangleright r = 2M \quad \frac{dV}{dr} = \infty \quad \blacktriangleright r \rightarrow 0 \quad \frac{dV}{dr} = 0$$



Es útil introducir una coordenada temporal \tilde{t}

$$V = t + r^* \equiv \tilde{t} + r \Rightarrow \tilde{t} = t + r^* - r = t + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2$$

que también se puede escribir como

$$ds^2 = (d\tilde{t} + dr) \left\{ - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t} + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr \right\}$$

En estas coordenadas los rayos de luz cumplen

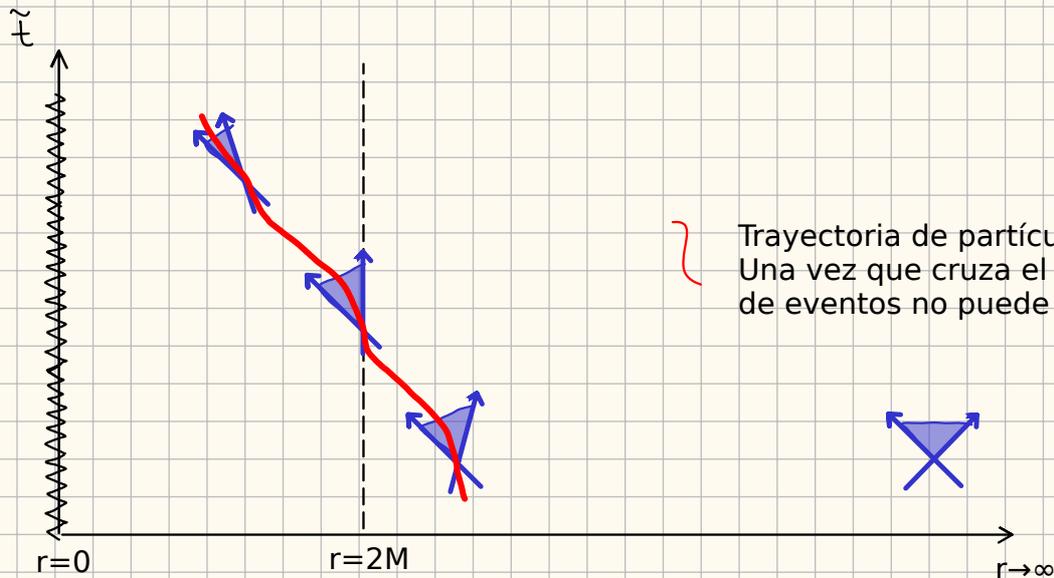
$$d\tilde{t} + dr = 0 \quad \text{ó} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t} = \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr$$

$$\triangleright d\tilde{t} + dr = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{t}}{dr} = -1 \quad \text{rayos entrantes}$$

$$\triangleright \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t} = \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr \Rightarrow \frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{1 + 2M/r}{1 - 2M/r} > 0 \quad \forall r > 2M$$

Algunos casos particulares

$$\forall r \rightarrow \infty \quad \frac{d\tilde{t}}{dr} = +1, \quad \forall r = 2M \quad \frac{d\tilde{t}}{dr} = \infty, \quad \forall r = 0 \quad \frac{d\tilde{t}}{dr} = -1$$



Trayectoria de partícula masiva:
Una vez que cruza el horizonte de eventos no puede salir.

Extensión de Kruskal

Ahora sí, finalmente llegamos a la extensión de Kruskal: ya que U y V son coordenadas adaptadas a los rayos de luz (lo que determina la estructura causal) utilizemos ambas para describir la geometría de Schwarzschild

$$U = t - r^*, \quad V = t + r^*, \quad r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

$$t = \frac{V+U}{2}, \quad r^* = \frac{V-U}{2}$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV dU + r^2 d\Omega^2$$

Todavía no estamos del todo felices ya que el horizonte de eventos sigue ubicándose infinitamente lejos

$$r^*(r=2M) = \infty \Rightarrow U(r=2M) = +\infty, \quad V(r=2M) = -\infty$$

Una forma de "traer" el horizonte a una posición finita es

$$u \equiv -e^{U/4M} = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{-(t-r)/4M}, \quad u \in (-\infty, 0)$$

$$v \equiv +e^{V/4M} = +\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{+(t+r)/4M}, \quad v \in (0, +\infty)$$

Notemos que

$$\frac{V-U}{4M} = \frac{r}{2M} + \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) > 0 \quad \text{p/ } r > 2M \Rightarrow V \geq U$$

$$\frac{r}{2M} - 1 = e^{-r/2M} e^{V/4M} e^{-U/4M} = -\vartheta u e^{-r/2M}$$

$$= \frac{r}{2M} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -\vartheta u e^{-r/2M} \Rightarrow \boxed{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -\frac{2M}{r} \vartheta u e^{-r/2M}}$$

Por otro lado

$$u = -e^{-U/4M} \Rightarrow du = \frac{1}{4M} e^{-U/4M} dU = -\frac{u}{4M} dU$$

$$\vartheta = e^{V/4M} \Rightarrow d\vartheta = \frac{1}{4M} e^{V/4M} dV = \frac{\vartheta}{4M} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{dV dU = -\frac{16M}{\vartheta u} d\vartheta du}$$

La métrica de Schwarzschild en coordenadas (ϑ, u) queda

$$\boxed{ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{r/2M} du d\vartheta, \quad r = r(u, \vartheta)}$$

Recordemos que $u < 0, \vartheta > 0$ cubren la misma región que la carta original de Schwarzschild, pero mirando la métrica de arriba nada nos impide extender el rango de las coordenadas a todos los reales. Para hacerlo más claro hagamos un último cambio de coordenadas

$$u \equiv T - X, \quad \vartheta \equiv T + X \Rightarrow T = \frac{\vartheta + u}{2}, \quad X = \frac{\vartheta - u}{2}$$

Finalmente la métrica queda

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad r = r(T, X)$$

Carta maximal de Kruskal-Szekeres

La métrica 2D para las superficies de $\theta = \text{const}$, $\phi = \text{const}$ es conforme a la plana, por lo tanto los conos de luz están formados por rectas a 45° en todo el espacio.

Análisis de curvas de $t=\text{const}$ y $r=\text{const}$ en el diagrama de Kruskal

La relación entre las coordenadas viejas (t,r) y las nuevas (T,X) es

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{r/2M}, \quad \frac{T}{X} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Podemos ver que las curvas con $r=\text{const}$ (observadores estacionarios) corresponden a hipérbolas que según el valor de r son "verticales" u "horizontales") ((

Las curvas de $t=\text{const}$ son rectas que cortan el origen. El signo de la pendiente depende del valor de t .

Algunas curvas particulares

▶ $r = 2M \rightsquigarrow X^2 - T^2 = 0 \Rightarrow T = \pm X$ ✗

▶ $r = 0 \rightsquigarrow X^2 - T^2 = -1 \Rightarrow T = \pm \sqrt{1+X^2}$ ~~~~~

▶ $r = \text{const} > 2M \rightsquigarrow X^2 - T^2 = \ell^2 > 0 \Rightarrow T = \pm \sqrt{\ell^2 - X^2}$) (

▶ $r = \text{const} < 2M \rightsquigarrow X^2 - T^2 = -\ell^2 < 0 \Rightarrow T = \pm \sqrt{\ell^2 + X^2}$ ((

▶ $t = 0 \rightsquigarrow T = 0$ —

▶ $t \rightarrow \infty \rightsquigarrow T = X$ /

▶ $t \rightarrow -\infty \rightsquigarrow T = -X$ \

