25/11 Clase 23: Guía 7

Métrica de Reissner-Nordstrom (Problema 9)

$$ds^2 = -\Delta(r)\,dt^2 + \Delta^{-1}(r)\,dr^2 + r^2 d\Omega^2, \qquad \Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

$$(G = c = 4\pi\varepsilon_0 = 1)$$

los invito a que calculen los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci y comprobar que es solución.

Para que puedan chequer los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma^t{}_{tr} = \frac{Mr - Q^2}{r(r^2 - 2Mr + Q^2)}, \quad \Gamma^r{}_{tt} = \frac{(r^2 - 2Mr + Q^2)(Mr - Q^2)}{r^5},$$

$$\Gamma^r{}_{rr} = -\frac{(Mr - Q^2)}{r(r^2 - 2Mr + Q^2)}, \quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r}, \quad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\, \Gamma^r{}_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Tensor de Ricci

$$R_{tt} = \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^6}, \quad R_{rr} = -\frac{Q^2}{r^2(r^2 - 2Mr + Q^2)}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{Q^2}{r^2}, \quad R_{\varphi\varphi} = \frac{\sin^2\theta}{r^2} Q^2$$

Notemos que en n=4 dimensiones la traza del tensor de energía-momento de Maxwell se anula

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} n F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) = \frac{(4-n)}{16\pi} F^2 \overset{n=4}{=} 0$$

esto hace que el escalar de Ricci sea cero

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \xrightarrow{g^{\mu\nu}} R - \frac{1}{2} nR = \frac{(2-n)}{2} R = 8\pi G T$$

$$\Rightarrow R = -\frac{16\pi G}{(n-2)} T \Rightarrow n = 4,\ EM \Rightarrow R = 0$$

Recordemos que

$$\tilde{A} = -\Phi(r)\,\tilde{d}t, \quad \tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$$

y que hay que resolver las ecuaciones de Maxwell en vacío

$$\tilde{d}\tilde{F} = 0, \quad \tilde{d} * \tilde{F} = 0$$

Efectos de rotación en la métrica de campo débil

En esta parte vamos cómo cambia la geometría debido a una distribución de materia esféricamente simétrica rotante (gracias Juan por notar el Problema 8.19 de Schutz). En Relatividad General la geometría del espacio-tiempo depende no solo de la distribución de energía ρ si no que todas las componentes del tensor de energía-momentos $T^{\mu\nu}$ contribuyen a las ecuaciones de campo. La idea de es ver cómo ésto produce efectos que no están presentes en la gravedad newtoniana (llamados efectos post-newtonianos).

(ver también parámetros post-newtonianos en Sec 10.2 de Hartle ySec 8.4 de Schutz)

El problema 8.19 del Schutz dice:
a) Supongamos un cuerpo esférico de densidad uniforme ρ y radio R (no confundir con el escalar de Ricci) que gira rígidamente respecto al eje z con velocidad angular Ω. Escribir las componentes (0,ν) del tensor de energía-momentos en el sistema de referencia fijo al centro de masa del cuerpo asumiendo que ρ, Ω y R no dependen del tiempo al orden más bajo en ΩR.
b) La solución general a la ecuación $\Delta f = g$ que se anula en infinito es

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{g(x')}{|x-x'|}\, d^3x' \qquad (1)$$

utilizar esta expresión para resolver las ecuaciones linealizadas

$$\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu} \qquad (2)$$

Obtener las soluciones afuera del cuerpo al orden más bajo en 1/r. Expresar los términos cruzados de la métrica (0,ν) en términos del momento angular del cuerpo.

a) Calculemos el Tμν de un cuerpo esférico en rotación. En espacio plano la 4-velocidad de un punto material es

$$U^\mu = \gamma(v)(1, v^i) \qquad (4)$$

como el cuerpo es rígido v es la velocidad de rotación del cuerpo

$$\Rightarrow \quad v^i = \Omega\, \underbrace{\varepsilon^i{}_{jk}}_{\text{símbolo}}\, \delta^j_3\, x^k \qquad (5) \qquad \left(\vec v = \vec\Omega \times \vec r\,, \quad \vec\Omega = \Omega\hat z\right)$$

$$\left(r^2 = x^2+y^2+z^2\,, \quad r \leq R\right)$$

calculemos el módulo de $|\vec v|$

$$|\vec v|^2 = v^i v_i = g_{il} v^i v^l = \Omega^2\, \varepsilon^i{}_{jk}\, \delta^j_3\, x^k\, g_{il}\, \varepsilon^l{}_{mn}\, \delta^m_3\, x^n$$

$$= \Omega^2\, \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{imn}}\, \delta^j_3 \delta^m_3\, x^k x^n = \Omega^2\left(\delta_{33}\delta_{kn} - \delta_{3n}\delta_{k3}\right) x^k x^n$$

$g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}$

$$= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$ (ver Wikipedia, Carroll ec 2.71 p83)

$$\Rightarrow \quad |\vec v|^2 = \Omega^2\left(|\vec x|^2 - z^2\right) = \Omega^2\left(x^2+y^2\right) = \Omega^2 R^2 a^2\,, \quad a^2 \equiv \frac{x^2+y^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{1}{1-v^2}$$

Ahora calculamos las componentes de Tμν con esta velocidad

$$T^{\mu\nu} = \rho\, U^\mu U^\nu \qquad (6)$$

$$T^{00} = \rho\,(U^0)^2 = \rho\,\gamma^2 \simeq \rho\,(1+v^2) = \rho\,(1+\underbrace{\Omega^2 R^2 a^2}_{\mathcal{O}(\Omega^2 R^2)}) \simeq \rho \simeq T^{00}$$

$\rho, \Omega, R << 1$

$$T^{0i} = \rho\,\gamma^2 v^i \simeq \rho\,(1+\Omega^2 R^2 a^2)\,\Omega\,\varepsilon^i{}_{jk}\,\delta^j_3\,x^k \simeq \rho\,\Omega\,\varepsilon^i{}_{jk}\,\delta^j_3 x^k \simeq T^{0i}$$

$$T^{ij} = \rho\,\gamma^2 v^i v^j \simeq \rho\,\mathcal{O}(v^2) \simeq 0 \simeq T^{ij}$$ (se va del orden de aproximación)

Entonces las componentes no-nulas del tensor de energía-momentos son

$$T^{00} \simeq \rho, \quad T^{0x} = -\rho\,\Omega\,y, \quad T^{0y} \simeq \rho\,\Omega\,x, \quad T^{0z} \simeq 0 \qquad (7)$$

b) Ecuaciones de campo: considerando que la solución que queremos obtener es un pequeño apartamiento del espacio plano

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h\,\eta_{\mu\nu}, \quad \bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

$|h_{\mu\nu}| << 1$

entonces las ecuaciones de Einstein se reducen a (clase 26/10)

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \qquad (2)$$

Dado que estamos considerando una solución estacionaria (nada depende explícitamente) del tiempo

$$\Box = \Delta$$ (Laplaciano)

utilizando la expresión (1) junto con (7)

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{g(x')}{|x-x'|}\, d^3x' \qquad (1)$$

entonces para la componente (0,0) tenemos que

$$\bar{h}^{00} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(-16\pi T^{00})}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, d^3x' = 4 \int_{r' \leq R} \frac{\rho}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dx'\,dy'\,dz' = \frac{4M}{r} = \bar{h}^{00} \qquad (8)$$

donde usamos que $\displaystyle \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}}{r^2}\right)$

Para la componente (0,i)

$$\bar{h}^{0i} = -\frac{1}{4\pi} \int (-16\pi G)\, \frac{\rho\,\Omega\,\varepsilon^i{}_{jk}\,\delta^j_3 x^k}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dVol'$$

como la distribución de materia tiene simetría axial podemos hacer la cuenta para i=x y va a ser lo mismo para i=y

$$i=x \quad \bar{h}^{0x} = -4\rho\,\Omega \int_{r' \leq R} \frac{y'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\, dVol \simeq -\frac{4\rho\,\Omega}{r} \left\{ \underbrace{\int y'\, dVol'}_{=0} + \frac{1}{r^2} \int \bar{r}'\cdot\bar{r}\; y'\, dVol' \right\}$$

$$\int y'\,(\bar{r}\cdot\bar{r}')\, d^3x' = \int y'\,(x x' + y y' + z z')\, d^3x' = \int y\, y'^2\, dx'\,dy'\,dz' = y \int_{-R}^{+R} \pi\,(R^2 - y'^2)\, y'^2\, dy'$$

$$\Rightarrow \bar{h}^{0x} = -\frac{16\pi}{15}\,\frac{\Omega\rho R^5}{r^3}\,y \qquad \& \qquad \bar{h}^{0y} = +\frac{16\pi}{15}\,\frac{\Omega\rho R^5 x}{r^3}$$

Recordando que el momento de inercia de una esfera que gira sobre un eje es

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

y que su momento angular es

$$J = \Omega I$$

podemos reescribir los términos no-diagonales como

$$\bar{h}^{0i} = \left(-\frac{2Jy}{r^3},\ +\frac{2Jx}{r^3},\ 0\right) \qquad (9)$$

La métrica auxiliar queda

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{4M}{r} & -\frac{2Jy}{r^3} & +\frac{2Jx}{r^3} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{h} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -\frac{4M}{r}$$

De esto podemos obtener $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}$

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \quad h_{0x} = \frac{2Jy}{r^3}, \quad h_{0y} = -\frac{2Jx}{r^3}, \quad h_{ij} = \frac{2M}{r}\delta_{ij} \qquad (10)$$

$$\Rightarrow ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{4GJy}{r^3}\,dtdx - \frac{4GJ}{r^3}\,dtdy + \left(1+\frac{2GM}{r}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \qquad (11)$$

pasando a coordenadas esféricas

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \frac{4GJ}{r}\sin^2\theta\, dt d\varphi + \left(1+\frac{2GM}{r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \qquad (12)$$

Frame dragging

La métrica en la aproximación de campo débil de un objeto esférico rotante no depende explícitamente de t ni de φ al igual que la métrica de Kerr. Es por lo tanto, estacionaria y axialmente simétrica (posee simetría de rotación sólo alrededor de un eje y no es invariante ante t → -t). Por lo tanto, tiene dos vectores de Killing $\partial_t, \partial_\varphi$ y dos cantidades conservadas asociadas p_t, p_φ $(\bar{p} = m\bar{U})$

$$p_t \equiv -E = -g(\partial_t, \bar{p}) \Rightarrow \quad e = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\varphi}\dot{\varphi}$$
$$p_\varphi \equiv L = g(\partial_\varphi, \bar{p}) \Rightarrow \quad \ell = g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} + g_{\varphi t}\dot{t} \qquad (13)$$

- Si $g_{t\varphi} = 0 \Rightarrow \ell = g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \ell / g_{\varphi\varphi}$

  una partícula cuyas condiciones iniciales son tales que $\ell = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \; \forall \tau$

- Si $g_{t\varphi} \neq 0$ lo anterior no es cierto. Podemos invertir las relaciones (13) y obtener

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\delta}\left(g_{t\varphi} e + g_{tt}\ell\right), \quad \dot{t} = -\frac{1}{\delta}\left(g_{\varphi\varphi} e + g_{t\varphi}\ell\right), \quad \delta \equiv g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2 \qquad (14)$$

supongamos que dejamos caer una partícula desde infinito con $\ell = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \equiv \omega(r, \theta) \qquad (15)$$

velocidad angular de la párticula

entonces, a medida que cae, la partícula es "arrastrada" por la geometría rotante de la estrella adquiriendo velocidad angular. Este efecto se interpreta como un "dragging of inertial frames".

Se puede ver un poco más de esto en el capítulo 14 del libro de Hartle.