

Clase 24: Diagramas de Penrose

Refs: Apéndice H Carroll, Capítulo 27 Lectures M. Blau (<http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>)

La idea de estos diagramas es hallar una métrica auxiliar en la que sea posible estudiar las propiedades globales y la estructura causal de la métrica original. Para ello necesitamos dos cosas:

- 1) Una métrica auxiliar conformemente plana, así los conos de luz están a 45° .
- 2) Que el rango de las coordenadas sea finito, así podemos dibujar el espacio completo.

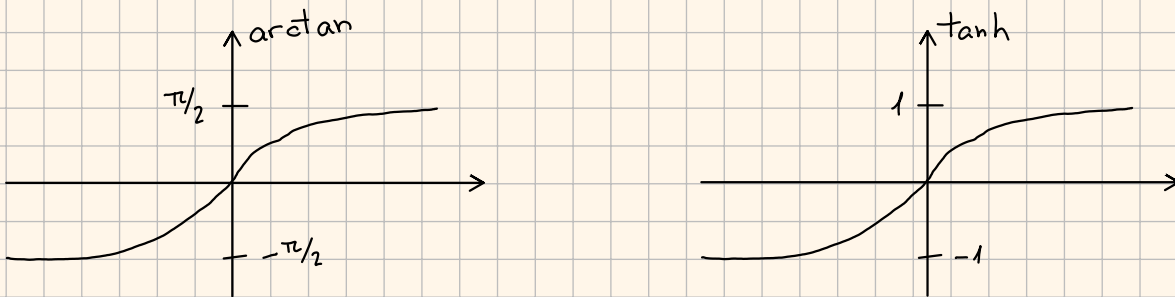
$$g_{\mu\nu} = \omega^2(x) \tilde{g}_{\mu\nu}$$

← métrica "física"
factor conforme
← métrica auxiliar

● Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Lo habitual es intentar "traer" el "infinito" hasta una posición finita utilizando funciones como arctan ó tanh



El primer intento sería hacer una transformación del tipo

$$t' = \text{arctan } t, \quad r' = \text{arctan } r$$

con este cambio de coordenadas lograríamos darle un rango finito a las coordenadas temporal y radial pero los conos de luz no resultarían ser rectas a 45° .

Va a resultar más útil pasar primero a coordenadas nulas (como cuando estudiamos la extensión de Kruskal) y luego intentar compactificar el rango de las coordenadas.

$$\begin{cases} u = t - r \\ v = t + r \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{u+v}{2} \\ r = \frac{v-u}{2} \geq 0 \Rightarrow v \geq u \end{cases}$$

$$-\infty < t < +\infty, \quad 0 < r < +\infty, \quad -\infty < u \leq v < +\infty$$

$u = \text{const}$ rayos de luz "salientes", $v = \text{const}$ rayos de luz "entrantes"

En la carta (u,v) la métrica de Minkowski queda

$$ds^2 = -du dv + \frac{(v-u)^2}{4} d\Omega^2$$

Ahora sí hacemos un cambio de coordenadas que nos lleve a un rango finito

$$U = \arctan u, \quad V = \arctan v, \quad v - u = \tan V - \tan U \Rightarrow V \geq U$$

$$-\infty < u \leq v < +\infty, \quad -\pi/2 < U \leq V < \pi/2$$

$$du dv = \frac{dU dV}{\cos^2 U \cos^2 V}, \quad v - u = \frac{\sin(V-U)}{\cos U \cos V}$$

la métrica en estas coordenadas queda

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} \left(-4 dU dV + \sin^2(V-U) d\Omega^2 \right)$$

pero lo que queremos es poder utilizar un diagrama espacio-temporal, así que hacemos un último cambio de coordenadas

$$\begin{cases} T = V + U \\ R = V - U \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V = \frac{T+R}{2} \\ U = \frac{T-R}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\pi/2 < U \leq V < +\pi/2 &\Rightarrow \left. \begin{aligned} -\pi < T+R < +\pi \\ -\pi < T-R < +\pi \end{aligned} \right\} |T| + R < \pi \end{aligned}$$

y la métrica de Minkowski queda

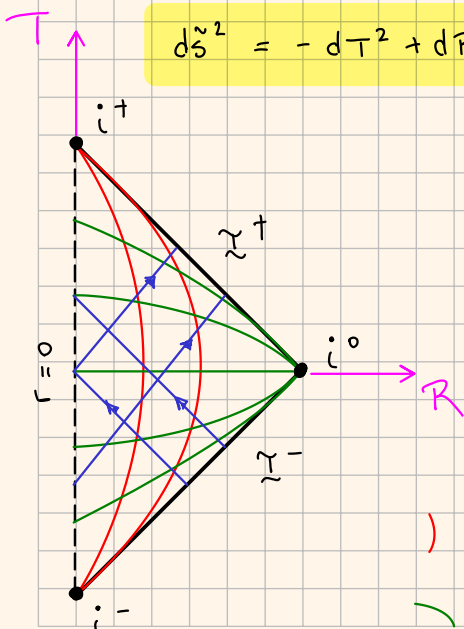
$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U(T,R) \cos^2 V(T,R)} \left(-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2 \right) = d\tilde{s}^2$$

métrica auxiliar (compactificación conforme)

$$ds^2_{\text{Mink}} = \omega^2 d\tilde{s}^2$$

$$d\tilde{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2$$

$$T \in (-\pi/2, \pi/2), \quad R \in [0, \pi]$$



i^+ ($T = \pi, R = 0$) future timelike infinity

i^0 ($T = 0, R = \pi$) spacelike infinity

i^- ($T = -\pi, R = 0$) past timelike infinity

γ^+ ($V = +\pi/2$) future null infinity ("scri" plus)

γ^- ($U = -\pi/2$) past null infinity ("scri" minus)

) $r = \text{const}$

↗ $u = \text{const}$

↘ $t = \text{const}$

↙ $v = \text{const}$

A excepción de $r=0, i^+, i^0, i^-$ cada punto del diagrama conforme es en realidad una 2-esfera de radio $\sin(R)^2$

Los bordes del diagrama no forman parte del espacio-tiempo original.

El cambio de coordenadas completo es

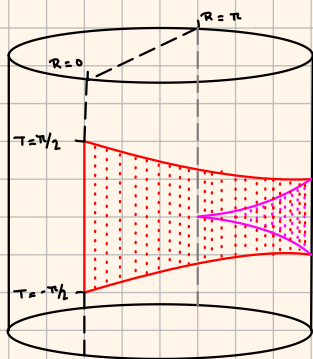
$$t = \frac{v+u}{2} = \frac{\tan V + \tan U}{2} = \tan\left(\frac{T+R}{2}\right) + \tan\left(\frac{T-R}{2}\right) = t$$

$$r = \frac{v-u}{2} = \frac{\tan V - \tan U}{2} = \tan\left(\frac{T+R}{2}\right) - \tan\left(\frac{T-R}{2}\right) = r$$

$$\Rightarrow t \pm r = \tan\left(\frac{T \pm R}{2}\right) \Rightarrow T \pm R = 2 \arctan(t \pm r)$$

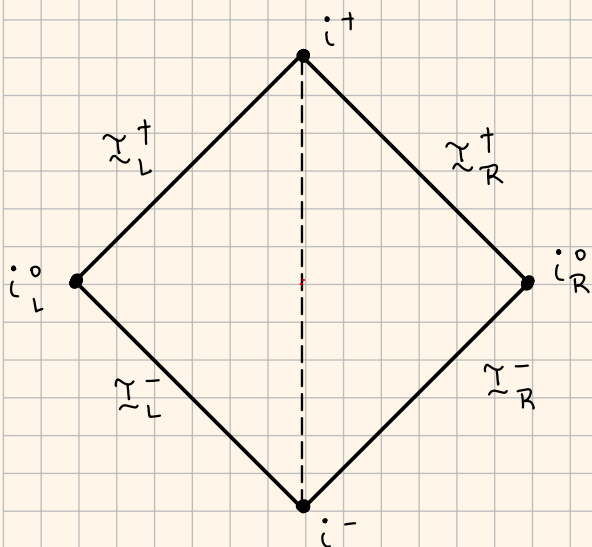
$$T = \arctan(t+r) + \arctan(t-r), \quad R = \arctan(t+r) - \arctan(t-r)$$

Minkowski cubre una parte del universo estático de Einstein (FRLW con $\Lambda > 0, k=1$)

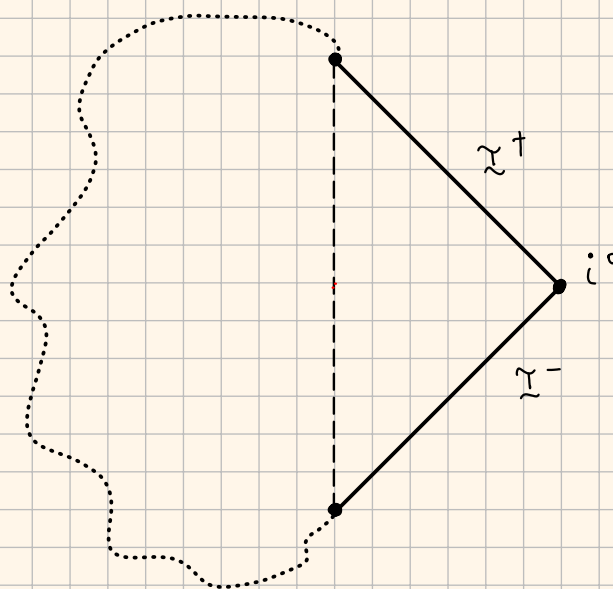


► Un caso especial: Minkowski 2D

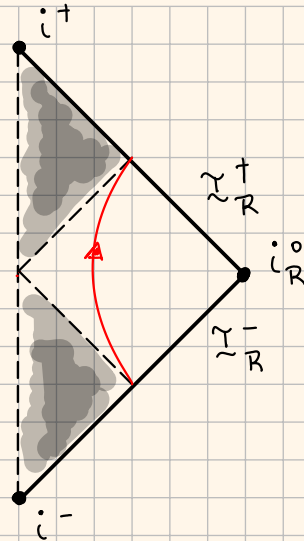
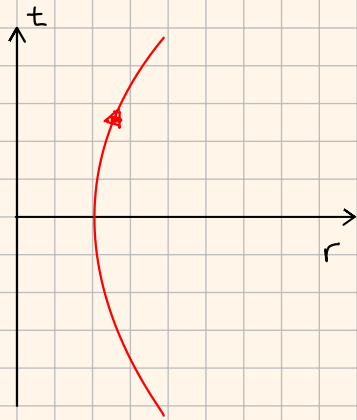
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$



► Espacios asintóticamente planos



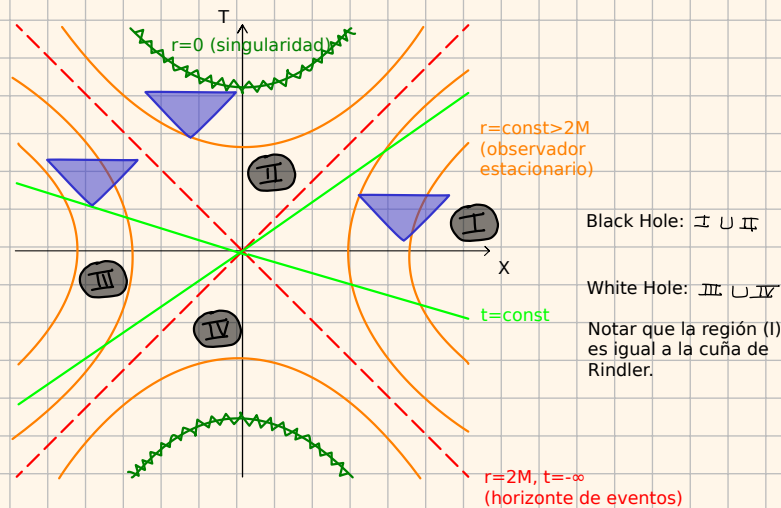
► Rindler



no tiene contacto causal con el observador

► Diagrama de Penrose de la solución de Kruskal-Szekeres

En la clase del 11/11 vimos el diagrama de Kruskal:



lo que nos gustaría es poder "comprimir" este diagrama y llevar las coordenadas a un rango finito.

La métrica de la extensión de Kruskal es

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dv du + r d\Omega^2, \quad r = r(u, v)$$

antes de pasar a coordenadas temporales y espaciales es conveniente llevar las coordenadas nulas a un rango finito

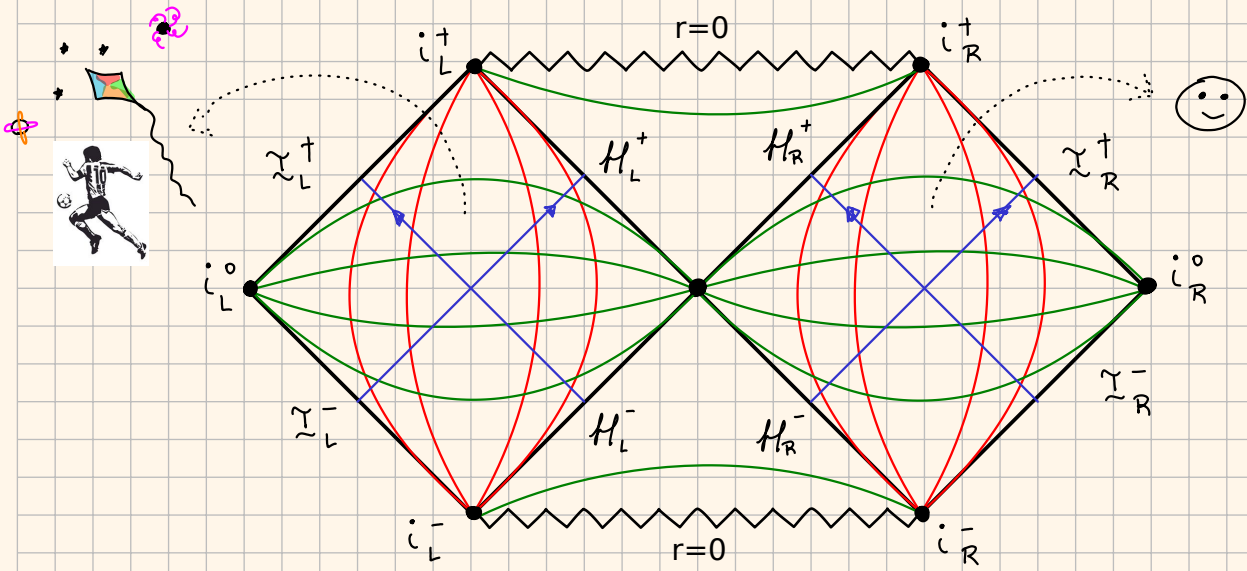
$$u' = \arctan u, \quad v' = \arctan v$$

y luego sí pasar a coordenadas (T,R)

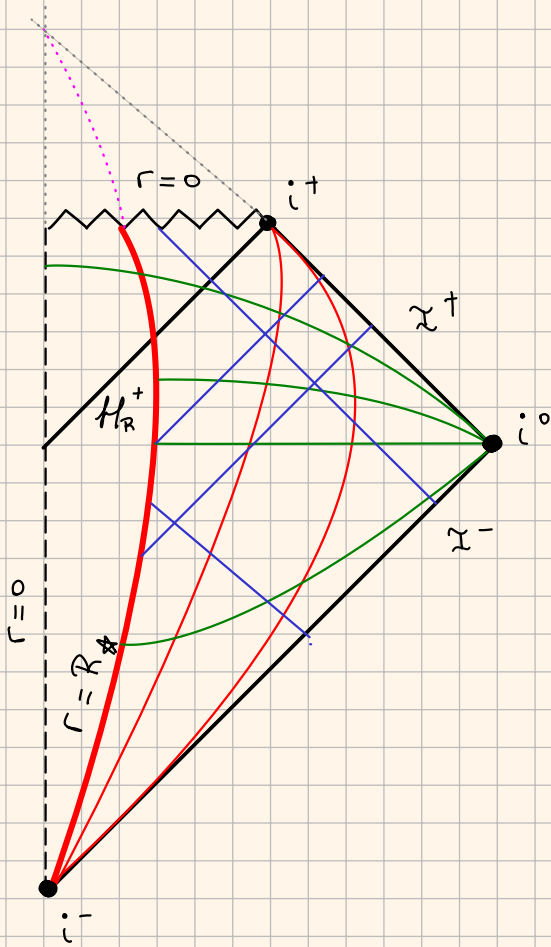
$$T = v' + u', \quad R = v - u$$

⋮

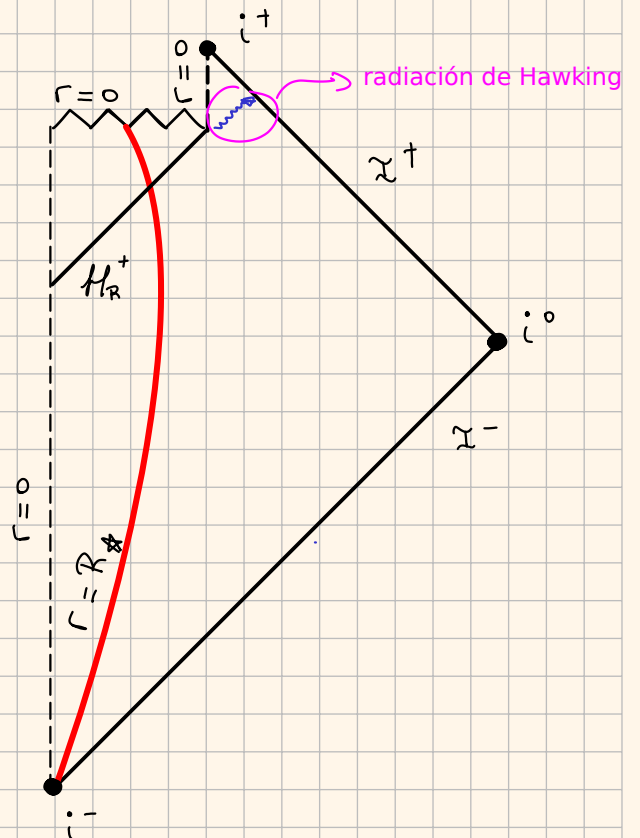
Finalmente el diagrama de Penrose de la extensión de Kruskal es



► Diagrama del colapso estelar y formación de un agujero negro



► Diagrama del colapso estelar, formación y evaporación de un agujero negro



► Breve interludio sobre termodinámica de agujeros negros

En 1974 Bardeen, Carter y Hawking publicaron un trabajo enunciando cuatro leyes que describen la mecánica de los agujeros negros que recuerdan a las leyes de la termodinámica:

Ley	Termodinámica	Agujeros negros
Cero	$T = \text{const}$ en un cuerpo en equilibrio termodinámico	$\kappa = \text{const}$ (gravedad superficial*) en un agujero negro estacionario
Primera	$dE = TdS + dW$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ$
Segunda	$\delta S \geq 0$	$\delta A \geq 0$
Tercera	No es posible alcanzar $T=0$	No es posible alcanzar $\kappa=0$

Wald. Tabla 12.1

Hawking (1971) el área de un agujero negro nunca decrece.

Bekenstein (1973/74) argumenta que la entropía de los agujeros negros debe ser proporcional al área de su horizonte de eventos medidas en unidades de l_p^2

BCH (1973) leyes de la mecánica de agujeros negros

Hawking (1975) utilizando teoría cuántica de campos en espacios curvos obtiene que un agujero negro de Schwarzschild emite radiación con un espectro de cuerpo negro con temperatura

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}$$

El hecho de que los agujeros negros emitan radiación implica que eventualmente se podrían evaporar. Para agujeros negros de masa estelar el tiempo de evaporación es mucho mayor que la edad del Universo $\tau_{bh} \sim 10^{71} (M/M_\odot)^3 \text{ seg}$ ($\gamma \sim 10^{18} \text{ seg}$)

El trabajo de Hawking permite fijar el factor de la entropía de los agujeros negros

$$S_{BH} = \frac{1}{4} \frac{c^3}{G \hbar} A \quad (l_p^2 = G \hbar / c^3)$$

Este resultado es una de las principales motivaciones para el llamado "principio holográfico" según el cual los grados de libertad en una teoría cuántica de la gravedad se encuentran en la superficie que encierra un dado volumen.

https://en.wikipedia.org/wiki/Holographic_principle

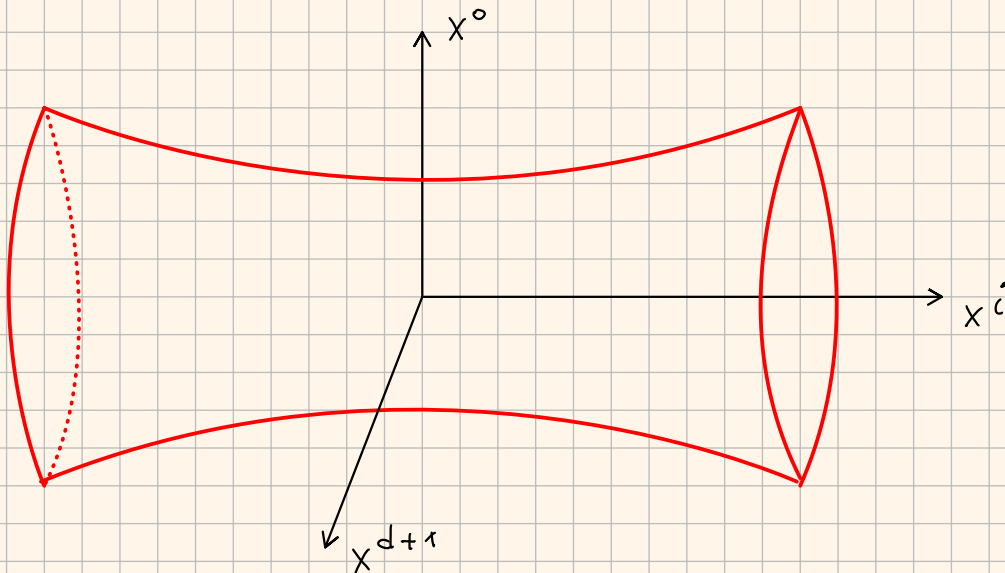
* La gravedad superficial se define como $\kappa^2 = -1/2 (\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu)$ donde χ es un vector de Killing.
 En el caso de espacios estático $\bar{\chi} = \partial_t$ en una carta adecuada.
 Además, en el caso estático, κ se relaciona con la aceleración de un observador estático cerca del horizonte medida por un observador en infinito (Ver Sec 6.3 del libro de Carroll).

► Anti-de Sitter (AdS)

El espacio AdS es un espacio maximalmente simétrico con curvatura negativa ($\Lambda < 0$).

AdS_{d+1} se puede obtener como un hiperboloide embebido en $\mathbb{R}^{2,d}$

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^d (X^i)^2 - (X^{d+1})^2 = -1$$



como ya vieron en la clase de Facundo del 18/11, una posible forma de parametrizar el hiperboloide de AdS4 es

$$\begin{cases} X^0 = \sinh t \operatorname{ch} \rho \\ X^1 = \sinh \rho \sin \theta \cos \varphi \\ X^2 = \sinh \rho \sin \theta \sin \varphi \\ X^3 = \sinh \rho \cos \theta \\ X^{d+1} = \cosh t \operatorname{ch} \rho \end{cases}$$

en estas coordenadas, la métrica inducida en el hiperboloide queda

$$ds^2 = -\operatorname{ch}^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2$$

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \rho \left(-dt^2 + \frac{d\rho^2}{\operatorname{ch}^2 \rho} + \tanh^2 \rho d\Omega^2 \right)$$

si definimos $dx = d\rho / \operatorname{ch} \rho$ entonces, tenemos que $\tan x = \sinh \rho$

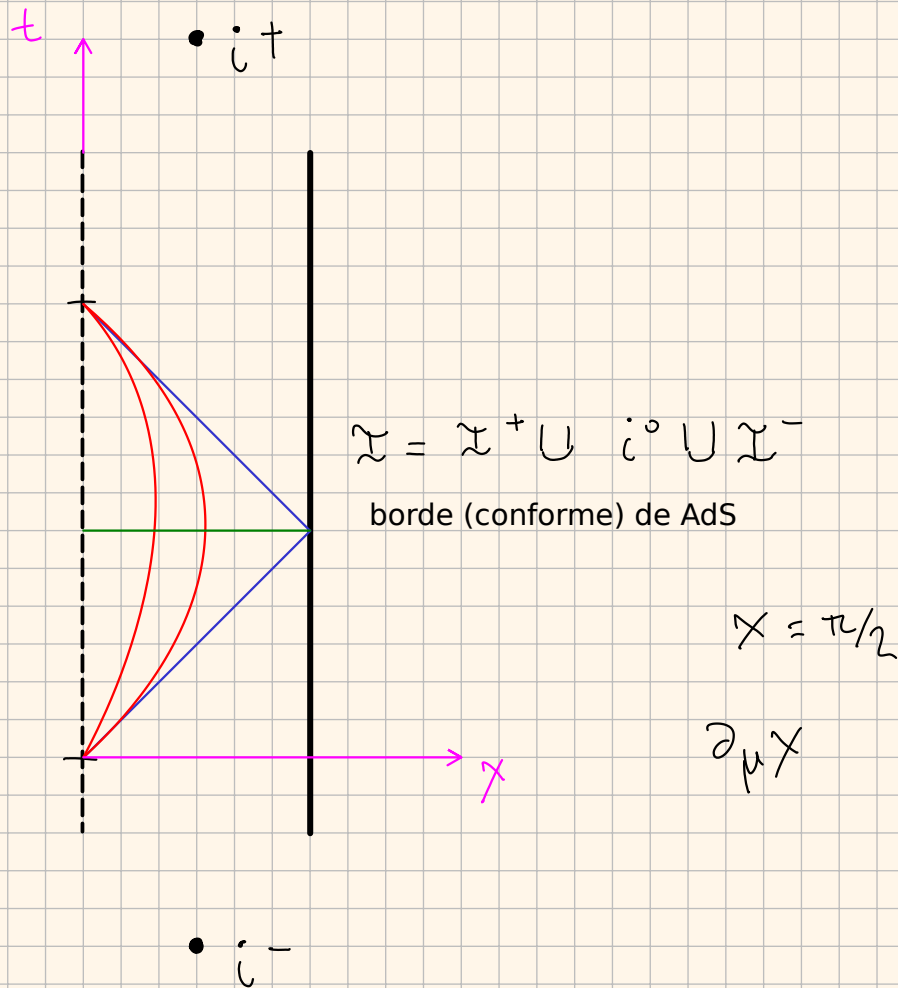
$$0 \leq \rho < \infty \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi/2$$

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \rho(x) \left(-dt^2 + dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2 \right)$$

$$d\tilde{S}_{AdS_4}^2 = -dt^2 + dx^2 + \sin^2 x d\Omega^2 \quad x \in [0, \pi/2]$$

AdS es la mitad del universo estático de Einstein.

Notar que no es posible compactificar la coordenada t (pueden intentarlo).



La existencia de este borde conforme en AdS es un hecho crucial en la correspondencia AdS/CFT, también llamada conjetura de Maldacena u holografía.

https://en.wikipedia.org/wiki/AdS/CFT_correspondence

<https://www.quantamagazine.org/albert-einstein-holograms-and-quantum-gravity-20181114/>

► Otros diagramas (ya vistos en la clase teórica)

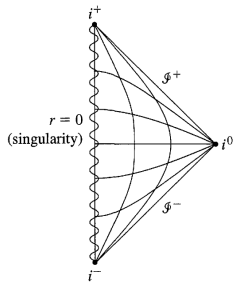


FIGURE 6.3 Conformal diagram for Reissner-Nordström solution with $Q^2 + P^2 > GM^2$. There is a naked singularity at the origin.

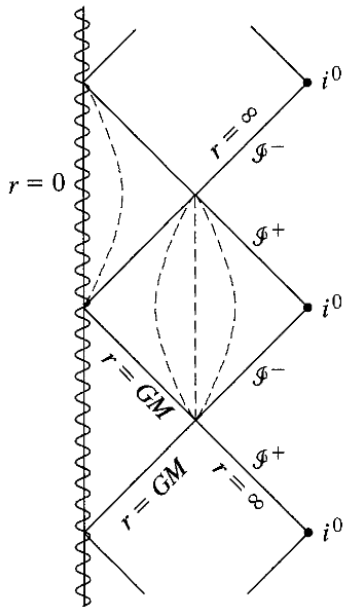


FIGURE 6.5 Conformal diagram for the extremal Reissner-Nordström solution, $GM^2 = Q^2 + P^2$. There is a naked singularity at the origin, and an infinite number of external regions.

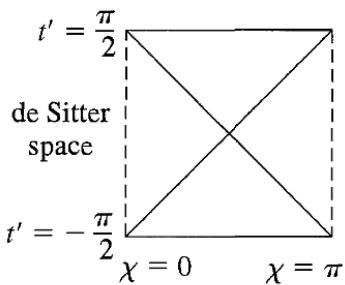


FIGURE 8.1 Conformal diagram for de Sitter spacetime. Spacelike slices are three-spheres, so that points on the diagram represent two-spheres except for those at left and right edges, which are points.

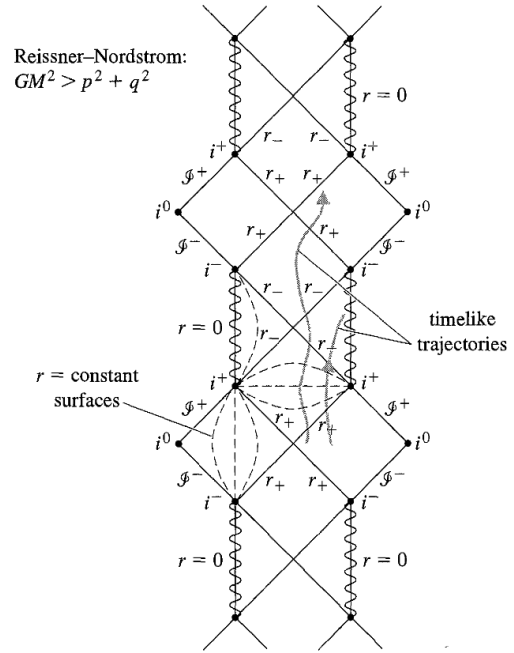


FIGURE 6.4 Conformal diagram for Reissner-Nordström solution with $GM^2 > Q^2 + P^2$. There are an infinite number of copies of the region outside the black hole.

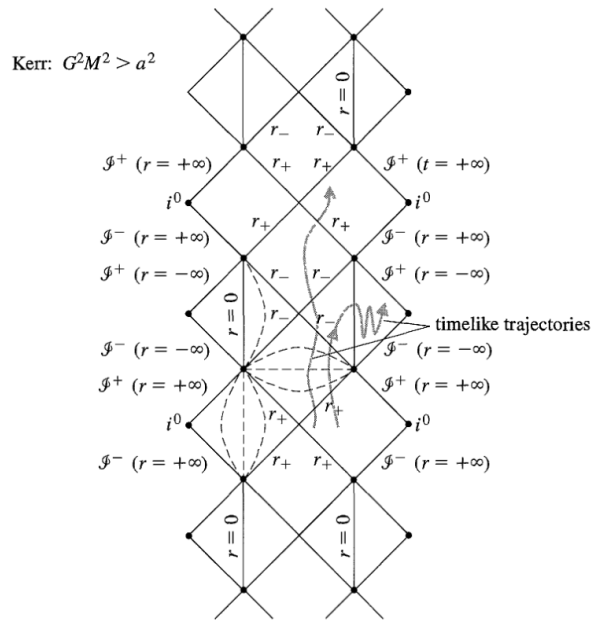


FIGURE 6.8 Conformal diagram for the Kerr solution with $G^2 M^2 > a^2$. As with the analogous charged solution, there are an infinite number of copies of the region outside the black hole.

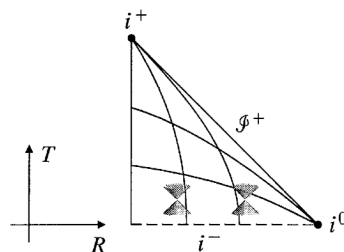


FIGURE H.5 Conformal diagram for a Robertson-Walker universe with $a(t) \propto t^q$ for $0 < q < 1$. The dashed line represents the singularity at $t = 0$ (which also corresponds to $T = 0$).