Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del miércoles 2/9: *Guía 1: Relatividad especial.*[*]

El único modo en que estas notas pueden servir de algo es si después de leerlas son capaces de reconstruir todas las cuentas por sí mismos. Si se limitan a leerlas, no van a sacar ningún provecho.

■ **Problema 8**. Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ forman el tensor de campo electromagnético

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{1}$$

donde $A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$ es el cuadrivector potencial electromagnético.

a) Encuentre cómo aparece la fuerza de Lorentz sobre una carga,

$$\mathbf{f} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{B}\right), \tag{2}$$

en la *cuadrifuerza*

$$K^\alpha = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta U^\beta. \tag{3}$$

b) Deduzca la ley de transformación de la fuerza $\mathbf{f}$ en Relatividad Especial.

c) Concluya que la fuerza $\mathbf{f}$ se transforma igual que $d\mathbf{p}/dt$.

■ **Solución**. a) La cuadrifuerza de la que habla el ejercicio es la que aparece en la ecuación covariante de movimiento

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = K^\alpha. \tag{4}$$

Se trata de establecer una relación entre esta ecuación y la ecuación de movimiento relativista escrita en notación tridimensional

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \tag{5}$$

Recordemos que el par de ecuaciones de Maxwell homogéneas,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7}$$

permitían introducir un potencial vector $\mathbf{A}$ y un potencial escalar ϕ tales que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{9}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

Los potenciales no están unívocamente definidos. Una transformación del tipo

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\psi, \tag{10}$$

$$\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{11}$$

deja los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ inalterados.

Los potenciales ϕ y $\mathbf{A}$ son las componentes del cuadrivector potencial,

$$A^{\alpha} = (\phi, \mathbf{A}). \tag{12}$$

Con esta notación el supraíndice α sólo está indicando la clase de objeto que es A, y no se refiere a ninguna componente en particular. Necesitaremos también el vector covariante

$$A_{\alpha} = (-\phi, \mathbf{A}). \tag{13}$$

Recordar que en el espacio de Minkowski usamos la convención $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. En notación cuadrivectorial la transformación de gauge se lee como

$$A_{\alpha} \to A_{\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}. \tag{14}$$

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ no son las componentes de ningún cuadrivector. Aparecen en realidad como componentes de un tensor de segundo orden, llamado tensor de campo electromagnético o tensor de Faraday,

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \tag{15}$$

Como regla mnemotécnica, recordar que **el orden de los índices en $F_{\alpha\beta}$** es igual al orden en el que se toman las derivadas. Es fácil verificar que el tensor $F_{\alpha\beta}$ es independiente de la elección del gauge. En efecto, ante el cambio (14) el tensor se transforma como

$$F_{\alpha\beta} \to \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}\right) - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{16}$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\beta}}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta\partial\alpha} = 0. \tag{17}$$

Como el tensor $F_{\alpha\beta}$ es antisimétrico, sólo necesitamos calcular seis componentes. Teniendo en cuenta que $x^0 = ct$ y que $A_0 = -\phi$, por un lado tenemos

$$F_{0i} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i} = -E_i. \tag{18}$$

Por otro lado,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \epsilon_{abk}\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_b}{\partial x^a}. \tag{19}$$

Para escribir los dos términos como uno solo, aquí hemos usado la siguiente igualdad

$$\epsilon_{abk}\epsilon_{ijk} = \delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}. \tag{20}$$

Notar que en el primer producto de deltas, los índices aparecen en el orden natural, mientras que en el segundo producto aparecen cruzados.

Ahora bien, volviendo a la expresión (19),

$$\epsilon_{abk}\frac{\partial A_b}{\partial x^a} = (\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k. \tag{21}$$

Luego,

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k. \tag{22}$$

Escrito en forma matricial tenemos entonces

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Si subimos el primer índice obtenemos

$$F^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Si subimos los dos índices resulta

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

(Notar que la matriz de 3×3 que contiene a $\mathbf{B}$ nunca cambia). Los signos en estas matrices dependen de la convención usada para la métrica. A modo de comparación vean la ecuación (1.69) del libro de Carroll y la ecuación (23.5) del libro de Landau y Lifshitz.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}. \quad (1.69) \qquad F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (23.5)$$

(Carroll) (Landau-Lifshitz)

Ahora calculemos explícitamente las componentes de la cuadrifuerza,

$$K^\alpha = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta U^\beta. \tag{26}$$

Teniendo en cuenta que la cuadrivelocidad es

$$U^\alpha = \gamma(u)(c, \mathbf{u}), \tag{27}$$

para las componentes espaciales encontramos

$$\begin{aligned} K^i = \frac{q}{c}\left(F^i{}_0 U^0 + F^i{}_j U^j\right) &= \frac{q}{c}\gamma(u)\left[cE_i + \epsilon_{ijk} B_k u_j\right] \\ &= \gamma(u) q \left[E_i + \frac{1}{c}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Es decir, las componentes espaciales de K^α son iguales a la fuerza de Lorentz multiplicada por el factor relativista $\gamma(u)$,

$$K^i = \gamma(u) f_i. \tag{29}$$

Por otro lado, la componente temporal de la cuadrifuerza es

$$K^0 = \frac{q}{c} F^0{}_i U^i = \gamma(u)\, \frac{q}{c}\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}. \tag{30}$$

Notando que la fuerza magnética es normal a la velocidad, esto es equivalente a decir

$$K^0 = \gamma(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{c}. \tag{31}$$

Dejemos entonces escrita la cuadrifuerza en términos de la fuerza y la velocidad

$$K^\alpha = \gamma(u) \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{c}, \mathbf{f}\right). \tag{32}$$

b) Los resultados anteriores implican que, ante un boost, las que deben transformar como las componentes espaciales de un cuadrivector no son las componentes de la fuerza sino $\gamma(u)$ por las componentes de la fuerza. Y además el cuadrivector debe completarse con la componente temporal dada por la ec. (31). Tomando por caso un boost en la dirección x con velocidad v, deberíamos tener, para la componente x,

$$\left[\gamma(u) f_x\right]' = \gamma(v) \left[\gamma(u) f_x - \beta \gamma(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{c}\right] = \gamma(v)\gamma(u) \left(f_x - \beta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}}{c}\right), \tag{33}$$

y para las componentes y y z

$$\Big[\gamma(u)f_y\Big]' = \gamma(u)f_y, \qquad \Big[\gamma(u)f_z\Big]' = \gamma(u)f_z. \tag{34}$$

Si las transformaciones son consistentes, debería ser

$$\Big[\gamma(u)f_i\Big]' = \gamma(u)'\,f_i' = \gamma(u')f_i'. \tag{35}$$

De modo que, dadas las ecs. (33) y (34), podemos despejar f_i' de la siguiente manera

$$f_i' = \frac{\Big[\gamma(u)f_i\Big]'}{\gamma(u)'}. \tag{36}$$

Sabemos cómo transforma el factor $\gamma(u)$, pues es proporcional a la componente temporal de la velocidad

$$c\gamma(u)' = \gamma(v)\Big[c\gamma(u) - \beta\gamma(u)u_x\Big]. \tag{37}$$

Es decir

$$\gamma(u)' = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right). \tag{38}$$

Luego, aplicando la relación (36) junto con la ec. (33), debe ser

$$f_x' = \frac{f_x - \beta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}/c}{1 - vu_x/c^2}. \tag{39}$$

Análogamente, para las componentes transversales se obtiene

$$f_y' = \frac{f_y}{\gamma(v)(1 - vu_x/c^2)}, \qquad f_z' = \frac{f_z}{\gamma(v)(1 - vu_x/c^2)}. \tag{40}$$

Está claro que hemos demostrado estas leyes de transformación partiendo de la fuerza electromagnética. La generalización a todas las clases de fuerza se basa en el hecho de que si una partícula está en equilibrio en un dado sistema, y ese equilibrio involucra fuerzas electromagnéticas y fuerzas de otras clases, para que en todos los sistemas inerciales la partícula esté en equilibrio, las fuerzas de las otras clases deben transformar igual que la fuerza electromagnética. En otras palabras, a cada fuerza $\mathbf{f}$ debe corresponder un cuadrivector de la forma (32),

$$K^\alpha = \gamma(u)\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}}{c}, \mathbf{f}\right). \tag{41}$$

c) En mecánica clásica no relativista se define la fuerza como $d\mathbf{p}/dt$. Como primera generalización, al pasar a la mecánica relativista deberíamos reemplazar el antiguo $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ por su expresión relativista

$$\mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u}. \tag{42}$$

Queremos encontrar cómo transforma $d\mathbf{p}/dt$. Analicemos por separado la manera en que transforman $d\mathbf{p}$ y dt.

Primero, sabemos que $\mathbf{p}$ es la parte espacial del cuadrivector impulso, cuya componente temporal es $p^0 = E/c$. Por lo tanto sabemos cómo transforma:

$$p'_x = \gamma(v)(p_x - \beta E/c), \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z. \tag{43}$$

Sus diferenciales transforman según

$$dp'_x = \gamma(v)\big(dp_x - \beta\, dE/c\big), \qquad dp'_y = dp_y, \qquad dp'_z = dp_z. \tag{44}$$

Necesitamos calcular dE. Para eso usemos que

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4. \tag{45}$$

De modo que

$$E dE = c^2\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}. \tag{46}$$

Pero, por otro lado, puesto que

$$E = \gamma(u)mc^2, \tag{47}$$

resulta

$$\mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} = \frac{E}{c^2}\mathbf{u}. \tag{48}$$

En definitiva, las ecs. (46) y (48) implican

$$dE = \mathbf{u}\cdot d\mathbf{p}. \tag{49}$$

Así encontramos que

$$dp'_x = \gamma(v)\big(dp_x - \beta\mathbf{u}\cdot d\mathbf{p}/c\big). \tag{50}$$

Ahora tenemos que ver cómo transforma dt. Esto es más fácil:

$$dt' = d\Big[\gamma(v)(t - vx/c^2)\Big] = \gamma(v)\big(dt - v dx/c^2\big) = \gamma(v)\big(1 - u_x v/c^2\big)dt. \tag{51}$$

Reuniendo todos los resultados, encontramos

$$\dot{p}'_x = \frac{\dot{p}_x - \beta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{p}}/c}{1 - u_x v/c^2}, \qquad \dot{p}'_y = \frac{\dot{p}_y}{\gamma(v)(1 - u_x v/c^2)}, \qquad \dot{p}'_z = \frac{\dot{p}_z}{\gamma(v)(1 - u_x v/c^2)}. \tag{52}$$

El objetivo del problema era ver que $\dot{\mathbf{p}}$ transformaba igual que la fuerza. Habíamos mostrado en su momento que

$$f'_x = \frac{f_x - \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}/c}{1 - v u_x/c^2}, \qquad f'_y = \frac{f_y}{\gamma(v)(1 - v u_x/c^2)}, \qquad f'_z = \frac{f_z}{\gamma(v)(1 - v u_x/c^2)}. \tag{53}$$

Se verifica entonces lo que queríamos demostrar. Esto garantiza que si, a semejanza de la mecánica no relativista, formamos la ecuación

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \tag{54}$$

ésta tendrá las propiedades de transformación adecuadas.

Un comentario al margen antes de pasar de problema. Noten en que mecánica relativista siguen siendo válidas la ecuación para la variación temporal del impulso,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \tag{55}$$

y la ecuación para la variación de la energía, que es una relación entre la potencia y el trabajo

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}. \tag{56}$$

■ **Problema 9**. La acción de una carga q de masa m en un campo electromagnético A_α es

$$S = -mc \int \sqrt{-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta} + \frac{q}{c} \int A_\alpha\, dx^\alpha. \tag{57}$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Muestre que $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ y $K^\alpha = m a^\alpha$.

■ **Solución**. Debemos calcular la variación de la acción, con extremos fijos, ante un cambio en la trayectoria de la partícula

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu. \tag{58}$$

Escribiremos

$$S = S_1 + S_2, \tag{59}$$

donde S_1 es la acción de la partícula libre y S_2 es el término de interacción,

$$S_1 = -mc \int \sqrt{-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta}, \tag{60}$$

$$S_2 = \frac{q}{c} \int A_\alpha\, dx^\alpha. \tag{61}$$

Lo más cómodo es prescindir de una parametrización de las integrales y hacer las variaciones directamente sobre las expresiones (60) y (61). Así, la variación de S_1 se calcula reemplazando la trayectoria perturbada y conservando términos de hasta orden δx^μ:

$$\begin{aligned} S_1 + \delta S_1 &= -mc \int \sqrt{-g_{\alpha\beta}(dx^\alpha + d\delta x^\alpha)(dx^\beta + d\delta x^\beta)} \\ &= S_1 - mc \int \frac{1}{2\sqrt{-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta}} \left[-g_{\alpha\beta} \left(d\delta x^\alpha dx^\beta + dx^\alpha d\delta x^\beta \right) \right]. \end{aligned} \tag{62}$$

Aprovechamos la simetría de $g_{\alpha\beta}$ para reescribir la expresión entre corchetes como un sólo término

$$\delta S_1 = mc \int \frac{1}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta}}\, g_{\alpha\beta}\, dx^\beta d\delta x^\alpha. \tag{63}$$

Ahora usamos que

$$\sqrt{-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta} = c\, d\tau, \tag{64}$$

de modo que resulta

$$\delta S_1 = m \int g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau}\, d\delta x^\alpha. \tag{65}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta la anulación de las variaciones en los extremos,

$$\delta S_1 = -m \int g_{\alpha\beta}\, d\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) \delta x^\alpha. \tag{66}$$

Finalmente, parametrizamos la integral mediante el tiempo propio, multiplicando y dividiendo por $d\tau$,

$$\delta S_1 = -m \int \frac{d\tau}{d\tau}\, g_{\alpha\beta}\, d\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) \delta x^\alpha = -m \int d\tau\, g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}\, \delta x^\alpha. \tag{67}$$

Si toda la acción fuera S_1, teniendo en cuenta la arbitrariedad de δx^α, igualando a cero concluiríamos que

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = 0. \qquad \text{(partícula libre)} \tag{68}$$

Pero S_1 no es toda la acción. Aún tenemos que calcular la variación de S_2. Partimos de su definición,

$$S_2 = \frac{q}{c} \int A_\alpha(x^\beta)\, dx^\alpha. \tag{69}$$

Aquí se entiende que la notación $A_\alpha(x^\beta)$ significa A_α como función del cuadrivector x^β, y no como función de la componente β del cuadrivector posición. de manera que

$$S_2 + \delta S_2 = \frac{q}{c} \int A_\alpha\big(x^\beta + \delta x^\beta\big)\ d(x^\alpha + \delta x^\alpha). \tag{70}$$

Conservando términos de hasta orden δx^μ resulta

$$S_2 + \delta S_2 = S_2 + \frac{q}{c} \int \left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, \delta x^\beta\, dx^\alpha + A_\alpha(x^\beta) d\delta x^\alpha\right]. \tag{71}$$

Integrando por partes el segundo término dentro de la integral, queda

$$\delta S_2 = \frac{q}{c} \int \left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, \delta x^\beta\, dx^\alpha - dA_\alpha(x^\beta)\, \delta x^\alpha\right]. \tag{72}$$

Pero

$$dA_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta. \tag{73}$$

Entonces

$$\delta S_2 = \frac{q}{c} \int \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, \delta x^\beta\, dx^\alpha - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\, dx^\beta\, \delta x^\alpha\right). \tag{74}$$

Para que en el integrando nos quede una sola expresión proporcional a δx^α, en el primer término dentro del corchete podemos intercambiar β con α, puesto que ambos son índices mudos. Así resulta

$$\delta S_2 = \frac{q}{c} \int \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx^\beta \delta x^\alpha. \tag{75}$$

Ahora parametrizamos la integral mediante el tiempo propio, como hicimos antes, multiplicando y dividiendo por $d\tau$. Obtenemos

$$\delta S_2 = \frac{q}{c} \int d\tau \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right) \frac{dx^\beta}{d\tau}\, \delta x^\alpha. \tag{76}$$

Introduciendo el tensor del campo electromagnético, también llamado tensor de Faraday,

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{77}$$

la variación δS_2 queda escrita de un modo muy compacto

$$\delta S_2 = \frac{q}{c} \int d\tau\, F_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau}\, \delta x^\alpha. \tag{78}$$

En definitiva, reuniendo los resultados para δS_1 y δS_2, queda

$$\delta S = \int d\tau \left(-m g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \frac{q}{c} F_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) \delta x^\alpha. \tag{79}$$

Igualando a cero el paréntesis que multiplica a δx^α, resulta la ecuación de movimiento

$$m g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = \frac{q}{c} F_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{80}$$

Subiendo el índice α y usando que $g^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta$ obtenemos la expresión más usual:

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta U^\beta. \tag{81}$$

A la izquierda figura el cuadrivector aceleración multiplicado por la masa. A la derecha, el cuadrivector fuerza de Lorentz; esto es,

$$m a^\alpha = K^\alpha. \tag{82}$$

En el problema anterior mostramos que la parte espacial de K^α era $\gamma(u)\mathbf{f}$, donde $\mathbf{f}$ es la fuerza de Lorentz. Por otro lado

$$m a^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = \gamma(u) \frac{dp^\alpha}{dt}. \tag{83}$$

Finalmente, la parte espacial de la ec. (82) es, según lo que se quería demostrar,

$$\gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma(u)\mathbf{f} \quad \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \tag{84}$$

■ **Problema 12**. El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^\alpha{}_\lambda F^{\beta\lambda} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right). \tag{85}$$

Muestre que este tensor tiene traza nula. Usando las ecuaciones de Maxwell pruebe que el tensor de energía-momento electromagnético se conserva en una región libre de cargas.

■ **Solución**. Que la traza es nula es muy fácil de demostrar. Explícitamente,

$$T^\alpha{}_\alpha = \frac{1}{4\pi} \left(F^\alpha{}_\lambda F_\alpha{}^\lambda - \frac{1}{4} g^\alpha{}_\alpha F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right). \tag{86}$$

La traza de la métrica de Minkowski es (¡atención aquí!)

$$g^\alpha{}_\alpha = \delta^\alpha{}_\alpha = 4. \tag{87}$$

Luego, moviendo algunos índices

$$T^\alpha{}_\alpha = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\lambda} - F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right). \tag{88}$$

Pero todos los índices son mudos, de forma que el resultado es idénticamente cero,

$$T^{\alpha}{}_{\alpha} = 0. \tag{89}$$

El segundo objetivo es demostrar que, en ausencia de fuentes, se satisface la ecuación de conservación cuadrivectorial

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{90}$$

La interpretación de esta ecuación no depende del sistema físico. Lo que digamos ahora será válido en general. La componente cero de la ec. (90) representa la conservación de la energía: $T^{00} = \rho$ es la densidad de energía y cT^{0i} es la densidad de corriente de energía en la dirección i: $T^{0i} = S_i/c$. De modo que, en notación tridimensional, es reconocible la ecuación de continuidad usual:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^{i}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \tag{91}$$

Las componentes espaciales de la ec. (90) expresan la conservación del impulso. Las componentes T^{i0} son c veces la densidad de impulso en la dirección i, $T^{i0} = cg_i$, en tanto que las componentes $T^{ij} = \sigma_{ij}$ representan la componente j de la densidad de corriente de la componente i del impulso. La respectiva ecuación de conservación en notación tridimensional se lee como

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^{j}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^{j}} = 0. \tag{92}$$

El tensor energía-momento es simétrico, $T^{i0} = T^{0i}$. Esto implica que lo que identificamos como la densidad de la componente i del impulso es igual a $1/c^2$ por la densidad de corriente de energía en la dirección i. Para campos electromagnéticos, este es un resultado conocido de Física Teórica 1,

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}, \tag{93}$$

pero en realidad es un resultado general. Vale para cualquier sistema de campos y partículas. Siempre que hay un flujo de energía, existe también una densidad de impulso, relacionados entre sí como en la ecuación anterior.

Volviendo al tensor de energía-impulso del campo electromagnético, queremos ver que

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0, \tag{94}$$

donde

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha}{}_{\lambda}F^{\beta\lambda} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}\,F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right). \tag{95}$$

Las cuentas son más sencillas si bajamos el índice β y nos proponemos demostrar que

$$\frac{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0, \tag{96}$$

con

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha}{}_{\lambda}F_{\beta}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\lambda}F_{\beta\lambda} - \frac{1}{4}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right). \tag{97}$$

Debido a que vamos a calcular las derivadas del tensor $F^{\alpha\beta}$, será útil saber de antemano qué ecuaciones diferenciales satisface. Éstas son las ecuaciones de Maxwell escritas en notación covariante. Hay dos conjuntos de ecuaciones. El primer conjunto de ecuaciones es (notar la rotación cíclica de los índices)

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0, \tag{98}$$

y el segundo,

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{4\pi}{c}j^{\alpha}. \tag{99}$$

Dadas las ecuaciones anteriores podríamos ya mismo calcular la cuadridivergencia de $T^{\alpha}{}_{\beta}$. Sin embargo, hagamos una pausa para ver cómo las ecuaciones (98) y (99) reproducen las ecuaciones de Maxwell escritas en su forma usual. El que quiera omitir la siguiente sección puede pasar directamente a la ec. (122).

Las ecuaciones de Maxwell

Tal vez la forma de las ecuaciones de Maxwell que les resulte más familiar sea

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \\ \nabla\times\mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{100}$$

Queremos ver cómo estas ecuaciones están contenidas en las ecuaciones covariantes (98) y (99). Empecemos con la ec. (98),

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{101}$$

Podemos verificar que estas ecuaciones corresponden al par de ecuaciones de Maxwell homogéneas. En primer lugar notemos que, debido a la antisimetría de $F_{\alpha\beta}$, únicamente son distintas de cero las componentes de la ecuación anterior que tienen los 3 índices distintos. Por ejemplo, si fuera $\alpha = \beta$, quedaría

$$\frac{\partial F_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \qquad \text{[sin suma]}. \tag{102}$$

El primer término es cero automáticamente, y los otros dos se cancelan entre sí

$$\frac{\partial F_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial F_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial F_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \qquad \text{[sin suma]}. \tag{103}$$

De modo que podemos escribir cuatro ecuaciones distintas, aquellas cuyos índices valen

- $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\lambda = 2$;
- $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\lambda = 3$;
- $\alpha = 0$, $\beta = 2$ y $\lambda = 3$;
- $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\lambda = 3$.

Es fácil verificar que cualquier permutación de cada terna de valores lleva a las mismas ecuaciones.

Para la primera distribución de índices resulta la ecuación

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^{1}} = 0. \tag{104}$$

Teniendo en cuenta que

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{105}$$

la ecuación anterior se lee como

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0. \tag{106}$$

Es decir,

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{107}$$

De igual modo se verifica que las otras distribuciones de índices en donde uno de ellos es temporal completan la terna de ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{108}$$

Por último, cuando $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\lambda = 3$ la ec. (101),

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} = 0, \tag{109}$$

se escribe como

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = 0. \tag{110}$$

De nuevo, teniendo en cuenta cómo aparecen los campos en el tensor $F_{\alpha\beta}$, resulta

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0. \tag{111}$$

Es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{112}$$

Vemos así que la ec. (101) nos da un par de ecuaciones de Maxwell.

El otro par corresponde a la ecuación no homogénea (99),

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \tag{113}$$

donde el cuadrivector corriente es

$$j^\alpha = (c\rho, \mathbf{j}). \tag{114}$$

La componente temporal de la ec. (113) es

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c} j^0. \tag{115}$$

Teniendo en cuenta la forma contravariante del tensor F

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{116}$$

queda

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{117}$$

Por otro lado, la componente 1 de la ec. (113) resulta

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c} j^1. \tag{118}$$

Luego,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}j_x, \tag{119}$$

que puede reescribirse como

$$(\nabla\times\mathbf{B})_x=\frac{4\pi}{c}j_x+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{120}$$

Análogamente, las componentes 2 y 3 de la ec. (113) completan la terna de ecuaciones

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{121}$$

Así, la ec. (113) proporciona el segundo par de ecuaciones de Maxwell en notación tridimensional.

Continuación

Resumiendo: queremos verificar que, en ausencia de fuentes,

$$\frac{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}=0, \tag{122}$$

donde

$$T^{\alpha}{}_{\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\lambda}F_{\beta\lambda}-\frac{1}{4}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right), \tag{123}$$

y donde $F^{\alpha\beta}$ satisface las ecuaciones (98) y (99) con $j^{\alpha}=0$,

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}}=0, \tag{124}$$

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}=0. \tag{125}$$

Entonces,

$$\frac{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial F^{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}}F_{\beta\lambda}+F^{\alpha\lambda}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{1}{4}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,\frac{\partial F^{\lambda\rho}}{\partial x^{\alpha}}F_{\lambda\rho}-\frac{1}{4}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{126}$$

Ahora bien, los últimos dos términos son iguales, pues podemos subir y bajar los dos pares de índices sin alterar el resultado (recordar que $A_{\mu}B^{\mu}=A^{\mu}B_{\mu}$),

$$\frac{\partial F^{\lambda\rho}}{\partial x^{\alpha}}F_{\lambda\rho}=\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^{\alpha}}F^{\lambda\rho}. \tag{127}$$

Usando esto y aprovechando la delta de Kronecker, queda

$$\frac{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial F^{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}}F_{\beta\lambda}+F^{\alpha\lambda}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{1}{2}F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^{\beta}}\right). \tag{128}$$

En el primer término dentro del paréntesis aparece

$$\frac{\partial F^{\alpha\lambda}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial F^{\lambda\alpha}}{\partial x^\alpha}, \tag{129}$$

que es cero, debido a la ec. (125). Así,

$$\frac{\partial T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\lambda}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2}F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^\beta}\right). \tag{130}$$

Tomemos el primer término dentro del paréntesis. Renombrando α como ρ y usando la antisimetría de F,

$$F^{\alpha\lambda}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} = -F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho}. \tag{131}$$

Hasta ahora resulta entonces

$$\frac{\partial T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho} + \frac{1}{2}F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^\beta}\right). \tag{132}$$

Aquí parece que se acaba el camino, porque querríamos usar la ec. (124),

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} = 0, \tag{133}$$

y la ec. (132), a primera vista, no se le parece en nada. En realidad, renombrando índices mudos ($\lambda \leftrightarrow \rho$) y usando la antisimetría de F podemos escribir el primer término dentro del paréntesis en la ec. (132) de la siguiente manera:

$$F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho} = \frac{1}{2}\left(F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho} + F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho}\right) = \frac{1}{2}\left(F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\rho\beta}}{\partial x^\lambda} + F^{\lambda\rho}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho}\right). \tag{134}$$

No se pierdan en la primera igualdad; dice simplemente $x = \frac{1}{2}(x+x)$.

En definitiva,

$$\frac{\partial T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{8\pi}F^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial F_{\rho\beta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^\beta}\right), \tag{135}$$

que es igual a cero debido a la ec. (133). Esto completa la demostración.

Es interesante notar que si no hubiéramos supuesto la ausencia de fuentes, al final de todo habría sobrevivido un único término, que ustedes pueden rastrear:

$$\frac{\partial T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\alpha\lambda}}{\partial x^\alpha}F_{\beta\lambda}. \tag{136}$$

Usando la ec. (99),

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{4\pi}{c}j^\alpha, \tag{137}$$

obtenemos

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{c} F^{\beta}{}_{\lambda} j^{\lambda}. \tag{138}$$

Hay que comparar esto con la cuadrifuerza de Lorentz sobre una carga, que ya hemos visto en los problemas anteriores,

$$K^{\beta} = \frac{q}{c} F^{\beta}{}_{\lambda} U^{\lambda}. \tag{139}$$

Se ve entonces que la divergencia de $T^{\alpha\beta}$ está relacionada con la fuerza que producen los campos sobre las partículas. Si calculásemos la divergencia del tensor de energía-impulso del campo y las partículas volveríamos a encontrar un resultado nulo. Lo que se conserva es el tensor que tiene en cuenta todas las contribuciones.