Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020

Guía 6: *Ecuaciones de Einstein, solución de Schwarzschild.*

1. Según el *teorema de Birkhoff* la única solución de las ecuaciones de Einstein de vacío con simetría esférica es la geometría de Schwarzschild:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}} + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\big), \tag{1}$$

donde M es una constante de integración.

a) Use el teorema de Birkhoff para concluir que la geometría interior a una cáscara esférica es minkowskiana y que no existe radiación monopolar gravitatoria.

b) Para comprender la estructura causal de la geometría de Schwarzschild, dibuje conos de luz en un gráfico ct vs. r. Tenga en cuenta que si $r < 2GM/c^2$, la coordenada r es temporal; en esta región elija los conos futuros en forma tal que un rayo de luz no pueda traspasar el *horizonte de eventos* $r_S = 2GM/c^2$.

c) Una fuente de luz fija en la posición θ_f, φ_f y r_f, con $r_f > r_S$, emite con frecuencia ν_f. Muestre que un observador fijo en θ_f, φ_f y r_{obs}, con $r_{obs} > r_f$, ve la frecuencia corrida al rojo (corrimiento al rojo gravitatorio).

d) ¿Cuáles son las cuadrifuerzas necesarias para mantener a la fuente y al observador en sus respectivas posiciones?

2. Considere el paraboloide de revolución del espacio euclídeo tridimensional generado por la parábola

$$r(z) = r_S + \frac{z^2}{4r_S} \tag{2}$$

(aquí r y z son las coordenadas cilíndricas habituales y r_S es un parámetro). Calcule la distancia euclídea sobre el paraboloide y compare con la métrica de Schwarzschild.

3. Considere la geometría de Schwarzschild, escrita como en el Problema 1.

a) Defina una nueva coordenada radial $\bar{r}$ a través de la expresión

$$r = \bar{r}\left(1 + \frac{GM}{2c^2\bar{r}}\right)^2 \tag{3}$$

y halle la nueva forma de la métrica.

b) Defina las coordenadas

$$x = \bar{r}\cos\varphi\ \sin\theta, \qquad y = \bar{r}\sin\varphi\ \sin\theta, \qquad z = \bar{r}\cos\theta, \tag{4}$$

de modo que

$$d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{5}$$

Estas coordenadas se denominan *isotrópicas*. Halle la expresión de la métrica en estas coordenadas y, luego de tomar el límite $\bar{r} \to \infty$, compare con la geometría correspondiente a la región de campo débil estudiada en la Guía 5.

4. Demostrar que la órbita circular de una partícula en la geometría de Schwarzschild satisface la tercera ley de Kepler:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}. \tag{6}$$

5. a) Partiendo de $p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0$ y aprovechando que p_t es una constante de movimiento, obtenga una ecuación de conservación de la energía para una partícula que cae radialmente en la geometría de Schwarzschild. Muestre que la velocidad $dr/d\tau$ cumple la misma ecuación que la velocidad radial en la teoría de Newton.

   b) Muestre que el tiempo propio de viaje entre un r finito y la singularidad $r = 0$ es finito.

   c) Obtenga $r(t)$ para una partícula inicialmente en reposo en el infinito.

6. Una partícula de masa m cae radialmente hacia el horizonte de un agujero negro de Schwarzschild de masa M siguiendo una geodésica con $p_0 = -0{,}95\, mc$.

   a) Encuentre el tiempo propio para viajar desde $r = 3GM/c^2$ hasta $r = 2GM/c^2$.

   b) Encuentre el tiempo propio para viajar desde $r = 2GM/c^2$ hasta $r = 0$.

   c) Cuando pasa por $r = 2{,}001GM/c^2$ la partícula envía un fotón radialmente a un observador distante estacionario (r_{obs} = constante). Calcule el corrimiento al rojo de la frecuencia del fotón. No olvide tener en cuenta la contribución proveniente del efecto Doppler debido a la velocidad de la partícula.

7. a) Escriba la ecuación para la órbita de una partícula en la geometría de Schwarzschild y encuentre los rangos de las constantes de integración E y L para los cuales la órbita es ligada o de tipo hiperbólico.

   b) ¿Cuál es el radio de la órbita circular estable más próxima al horizonte de eventos?

8. Estudie las trayectorias de los fotones en la geometría de Schwarzschild. Demuestre que existe una órbita circular para fotones. Muestre que su radio es $r_f = 3GM/c^2$ y que dicha órbita es inestable. Ayuda: utilice que $p_\mu p^\mu = 0$ y aproveche las magnitudes conservadas.

9. El conjunto de todas las órbitas inestables de fotones en la geometría de Schwarzschild forma una esfera de radio $r_f = 3GM/c^2$ que se denomina esfera de fotones. Muestre que el parámetro de impacto de un fotón proveniente del infinito debe ser $b_f = 3\sqrt{3}\ GM/c^2$ para que incida justo sobre la esfera de fotones.

   Nota: los rayos de luz que tengan un parámetro de impacto menor que b_f serán atrapados, de modo que el radio aparente de un agujero negro en un fondo luminoso es $R_{ap} = b_f = 3\sqrt{3}\ GM/c^2$. La región definida por $r < R_{ap}$ resulta entonces completamente oscura, correspondiendo a la llamada *sombra* del agujero negro.

10. La "singularidad" de la métrica de Schwarzschild en $r = 2GM/c^2$ no resulta ser física sino una patología del sistema de coordenadas. Por lo tanto, resulta apropiado hallar un nuevo sistema de coordenadas que evite dicha patología. A continuación se dan algunos ejemplos (en unidades geometrodinámicas: $c = G = 1$). Para cada uno de ellos, verifique la nueva expresión para la métrica y realice un diagrama espacio-tiempo mostrando los conos de luz.

a) Coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$\tilde{U} = t - r^*, \quad \tilde{V} = t + r^*, \quad \text{con} \quad r^* = r + 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|. \tag{7}$$

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes $(r, \tilde{V}, \theta, \varphi)$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}\, dr + r^2 d\Omega^2. \tag{8}$$

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes $(r, \tilde{U}, \theta, \varphi)$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{U}^2 - 2d\tilde{U}\, dr + r^2 d\Omega^2. \tag{9}$$

b) Coordenadas de Kruskal-Szekeres (v, u, θ, φ):

Si $r > 2M$:

$$\begin{cases} u = M\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \\ v = M\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \end{cases}$$

Si $r < 2M$:

$$\begin{cases} u = M\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \\ v = M\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Con

$$ds^2 = -\frac{32M}{r} e^{-r/2M} \left(dv^2 - du^2\right) + r^2 d\Omega^2. \tag{11}$$

11. Es trabajoso (pero no difícil) ver que las componentes no nulas del tensor de Riemann correspondiente a la geometría de Schwarzschild (en unidades $c = G = 1$) son

$$R^{t}{}_{rtr} = -\frac{2M}{r^3}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \tag{12}$$

$$R^{t}{}_{\theta t \theta} = \frac{R^{t}{}_{\varphi t \varphi}}{\sin^2\theta} = \frac{M}{r}, \tag{13}$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{2M\sin^2\theta}{r}, \tag{14}$$

$$R^{r}{}_{\theta r \theta} = \frac{R^{r}{}_{\varphi r \varphi}}{\sin^2\theta} = -\frac{M}{r}, \tag{15}$$

y aquellas obtenidas por simetría. La divergencia de estas componentes en $r = 0$ no garantiza la existencia de una singularidad, ya que podría ser sólo una patología de las coordenadas. Calcule el invariante de Kretschmann, definido por

$$K = R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{16}$$

y utilícelo para mostrar que la singularidad en $r = 0$ es real y no un problema de las coordenadas.

Nota: Recuerde que los escalares no dependen del sistema de coordenadas utilizado.

12. Una estrella tiene un radio mayor que el radio de Schwarzschild correspondiente a su masa. La geometría exterior a la estrella corresponde entonces a la métrica de Schwarzschild. Encuentre la solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el interior de un fluido ideal con $\rho =$ constante. Esta solución corresponde a un modelo sencillo, aunque poco realista, del interior de una estrella (ver *A first course in General Relativity*, B. F. Schutz, Capítulo 10).