**Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020**

**Guía 7**: *Cosmología. Otros tópicos.*

1. Considere un espacio-tiempo cuyo intervalo es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\ell^2, \tag{1}$$

donde $d\ell^2$ es un elemento de arco isótropo y homogéneo (cada hipersuperficie $t =$ constante es un espacio de 3 dimensiones isótropo y homogéneo). Considere dos puntos $P$ y $Q$ de coordenadas espaciales fijas.

a) Verifique que dos partículas libremente gravitantes inicialmente en reposo en $P$ y $Q$ permanecerán en $P$ y $Q$.

b) Muestre que la velocidad relativa entre los puntos, debida a que $a(t)$ cambia con $t$, es proporcional a la distancia entre los mismos.

c) Calcule el corrimiento de frecuencia

$$z = \frac{\nu_{\text{fuente}} - \nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{obs}}} \tag{2}$$

para un rayo de luz emitido en una galaxia en $P$ y recibido en otra galaxia en $Q$. Muestre que si $z \ll 1$ es

$$z \approx \frac{1}{c} H\sigma \approx \frac{1}{c}\dot{\sigma}, \tag{3}$$

donde $H$ es la "constante" de Hubble y $\sigma$ es la distancia entre las galaxias.

2. En la geometría del problema anterior plantee las ecuaciones de conservación $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ para un fluido perfecto. Resuelva para una ecuación de estado $p = \omega\rho$, donde $p$ es la presión, $\rho$ es la densidad de energía y $\omega$ es una constante.

3. Dado un modelo de Friedman-Robertson-Walker espacialmente plano y sin constante cosmológica, con una ecuación de estado $p = \omega\rho$, demuestre que si $\omega \neq -1$ la densidad de energía $\rho$ es proporcional a $1/t^2$, donde $t$ es el tiempo.

4. Muestre que en un modelo de Friedman-Robertson-Walker espacialmente cerrado dominado por materia no relativista, un rayo de luz que viaja desde que el universo comienza a expandirse completa una vuelta al universo justo en el momento del recolapso. Mostrar también que en un modelo con radiación solamente, el rayo de luz sólo llega a recorrer medio universo antes de que éste recolapse.

5. Suponga un universo isótropo, homogéneo, con constante cosmológica $\Lambda$, conteniendo materia en forma de polvo (presión nula), y muestre que existe una solución cerrada estática para la métrica pero que es inestable (universo de Einstein).

6. Suponga un universo isótropo, homogéneo, espacialmente plano y vacío, con constante cosmológica $\Lambda$. La constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein equivale a un tensor de energía-momento isótropo

$$T_{\mu\nu} = -\left(\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}\right) g_{\mu\nu}, \tag{4}$$

que es el que correspondería a un fluido perfecto con ecuación de estado $p = -\rho$.

a) Muestre que la expansión es acelerada y obtenga la constante de Hubble $H$ (en este caso $H$ es verdaderamente constante).

b) Encuentre un sistema de coordenadas en el cual la solución hallada resulta estática (universo de de Sitter).

7. Calcule la distancia actual a la que se encuentra una fuente con $z = 1000$, suponiendo que el universo es espacialmente plano y está dominado por materia.

8. Mediciones recientes indican que el universo es espacialmente plano y que, en su etapa actual, se expande aceleradamente con

$$|q| = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \approx 0{,}6. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que la densidad de materia es $\rho/c^2 \approx 2{,}7 \times 10^{-27}$ kg m$^{-3}$ (incluyendo materia oscura), y que la presión de la materia es despreciable, obtenga el valor de la constante cosmológica que sería necesario para justificar el valor del parámetro de aceleración $q$.

9. La solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein, con masa $M$ y carga eléctrica $Q$, viene dada por la métrica de Reissner-Norsdström:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{6}$$

donde las unidades son tales que $G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$.

a) Verifique que esta métrica es solución de las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía-momento correspondiente a un campo eléctrico radial

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \tag{7}$$

y campo magnético nulo.

b) A partir de los ceros de $g_{00}$, vea que la geometría tiene dos horizontes, con radios $r_- < r_+$, denominados interior y exterior, respectivamente.

c) ¿Qué sucede con los horizontes si $|Q| = M$ y si $|Q| > M$?

10. Sea el espacio-tiempo cuya métrica viene dada por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + \left(r_0^2 + l^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{8}$$

donde $r_0$ es una constante, $-\infty < t < \infty$, $-\infty < l < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ y $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Nota: esta geometría se denomina agujero de gusano de Ellis.

a) Interprete el significado físico de las coordenadas $(ct, l, \theta, \varphi)$.

b) Describa el espacio-tiempo, indicando sus simetrías, si tiene o no horizontes, cómo son sus regiones asintóticas ($l \to \pm\infty$), etc.

c) A tiempo fijo, caracterice las superficies con $l =$ constante. ¿Qué sucede con el área de las mismas al ir modificando la coordenada $l$? En particular, analice el caso $l = 0$.

d) Verifique que las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$G^t{}_t = -G^l{}_l = G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi = \frac{r_0^2}{\left(r_0^2 + l^2\right)^2}. \tag{9}$$

Utilizando las ecuaciones de Einstein

$$G^\mu{}_\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\nu, \tag{10}$$

obtenga la densidad de energía $\rho$, la presión radial $p_r$ y la presión tangencial $p_t$, suponiendo un fluido cuyo tensor de energía-momento es

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}\{-\rho, p_r, p_t, p_t\}. \tag{11}$$

¿Qué sucede con los signos de la densidad de energía y de las presiones?

11. Considere la solución estática con simetría cilíndrica de las ecuaciones de Einstein en vacío, que (en unidades tales que $G = c = 1$) se puede escribir en la forma:

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\sigma} dt^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\sigma+2\sigma^2}\left(dr^2 + dz^2\right) + W_0^2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\sigma} r^2 d\theta^2, \tag{12}$$

donde $r_0 > 0$, $W_0$ y $\sigma$ son constantes.

a) Halle cuáles son las componentes que se conservan del cuadrimpulso de una partícula de masa $m$ que se mueve libremente en esta geometría.

b) Obtenga una expresión para la trayectoria de dicha partícula para un movimiento en un plano con $z =$ constante.

c) Encuentre los valores de $\sigma$ para los cuales es posible una trayectoria circular en dicho plano.

12. Los *diagramas de Penrose* se basan en la realización de una transformación de coordenadas que permite mapear el infinito en un valor finito. Son muy útiles para analizar propiedades *globales* del espacio-tiempo. Realizando los cambios de coordenadas que se indican (en unidades tales que $G = c = 1$), verifique el resultado para el intervalo, y realice los diagramas de Penrose graficando las distintas "regiones del infinito" en las coordenadas $(\psi, \xi)$.

    a) Espacio-tiempo de Minkowski. Coordenadas esféricas $(t, r, \theta, \varphi)$:

    $$t + r = C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi + \xi), \qquad t - r = C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \xi), \tag{13}$$

    $$ds^2 = \frac{C^2(-d\psi^2 + d\xi^2)}{4\cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi)\ \cos^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)} + r^2 d\Omega^2, \tag{14}$$

    donde $C$ es una constante arbitraria con unidades de longitud.

    b) Espacio-tiempo de Schwarzschild. Coordenadas de Kruskal-Szekeres $(v, u, \theta, \varphi)$:

    $$v + u = M \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi + \xi), \qquad v - u = M \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \xi), \tag{15}$$

    $$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \frac{e^{-r/2M}(-d\psi^2 + d\xi^2)}{4\cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi)\ \cos^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)} + r^2 d\Omega^2. \tag{16}$$

    Indique donde quedan los distintos infinitos (nulo, espacial, y temporal) y la singularidad.

    (Ver *Gravitation*, C. Misner, K. Thorne y J. A. Wheeler, p. 916-920).

13. El sistema binario J0737-3039 está formado por dos púlsares de unas 1,3 masas solares cada uno. Descubierto en el año 2003, se encuentra a unos 500 pc de nuestro planeta y el período de rotación del sistema es de 2,4 horas. Utilizando el modelo cuadrupolar y tomando órbitas circulares:

    a) Estime en cuánto se reduce en un año la distancia entre los dos púlsares, debido a la emisión de ondas gravitatorias.

    b) Calcule la amplitud con la que llegan a la Tierra las ondas gravitatorias provenientes del sistema binario.

    ($M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg, 1 pc $\approx$ 3,3 años luz $\approx 3{,}1 \times 10^{16}$ m).

14. a) Dos masas $m_1$ y $m_2$ giran alrededor de su centro de masa a distancias $r_1$ y $r_2$, respectivamente. Usando la aproximación cuadrupolar y la tercera ley de Kepler

$\omega^2 r^3 = GM$, con $r = r_1 + r_2$ y $M = m_1 + m_2$, muestre que la derivada temporal de la velocidad angular $\omega$ vale

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{G^5}{c^{15}} \mu^3 M^2 \omega^{11}, \tag{17}$$

donde $\mu = m_1 m_2 / M$ es la masa reducida.

b) Considere dos agujeros negros de 35 masas solares cada uno (¿cuál es el radio de Schwarzschild correspondiente?), separados inicialmente por 350 km. La distancia entre ambos se va reduciendo debido a la emisión de ondas gravitatorias, de modo que finalmente se unen para formar un único agujero negro. Aplique lo obtenido en la parte (a), calculando la frecuencia inicial y analizando su evolución temporal hasta el momento en que los horizontes se tocan. El aumento rápido de la frecuencia a medida que los agujeros negros se acercan se denomina "chirrido".

(El modelo utilizado es poco riguroso cuando los agujeros negros están tan cerca entre sí, pero permite entender algunos aspectos básicos de la física del proceso y hacer estimaciones razonables, para más detalles ver https://arxiv.org/abs/1608.01940).

15. La métrica de Kerr, en las coordenadas de Boyer-Lindquist, se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\rho^2} dt\, d\varphi \\ &+ \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right] d\varphi^2, \end{aligned} \tag{18}$$

con

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \qquad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{19}$$

donde $M$ es la masa, $a$ es el parámetro de rotación ($a = J/M$) y $G = c = 1$.

a) Probar que existen órbitas polares cuasi-circulares en la geometría de Kerr, es decir órbitas que pasan alternativamente por los polos norte y sur a una distancia radial coordenada fija.

b) ¿Cuál es el menor radio polar posible para estas órbitas?

16. Obtenga las ecuaciones de Einstein en el vacío extremando la acción de Einstein-Hilbert,

$$S[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, R. \tag{20}$$

¿Cómo se relaciona el tensor de energía-momento con la acción de la materia?

17. Una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío es la métrica de Taub-NUT, que en unidades $c = G = 1$ se escribe

$$ds^2 = -f(r)\big(dt + 2N\cos\theta\ d\varphi\big)^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \left(r^2 + N^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2\right), \tag{21}$$

con

$$f(r) = \frac{r^2 - 2Mr - N^2}{r^2 + N^2}, \tag{22}$$

donde $M$ y $N$ son constantes. Muestre que $M$ debe ser interpretada como una masa. ¿Cuál es la interpretación de $N$?