Integración y derivada de Lie

Facundo Rost

Clase 30/09 - Relatividad General - 2do cuatrimestre 2020

Resumen

Integración, Teorema de Stokes, y más sobre p-formas. Luego: Pullbacks, Pushforwards y Derivada de Lie.

Índice

1. Integración y más sobre p-formas **2**

1.1. p-formas 2

1.2. Integración, cosas básicas 2

1.2.1. Orientación 2

1.2.2. Integración 3

1.3. Teorema de Stokes 3

1.4. Más cosas sobre p-formas 5

2. Pullback y Pushforward **7**

2.1. En mapas suaves 7

2.2. En difeomorfismos 8

3. Derivada de Lie **10**

3.1. Familia de difeomorfismos asociados a un campo de vectores 10

3.2. Definición y propiedades de la derivada de Lie 11

A. Más detalle de pullbacks y pushforwards **13**

B. Algo más, muy muy extra **15**

1. Integración y más sobre p-formas

1.1. p-formas

Sobre p-formas, vimos (en la práctica y teórica) o veremos en esta clase:

- **Definición**, índices, **producto wedge**
- **Derivada exterior**
- **Divergencia** de un vector respecto a una n-forma $\tilde{\Omega}$ de volumen (que representa una noción de volumen)
- **Formas cerradas, exactas. Cohomología** (cuáles son las formas cerradas que no son exactas; está relacionado con la topología, o sea con propiedades globales de la variedad diferencial, no locales). Además, en la teórica: Lema de Poincaré, teorema de Frobenius.
- **Orientación, Integración, teorema de Stokes, teorema de la divergencia**
- Dada una métrica $g_{\mu\nu}$, nos podemos construir una noción de volumen asociada: El **volumen métrico** $\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge (\cdots) \wedge dx^n$, respecto al cual se puede definir una divergencia. También nos podemos construir la **estrella de Hodge** $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ que conecta p formas con $n-p$ formas. Es útil para escribir las **ecuaciones de Maxwell** en términos de formas (ver ejer 12 guía 3).

1.2. Integración, cosas básicas

1.2.1. Orientación

Una variedad (conexa) es **orientable** si se puede cubrir totalmente con cartas $\{(U_x, \varphi^i_x = x^i), (U_y, \varphi^j_y = y^j), \cdots\}$ tales que toda función de transición $y^j(x^i)$ entre cartas (o sea toda función de cambio de coordenadas, que es una función que va de un abierto de $\mathbb{R}^n$ a un abierto de $\mathbb{R}^n$) posee $J \equiv \det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) > 0$.

Vale que M es orientable con una cierta orientación si y sólo si existe una n-forma $\tilde{\omega} \in \Omega^n(M)$ (con $\dim(M) = n$) de volumen tal que $\tilde{\omega}|_p \neq 0$ para todo $p \in M$. La **n-forma** $\tilde{\omega}$ se llama **elemento de volumen**, y **determina la orientación** de la variedad.

La orientación elegida $\tilde{\omega}$ nos **determina también la orientación de bases de vectores y covectores**: Se dice que una base de vectores $\{\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ (y su base dual de covectores $\{\tilde{E}^1, \cdots, \tilde{E}^n\}$) es derecha o está bien orientada respecto de $\tilde{\omega}$ si vale $\tilde{\omega}(\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n) > 0$ para todo $p \in M$. O equivalentemente, si podemos escribir en dicha base a $\tilde{\omega} = \omega_{12\cdots n}(p)\ \tilde{E}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{E}^n$ con $\omega_{12\cdots n}(p) > 0$ para todo $p \in M$. Justamente el hecho de que $\tilde{\omega}|_p \neq 0$ para todo $p \in M$ hace que $\omega_{12\cdots n}(p)$ deba tener siempre el mismo signo.

1.2.2. Integración

Para **definir integración**, vamos a considerar una carta particular $(U_x, \varphi_x^i = x^i)$: Consideramos coordenadas x^i en las cuales $\tilde{\omega} = \omega_{12\cdots n}(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge (\cdots) \wedge dx^n = \dfrac{1}{n!}\omega_{12\cdots n}(x)\, \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge (\cdots) \wedge dx^{i_n}$ (que estén bien orientadas respecto a $\tilde{\omega}$, es decir $\omega_{12\cdots n}(x) > 0$ para todo x).

Se define la integral de $f \in C^\infty(M)$ (o sea $f : M \to \mathbb{R}$ función escalar real) con el elemento de volumen $\tilde{\omega}$ (que determina la orientación) en un abierto $U \subseteq U_x \subseteq M$ (donde está definida la carta), de la siguiente forma (eligiendo la carta x^i):

$$\int_U f\tilde{\omega} \equiv \int_{\varphi_x(U)} f(x)\ \omega_{12\cdots n}(x)\ dx^1 dx^2 (\cdots) dx^n \tag{1}$$

Es una integral en $\varphi_x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, y sabemos integrar en abiertos de $\mathbb{R}^n$.

En particular, tomando $f = 1$, tenemos $\displaystyle\int_U \tilde{\omega} \equiv \mathrm{Vol}(U)$.

Es **invariante ante cambios de coordenadas** porque si pasamos de una carta $(U_x, \varphi_x^i = x^i)$ a una carta $(U_y, \varphi_y^j = y^j)$ (considerando que ambas están bien definidas en U, o sea que $U \subseteq U_x \cap U_y$), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_U f\tilde{\omega} &\equiv \int_{\varphi_x(U)} f(x)\ \omega_{12\cdots n}(x)\ dx^1 dx^2 (\cdots) dx^n \\ &= \int_{\varphi_y(U)} \underbrace{f(x(y))}_{=f(y)}\ \underbrace{\omega_{12\cdots n}(x(y))\ J}_{=\omega_{1'2'\cdots n'}(y)}\ dy^1 dy^2 (\cdots) dy^n \end{aligned} \tag{2}$$

donde en el segundo renglón se usó el teorema de cambio de variable, $J \equiv \det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) > 0$ es el jacobiano (es positivo porque consideramos un cambio de coordenada que preserva la orientación), y $\omega_{1'2'\cdots n'}(y)$ son las componentes de $\tilde{\omega} = \omega_{1'2'\cdots n'}(y)\ dy^1 \wedge dy^2 \wedge (\cdots) \wedge dy^n$ en la nueva carta.

Un último comentario: Usando diferentes cartas que cubran toda la variedad, se pueden definir integrales en toda la variedad M y no sólo en un abierto U. De esta forma, la integral $\int_M f\ \tilde{\omega}$ está bien definida (capaz hay que pedir que M sea compacto o algo por el estilo, para que los volúmenes sean finitos y otros detalles).

Ejercicio: Utilizando que $\det(\Lambda^i_{i'}) = \epsilon_{i_1\cdots i_n}\Lambda^{i_1}_{1'}(\cdots)\Lambda^{i_n}_{n'}$ (los índices $1', 2', \cdots, n'$ están fijos), mostrar que $dx^1 \wedge dx^2 \wedge (\cdots) \wedge dx^n = J\ dy^1 \wedge dy^2 \wedge (\cdots) \wedge dy^n$, y usando que $\tilde{\omega} = \omega_{12\cdots n}(x)\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge (\cdots) \wedge dx^n = \omega_{1'2'\cdots n'}(y)\ dy^1 \wedge dy^2 \wedge (\cdots) \wedge dy^n$ se tiene que debe ocurrir que $\omega_{1'2'\cdots n'}(y) = \omega_{12\cdots n}(x)\ J$.

1.3. Teorema de Stokes

El **teorema de Stokes** afirma:

$$\int_M d\tilde{\alpha} = \int_{\partial M} \tilde{\alpha}|_{\partial M} \tag{3}$$

donde M es una variedad diferencial orientable con borde ∂M, $\tilde{\alpha}$ es una $(n-1)$-forma con soporte compacto, y la orientación de la integral en ∂M es la inducida por la orientación en M (si $\tilde{\omega}$ es la n-forma elemento de volumen que define la orientación en M, y $\vec{n}$ es el vector normal exterior a ∂M (apuntando hacia afuera de la variedad), entonces se induce una $(n-1)$-forma $(i_{\vec{n}}\tilde{\omega})|_{\partial M} = (\tilde{\omega}(\vec{n},(\cdot)))|_{\partial M}$ que define la orientación de ∂M).

El ejercicio 14 de la guía 3 muestra que el teorema de Stokes en su versión en términos de n-formas, incluye a la regla de Barrow, al teorema de Stokes de mate 3, y al teorema de la divergencia de Gauss de mate 3.

Ejemplo: Consideremos la 2-forma $\tilde{\alpha} \equiv -r\sin(\theta)d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta} + r^2\sin(\theta)\ d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}$ en la variedad $M = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ \|\vec{x}\|\leq R\}$ cuyo borde es $\partial M = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ \|\vec{x}\| = R\} = S^2_R$. Calculemos ambos lados del teorema de Stokes y verifiquemos su validez, eligiendo la orientación $\tilde{\omega} = d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}$ para M (de forma que la base $\{\partial_r,\partial_\theta,\partial_\varphi\}$ y su dual $\{d\tilde{r},d\tilde{\theta},d\tilde{\varphi}\}$ son bases derechas, están bien orientadas):

- Lado izquierdo: Calculamos

$$\begin{aligned} d\tilde{\alpha} &= d(-r\sin(\theta))\wedge d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta} + d(r^2\sin(\theta))\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi} \\ &= \overbrace{(-\sin(\theta)d\tilde{r} - r\cos(\theta)d\tilde{\theta})}^{=d(-r\sin(\theta))}\wedge d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta} + \overbrace{(2r\sin(\theta)d\tilde{r} + r^2\cos(\theta)d\tilde{\theta})}^{=d(r^2\sin(\theta))}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi} \\ &= 0 + 2r\sin(\theta)d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi} = 2r\sin(\theta)\ d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

Luego, calculamos la integral (considerando la orientación $\tilde{\omega} = d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}$ para M):

$$\begin{aligned} \int_M d\tilde{\alpha} &= \int_M \overbrace{d\tilde{\alpha}}^{=2r\sin(\theta)\ d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}} = \int_{\varphi(M)} 2r\sin(\theta)\ drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 2r\sin(\theta)\ drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^R 2rdr\right)\left(\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = R^2\ 2\ 2\pi = 4\pi R^2 \end{aligned} \tag{5}$$

- Lado derecho: Calculamos, considerando $\tilde{r}|_{\partial M} = R$ y luego $d\tilde{r}|_{\partial M} = d(R) = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}|_{\partial M} &= \left(-r\sin(\theta)d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta} + r^2\sin(\theta)\ d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}\right)\Big|_{\partial M} = -R\sin(\theta)\overbrace{d\tilde{r}|_{\partial M}}^{=0}\wedge d\tilde{\theta} + R^2\sin(\theta)\ d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi} \\ &= R^2\sin(\theta)\ d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi} \end{aligned} \tag{6}$$

Luego, se tiene, (considerando que el vector normal exterior a ∂M es ∂_r, y que entonces la orientación inducida en ∂M es $(i_{\partial_r}\tilde{\omega})|_{\partial M} = (\tilde{\omega}(\partial_r,(\cdot)))|_{\partial M} = (d\tilde{r}\wedge d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}\ (\partial_r,(\cdot)))\Big|_{\partial M} = (d\tilde{r}(\partial_r)\ d\tilde{\theta}\otimes d\tilde{\varphi} - d\tilde{r}(\partial_r)\ d\tilde{\varphi}\otimes d\tilde{\theta} + 0)\Big|_{\partial M} = (d\tilde{\theta}\otimes d\tilde{\varphi} - d\tilde{\varphi}\otimes d\tilde{\theta})\Big|_{\partial M} = (d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi})\Big|_{\partial M} = d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}$, por lo que la base $\{\partial_\theta,\partial_\varphi\}$ y su base dual $\{d\tilde{\theta},d\tilde{\varphi}\}$ son bases derechas respecto

a esta orientación inducida en ∂M). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \tilde{\alpha}|_{\partial M} &= \int_{\partial M} \overbrace{\tilde{\alpha}|_{\partial M}}^{=R^2 \sin(\theta)\ d\tilde{\theta}\wedge d\tilde{\varphi}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin(\theta)\ d\theta d\varphi \\ &= R^2 \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 4\pi R^2\end{aligned} \tag{7}$$

En efecto coinciden! Como era esperado.

Ejercicio: Consideren ahora la 2-forma $\tilde{\beta} = r\cos(\theta)\ d\tilde{r} \wedge d\tilde{\varphi}$ en la misma variedad $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ \|\vec{x}\| \leq R\}$. Verifique que no vale el teorema de Stokes. ¿Porqué? ¿Está bien definida $\tilde{\beta}$ en todo $M = S^2$?

Ejercicio 3c del parcial del año pasado (redactado distinto): Consideren la 2-forma $\tilde{\alpha} = \sin(\theta)\ d\tilde{\theta} \wedge d\tilde{\varphi}$ en la esfera $M = S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ \|\vec{x}\| = 1\}$. Muestre que es cerrada, y usando el teorema de Stokes muestre que no es exacta. Note también que para mostrar que una forma cerrada no era exacta, tuvimos que integrarla, o sea ver la variedad globalmente y no localmente.

1.4. Más cosas sobre p-formas

- **Teorema de la divergencia**: La divergencia de un vector $\vec{V}$ respecto de una n-forma (elemento de volumen) $\tilde{\omega}$ es $(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\vec{V})\tilde{\omega} \equiv d[i_{\vec{V}}\tilde{\omega}]$, por lo tanto aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_M (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\vec{V})\tilde{\omega} = \int_M d[i_{\vec{V}}\tilde{\omega}] = \int_{\partial M} (i_{\vec{V}}\tilde{\omega})\big|_{\partial M} \tag{8}$$

  En índices, se vio en la teórica: Escribiendo $\tilde{\omega} = \tilde{\eta} \wedge \tilde{\alpha}$ siendo $\tilde{\eta}$ una 1-forma normal a ∂U (o sea $\tilde{\eta}(\vec{U}) = 0$ para todo $\vec{U}$ tangente a ∂U), y $\tilde{\alpha}$ una cierta $(n-1)$-forma, entonces se puede escribir lo anterior como:

$$\int_M (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\vec{V})\tilde{\omega} = \int_M \overbrace{\frac{1}{\omega_{12\cdots n}}\partial_i(\omega_{12\cdots n}V^i)}^{=\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\vec{V}}\ \overbrace{\omega_{12\cdots n}\ dx^1 \wedge (\cdots) \wedge dx^n}^{=\tilde{\omega}} = \int_{\partial M} \overbrace{V^i\eta_i}^{\text{flujo}}\ \tilde{\alpha}|_{\partial M} \tag{9}$$

- **Dada una cierta métrica $g_{\mu\nu}$, hay un volumen métrico inducido** $\tilde{\omega} = \sqrt{|g|}\ dx^1 \wedge (\cdots) \wedge dx^n = \dfrac{1}{n!}\sqrt{|g|}\ \epsilon_{i_1\cdots i_n}\ dx^{i_1} \wedge (\cdots) \wedge dx^{i_n}$ que va a ser el elemento de volumen. Siendo $\epsilon_{i_1\cdots i_n}$ el símbolo de Levi-Civita (vale $1, -1$ según si $\{i_1 \cdots i_n\}$ es una permutación par o impar de $\{1, 2, \cdots, n\}$, o 0 en otro caso) que transforma como densidad tensorial; también a veces se denomina $\epsilon^T_{i_1\cdots i_n} \equiv \sqrt{|g|}\ \epsilon_{i_1\cdots i_n}$ como el tensor de Levi-Civita, que transforma como tensor (ver sección 2.8 del Carroll).

  Se puede definir divergencia respecto de este elemento de volumen $\tilde{\omega}$, tomando en el punto anterior $\omega_{12\cdots n} = \sqrt{|g|}$.

También la existencia de una cierta métrica $g_{\mu\nu}$ nos permite definir una operación llamada **estrella de Hodge** $* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ que es un isomorfismo (de espacio vectorial) entre p-formas y $(n-p)$-formas, con $0 \leq p \leq n$. Por ejemplo $* : \tilde{\alpha} \in \Omega^p(M) \to *\tilde{\alpha} \in \Omega^{n-p}(M)$. Se puede definir para una cierta carta como:

$$(*\tilde{\alpha})_{b_{p+1}\cdots b_p} \equiv \frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\epsilon_{b_1\cdots b_n}\overbrace{g^{a_1b_1}(\cdots)g^{a_pb_p}\alpha_{a_1\cdots a_p}}^{=\alpha^{b_1\cdots b_p}} \tag{10}$$

Verifica algunas propiedades interesantes como por ejemplo: $*1 = \tilde{\omega} = \sqrt{|g|}\,dx^1\wedge(\cdots)\wedge dx^n$ o más generalmente $*f = f\,\tilde{\omega}$ para un escalar (0-forma, función) f; vale que $**\tilde{\alpha} = \text{sign}(g)(-1)^{p(n-p)}\tilde{\alpha}$ para una p-forma $\tilde{\alpha}$ (o sea que la estrella de Hodge inversa es $*^{-1} = \text{sign}(g)(-1)^{p(n-p)}*$). También se puede utilizar para definir un producto interno de p-formas $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ de la forma $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \equiv \int_M \tilde{\alpha}\wedge(*\tilde{\beta})$, y se puede mostrar que $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (\tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ y que $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \equiv \int_M \tilde{\alpha}\wedge(*\tilde{\beta}) = \int_M \alpha_{|b_1\cdots b_p|}\beta^{|b_1\cdots b_p|}\tilde{\omega}$.

- **Ecuaciones de Maxwell**, Ejercicio 12 de la guía 3:

  Podemos expresar las ecuaciones de Maxwell homogéneas como $d\tilde{F} = 0$ para la 2-forma $\tilde{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ (con $F_{\mu\nu}$ definida en términos de los campos E_i, B_i). O sea que $\tilde{F}$ debe ser cerrada, por lo tanto (al menos localmente por el lema de Poincaré) existe una 1-forma $\tilde{A} = A_\mu dx^\mu$ llamada cuadri-potencial (o campo de gauge) tal que $\tilde{F} = d\tilde{A}$ (en componentes $F_{\mu\nu} = 2\,\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$). La 1-forma $\tilde{A}$ está bien definida a menos de una 1-forma exacta $d\tilde{h}$, pues si considera la 1-forma $\tilde{A}' = \tilde{A} + d\tilde{h}$ para cualquier 1-forma exacta $d\tilde{h}$, se tiene que $\tilde{F} = d\tilde{A} = d\tilde{A}'$ (gracias a que $d^2 = 0$). Esta ambiguedad en la definición de $\tilde{A}$, en la cual todas las 1-formas que difieren en una 1-forma exacta son equivalentes, se denomina libertad de gauge. Elegir un cierto $d\tilde{h}$ es elegir un gauge.

  También podemos expresar las ecuaciones de Maxwell no homogéneas como $d*\tilde{F} = \frac{4\pi}{c}*\tilde{J}$, siendo $\tilde{J} \equiv J_\mu dx^\mu$ la cuadri-corriente. También se las puede expresar como $*^{-1}d*\tilde{F} = *d*\tilde{F} = \frac{4\pi}{c}\,\tilde{J}$. Se puede deducir ésta ecuación a partir de variar la acción $S[A] = -\frac{1}{2}(\tilde{F}, \tilde{F}) - \frac{4\pi}{c}(\tilde{A}, \tilde{J}) = \int_M\left(-\frac{1}{2}\tilde{F}\wedge(*\tilde{F}) - \frac{4\pi}{c}\tilde{A}\wedge(*\tilde{J})\right) = \int_M\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}A_\mu J^\mu\right)\tilde{\omega}$, con $\tilde{\omega} = \sqrt{|g|}\,dt\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$.

  De hecho, de esta forma vemos como generalizar las ecuaciones de Maxwell a espacios curvos.

  Ejercicio 12)d): Deducir de $d*\tilde{F} = \frac{4\pi}{c}\,*\tilde{J}$ la ecuación de continuidad

2. Pullback y Pushforward

Fuente: Apéndices A y B del Carroll

2.1. En mapas suaves

Consideremos un **mapa suave** $\Phi : M \to N$ **entre variedades diferenciales** M, N (que podrían tener dimensiones distintas).

Si elegimos coordenadas $\{x^\mu\}$ en M y coordenadas $\{y^\alpha\}$ en N, el mapa Φ es en definitiva el mapa que expresa a las coordenadas y en función de las x de la forma: $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$.

Tipo	Dominios	Independiente de cartas	Carta $\{x^\mu\}$ para M, $\{y^\alpha\}$ para N
Mapa	$\Phi : M \to N$	$p \to \Phi(p)$	$y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$
$(0,0)$	$\Phi^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$	$\Phi^* f \equiv f \circ \Phi$	$\Phi^* f(x) = f(y(x))$
$(1,0)$	$\Phi_* : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$	$\Phi_* \vec{V}\vert_{\Phi(p)}(f) = \vec{V}\vert_p(\Phi^* f)$	$(\Phi_* V)^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, V^\mu$
$(0,1)$	$\Phi^* : T^*_{\Phi(p)}N \to T^*_pM$	$(\Phi^*\tilde{\omega})(\vec{V}) = \tilde{\omega}(\Phi_*\vec{V})$	$(\Phi^*\omega)_\mu = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, \omega_\alpha$
$(r,0)$	$\Phi_* : T_p^{(r,0)}M \to T^{(r,0)}_{\Phi(p)}N$	$(\Phi_* T)\vert_{\Phi(p)}(\tilde{\omega}^{(1)}, \cdots, \tilde{\omega}^{(r)}) =$ $= T\vert_p(\Phi^*\tilde{\omega}^{(1)}, \cdots, \Phi^*\tilde{\omega}^{(r)})$	$(\Phi_* T)^{\alpha_1\cdots\alpha_r} =$ $= \dfrac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}(\cdots)\dfrac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}}\, T^{\mu_1\cdots\mu_r}$
$(0,r)$	$\Phi^* : T^{(0,r)}_{\Phi(p)}N \to T_p^{(0,r)}M$	$(\Phi^* T)\vert_p(\vec{V}^{(1)}, \cdots, \vec{V}^{(r)}) =$ $= T\vert_{\Phi(p)}(\Phi_*\vec{V}^{(1)}, \cdots, \Phi_*\vec{V}^{(r)})$	$(\Phi^* T)_{\mu_1\cdots\mu_r} =$ $= \dfrac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}(\cdots)\dfrac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}}\, T_{\alpha_1\cdots\alpha_r}$

Tabla 1: **Pullback** Φ^* que manda tensores $(0,r)$ (funciones f, 1-formas $\tilde{\omega}$, etc) de N a M, por un mapa suave $\Phi : M \to N$; y **Pushforward** Φ_* que manda tensores $(r,0)$ (vectores $\vec{V}$, etc) de M a N, por un mapa suave $\Phi : M \to N$

Estas definiciones resultan también válidas para campos de tensores, no sólo para tensores en un punto. Es decir, dado un campo de tensores T tipo $(r,0)$ en M se puede definir un campo de tensores $\Phi_* T$ tipo $(r,0)$ en N, de forma tal que al evaluarlo en un punto $\Phi(p) \in N$ viene dado por la anterior tabla (en términos de $T|_p$). Y dado un campo de tensores T tipo $(0,r)$ en N se puede definir un campo de tensores $\Phi^* T$ tipo $(0,r)$ en M, de forma tal que al evaluarlo en un punto $p \in M$ viene dado por la anterior tabla (en términos de $T|_{\Phi(p)}$).

Notar que la forma en la que se escriben en coordenadas los pullbacks de tensores $(0,r)$ y pushforwards de tensores $(r,0)$ nos recuerda a la ley de transformación de estos tensores ante

un cambio de coordenadas $x \to y$. De hecho, es una generalización pues cuando M, N son la misma variedad $M = N$ y $\Phi : M \to N$ es un difeomorfismo. Trabajemos un poco más en el caso en que $\Phi : M \to N$ sea un difeomorfismo.

2.2. En difeomorfismos

Si el mapa $\Phi : M \to N$ es un **difeomorfismo**, es decir tiene una inversa $\Phi^{-1} : N \to M$ que también es un mapa suave: Podemos calcular pullbacks Φ^* y pushforwards Φ_* por $\Phi : M \to N$, pero ahora también podemos calcular pullbacks $(\Phi^{-1})^*$ y pushforwards $(\Phi^{-1})_*$ por el mapa inverso $\Phi^{-1} : N \to M$.

Por ejemplo, ahora podemos calcular el Pullback de un vector como $\Phi^*\vec{V} \equiv (\Phi^{-1})_*\vec{V}$ y el Pushforward de una 1-forma como $\Phi_*\tilde{\omega} \equiv (\Phi^{-1})^*\tilde{\omega}$.

En coordenadas $\{x^\mu\}$ para M, $\{y^\alpha\}$ para N, el hecho de que Φ sea un difeomorfismo nos dice que podemos invertir $y(x)$ a $x(y)$, por lo que podemos definir **una matriz diferencial inversa** a $\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$, que es igual a $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}$.

Eso nos permite definir Pullbacks y Pushforwards de cualquier tensor de tipo (r, s) por $\Phi : M \to N$, de la forma:

Tipo	Dominios	Independiente de cartas	Carta $\{x^\mu\}$ para M, $\{y^\alpha\}$ para N
Difeo	$\Phi : M \to N$ $\Phi^{-1} : N \to M$	$p \to \Phi(p) = q$ $q \to \Phi^{-1}(q) = p$	$y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ $x^\mu = x^\mu(y^\alpha)$
(r, s)	$\Phi_* : T_p^{(r,s)}M \to T_{\Phi(p)}^{(r,s)}N$	$(\Phi_*T)\vert_{\Phi(p)}(\tilde{\omega}^{(1)}, \cdots, \vec{V}^{(s)}) =$ $= T\vert_p(\Phi^*\tilde{\omega}^{(1)}, \cdots, (\Phi^{-1})_*\vec{V}^{(s)})$	$(\Phi_*T)^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_r} =$ $= \dfrac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}(\cdots)\dfrac{\partial x^{\nu_s}}{\partial y^{\beta_s}}\ T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s}$
(r, s)	$\Phi^* : T_{\Phi(p)}^{(r,s)}N \to T_p^{(r,s)}M$	$(\Phi^*T)\vert_p(\tilde{\omega}^{(1)}, \cdots, \vec{V}^{(s)}) =$ $= T\vert_{\Phi(p)}((\Phi^{-1})^*\tilde{\omega}^{(1)}, \cdots, \Phi_*\vec{V}^{(s)})$	$(\Phi^*T)^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} =$ $= \dfrac{\partial y^{\beta_s}}{\partial x^{\nu_s}}(\cdots)\dfrac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\alpha_1}}\ T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_r}$

Tabla 2: **Pullbacks** Φ^* que mandan tensores (r, s) de N a M, por un difeomorfismo $\Phi : M \to N$; y **Pushforward** Φ_* que mandan tensores (r, s) de M a N, por un **difeomorfismo** $\Phi : M \to N$

No es difícil ver que:

$$\Phi_* = (\Phi^{-1})^* \quad \text{y} \quad \Phi^* = (\Phi^{-1})_* \tag{11}$$

Caso $N = M$

En particular, si $N = M$ y $\Phi : M \to N = M$ es un difeomorfismo, entonces **la forma** en la que se escriben **los pullbacks y pushforwards** de tensores (r, s) en coordenadas **es exactamente la ley de transformación de estos tensores ante un cambio de coordenadas** $x \to y$ (o $y \to x$). O sea que un cambio de coordenadas transforma a los tensores con un pushforward o pullback con un difeomorfismo (que define el cambio de coordenadas).

De alguna forma, **un difeomorfismo $\Phi : M \to M$ es lo mismo que un cambio de coordenadas, son dos formas de hacer lo mismo**: El **típico cambio de coordenadas es pasivo** (dejamos fija la variedad M, y sólo cambiamos las coordenadas); y el **difeomorfismo $\Phi : M \to M$ es un cambio de coordenadas activo** (mover los puntos en la variedad, y ver como son las coordenadas en los nuevos puntos).

Más aún, **un difeomorfismo $\Phi : M \to M$ nos permite comparar, mediante pullbacks y pushforwards, campos de tensores evaluados en distintos puntos de la variedad**: Consideremos el campo de tensores T. Si evaluamos el campo de tensores en los puntos distintos $p, \Phi(p) \in M$ de la variedad, tenemos: $T|_p \in T_p^{(r,s)}M$ y $T|_{\Phi(p)} \in T_{\Phi(p)}^{(r,s)}M$, y en principio no los podemos comparar (es decir restar) porque pertenecen a espacios vectoriales distintos $T_p^{(r,s)}M$ y $T_{\Phi(p)}^{(r,s)}M$. Sin embargo, con la magia del pullback Φ^* por el difeomorfismo $\Phi : M \to M$, podemos pullbackear el tensor $T|_{\Phi(p)} \in T_{\Phi(p)}^{(r,s)}M$, obteniendo un nuevo tensor $\Phi^*(T|_{\Phi(p)}) \in T_p^{(r,s)}M$ que se encuentra en el mismo espacio vectorial que $T|_p \in T_p^{(r,s)}M$. Entonces, podemos definir la variación del tensor T en $p \in M$ mediante el difeomorfismo $\Phi : M \to M$ de la forma:

$$\Delta_\Phi T|_p \equiv \Phi^*(T|_{\Phi(p)}) - T|_p \in T_p^{(r,s)}M \tag{12}$$

que es un tensor perfectamente definido de $T_p^{(r,s)}M$.

De esta forma, **podemos definir esta diferencia como un campo de tensores en M**, que se puede evaluar en todo $p \in M$ (y da la ecuación anterior), de la forma:

$$\Delta_\Phi T \equiv \Phi^*(T) - T \tag{13}$$

Y es también un campo de tensores en M

Podemos definir que **el tensor T es invariante ante el difeomorfismo $\Phi : M \to M$ si $\Delta_\Phi T = 0$**

3. Derivada de Lie

3.1. Familia de difeomorfismos asociados a un campo de vectores

Recordar: Una **curva integral** $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ de un campo de vectores $\vec{V}$ (definido en todo M) es una curva cuyo vector tangente en cada punto p de la curva es $\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_p = \vec{V}|_p$. En coordenadas: $\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x(\lambda))$ para todo $\lambda \in I$ (existe única solución $x^i(\lambda)$, dada cierta condición de contorno $\gamma(0) = p$ con coordenadas x^i_p, al menos para un cierto entorno abierto I de 0).

Un **campo de vectores** $\vec{V}$ definido en todo M **genera un flujo: Una familia de curvas integrales de** $\vec{V}$ **que cubren todo** M: O sea, para todo $p \in M$, existe una curva integral $\gamma_p : I_p \subseteq \mathbb{R} \to M$ (con $0 \in I_p$ intervalo abierto de $\mathbb{R}$) tal que $\gamma_p(0) = p$ y el vector tangente a la curva en el punto $\gamma_p(\lambda)$ de la curva es $\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\gamma_p(\lambda)} = \vec{V}|_{\gamma_p(\lambda)}$ para todo $\lambda \in I_p$. Ver figuras 2 y 3 del apunte la clase práctica del 16-09 para ver ejemplos de flujos (curvas integrales de $\vec{V}$ que cubren todo M).

Consideramos ahora: $\alpha : \mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R} \times M \to M$ tal que $\alpha_\lambda(p) \equiv \alpha(\lambda, p) \equiv \gamma_p(\lambda)$ (de forma que está definido para $(\lambda, p) \in \mathfrak{D}$ si y sólo si $\lambda \in I_p$, para que $\gamma_p(\lambda)$ esté bien definido).

Para $|\lambda|$ arbitrariamente chico, se tiene que $\lambda, -\lambda \in I_p$. Luego tenemos que $\alpha_\lambda : M \to M$ es un difeomorfismo, y $\alpha_{-\lambda}$ también, y es igual a $\alpha_{-\lambda} = \alpha_\lambda^{-1}$. Notar: $\alpha_0 =$Id.

Observación: Si $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \times M$ (o sea si $I_p = \mathbb{R}$ para todo $p \in M$), las curvas integrales están bien definidas para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se dice que el campo vectorial $\vec{V}$ es completo. Y vale: $\alpha_\lambda \circ \alpha_\mu = \alpha_{\lambda+\mu}$, $\alpha_0 =$Id, α_λ, $\alpha_{-\lambda} = \alpha_\lambda^{-1}$, por lo que los mapas $\{\alpha_\lambda \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \simeq (\mathbb{R}, +)$ son isomorfos al grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$.

Vale también: $\alpha_\lambda(p) = \exp(\lambda\vec{V}) \cdot p$, ya que, siendo $\vec{V} = \frac{\partial}{\partial s}$ en coordenadas:

$$\alpha^\mu_\lambda(x) = x^\mu + \lambda \left.\frac{\partial}{\partial s}\alpha^\mu_s(x)\right|_{s=0} + \frac{1}{2}\lambda^2 \left.\frac{\partial^2}{\partial s^2}\alpha^\mu_s(x)\right|_{s=0} + (\cdots) = \exp\left(\lambda\frac{\partial}{\partial s}\right)\alpha^\mu_s(x)\Big|_{s=0}$$

O sea, vemos que **si se exponencian campos de vectores, se obtienen difeomorfismos:**

$$\Gamma(TM) \xrightarrow{\exp} \mathrm{Diff}(M)$$

$$\lambda\vec{V} \xrightarrow{\exp} \alpha_\lambda = \exp(\lambda\vec{V})$$

Figura 1: Exponencial de un campo de vectores

Si consideramos que $|\lambda|$ es infinitesimal, despreciando términos de $\mathcal{O}(\lambda^2)$, estamos considerando **difeomorfismos infinitesimales (transformaciones infinitesimales)**, que **son lo mismo que un campo de vectores** pues $\alpha_\lambda = \exp(\lambda\vec{V}) \simeq 1 + \lambda\vec{V} + \mathcal{O}(\lambda^2)$.

3.2. Definición y propiedades de la derivada de Lie

De esta forma, con un campo de vectores $\vec{V}$, nos podemos construir difeomorfismos $\alpha_\lambda, \alpha_{-\lambda}$ (con $|\lambda|$ que tal vez deba ser muy chico en principio, para que esté bien definido). Luego, para transportar tensores a lo largo de las curvas integrales de $\vec{V}$ podemos hacer pullbacks y pushforwards con los difeomorfismos $\alpha_\lambda, \alpha_{-\lambda}$:

Se define el **transporte de Lie** de $T|_p \in T_p^{(r,s)}M$ a lo largo de $\vec{V}$ como el campo de tensores (definido en la curva integral $\gamma_p(\lambda) = \alpha_\lambda(p)$ de $\vec{V}$ que pasa por p) dado por $(\alpha_\lambda)_*(T|_p) \in T_{\alpha_\lambda(p)}^{(r,s)}M$. O sea, puedo transportar tensores de $p \in M$ a $\alpha_\lambda(p)$ por la curva integral de $\vec{V}$ que pasa por p. Esto está bien definido para todo λ tal que $\lambda, -\lambda \in I_p$.

Si queremos comparar un tensor T con su tensor transportado, hacemos lo mismo que la ecuación 12:

$$\Delta_{\alpha_\lambda} T\big|_p = \alpha_\lambda^*(T|_{\alpha_\lambda(p)}) - T|_p \tag{14}$$

Esto segurísimo está bien definido para cada $p \in M$ para $|\lambda|$ arbitrariamente chico, pero puede no estar bien definido en otro caso. El tensor $\Delta_{\alpha_\lambda} T\big|_p \in T_p^{(r,s)}M$ es un tensor (r,s) de M en p.

Lo anterior nos permite definir una derivada, llamada **derivada de Lie**, como:

$$\pounds_{\vec{V}} T\big|_p \equiv \lim_{\lambda\to 0} \frac{\Delta_{\alpha_\lambda} T|_p}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha_\lambda^*(T|_{\alpha_\lambda(p)}) - T|_p}{\lambda} \in T_p^{(r,s)}M \tag{15}$$

Como eso segurísimo está bien definido para cada $p \in M$ para $|\lambda|$ arbitrariamente chico, y hay un límite $\lambda \to 0$, entonces la derivada de Lie de un tensor siempre está bien definida.

Podemos definir un campo de tensores $\pounds_{\vec{V}} T$ definido en todo M, tal que si lo evaluamos en un $p \in M$, nos da la ecuación anterior.

Luego,

Veamos las **propiedades** de la derivada de Lie:

1. $\pounds_{\vec{V}} : \Gamma(T^{(r,s)}M) \to \Gamma(T^{(r,s)}M)$ es independiente ante coordenadas (pues lo definimos sin elegir cartas)
2. $\pounds_{\vec{V}}$ es **lineal con coeficientes constantes** (si son variables $a(x)$ ya no es lineal)
3. $\pounds_{\vec{V}}$ **verifica Leibniz para productos tensoriales y contracciones:** $\pounds_{\vec{V}}(T \otimes S) = (\pounds_{\vec{V}} T) \otimes S + T \otimes (\pounds_{\vec{V}} S)$ y $\pounds_{\vec{V}}(T(S,(\cdot))) = (\pounds_{\vec{V}} T)(S,(\cdot)) + T(\pounds_{\vec{V}} S,(\cdot))$.
4. Sean campos de vectores $\vec{V}, \vec{W}$, se tiene: $\Phi_*([\vec{V},\vec{W}]) = [\Phi_*\vec{V}, \Phi_*\vec{W}] \implies \pounds_{[\vec{V},\vec{W}]} = [\pounds_{\vec{V}}, \pounds_{\vec{W}}]$. También esto implica que $[[\pounds_{\vec{V}}, \pounds_{\vec{W}}], \pounds_{\vec{Z}}] + [[\pounds_{\vec{W}}, \pounds_{\vec{Z}}], \pounds_{\vec{V}}] + [[\pounds_{\vec{Z}}, \pounds_{\vec{V}}], \pounds_{\vec{W}}] = 0$, vale la identidad de Jacobi (pues el conmutador de vectores la verifica).

5. Podemos decir que **un campo de vectores $\vec{V}$ mantiene invariante a un tensor T si** $\pounds_{\vec{V}} T = 0$. El subespacio de campos de vectores I_T que mantienen invariante a un cierto tensor T es un álgebra de Lie, pues $\pounds_{\vec{V}} T = \pounds_{\vec{W}} T = 0 \implies \pounds_{[\vec{V},\vec{W}]} T = 0$. Luego, el subespacio de difeomorfismos que mantienen al tensor T invariante, va a consistir en la exponencial del anterior subespacio $\exp(I_T)$, que va a tener la estructura de un grupo (pues I_T es un álgebra de Lie).

6. Aplicado a campos de p-formas se tiene: $\Phi^* d\tilde{\omega} = d\Phi^* \tilde{\omega} \implies \pounds_{\vec{V}} d\tilde{\omega} = d\pounds_{\vec{V}} \tilde{\omega}$

7. Aplicado a campos de p-formas vale la fórmula mágica de Cartan: $\pounds_{\vec{V}} \tilde{\omega} = d(i_{\vec{V}} \tilde{\omega}) + i_{\vec{V}}(d\tilde{\omega})$.

8. Aplicado a funciones se tiene $\pounds_{\vec{V}} f = \vec{V}(f)$.

Podemos construir la derivada de Lie axiomáticamente a partir de las propiedades $1, 2, 3, 6, 8$ (ejer 16 guía 3), y deducir:

9. Aplicado a vectores, da $\pounds_{\vec{V}} \vec{W} = [\vec{V}, \vec{W}]$. En índices: $(\pounds_{\vec{V}} \vec{W})^i = ([\vec{V}, \vec{W}])^i = V^i \partial_i W^j - W^i \partial_i V^j$.

10. Aplicado a 1-formas, da $(\pounds_{\vec{V}} \tilde{\omega})(\vec{u}) = \vec{V}(\tilde{\omega}(\vec{u})) - \tilde{\omega}([\vec{V}, \vec{u}])$. En índices: $(\pounds_{\vec{V}} \tilde{\omega})_j = V^i \partial_i \omega_j + (\partial_j V^i)\omega_i$.

11. **Aplicado a tensores (r, s) da (en índices)**

$$\begin{aligned}(\pounds_{\vec{V}} T)^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = V^k \partial_k T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} - \partial_k V^{i_1} T^{k \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} - (\cdots) - \partial_k V^{i_r} T^{i_1 \cdots k}_{j_1 \cdots j_s} + \\ + \partial_{j_1} V^k T^{i_1 \cdots i_r}_{k \cdots j_s} + (\cdots) + \partial_{j_s} V^k T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots k}\end{aligned} \tag{16}$$

A. Más detalle de pullbacks y pushforwards

El Pullback de un tensor T (tipo $(0,r)$) en N por Φ, nos va a servir para construirnos un tensor Φ^*T en M.

El Pushforward de un tensor T (tipo $(r,0)$) en M por Φ, nos va a servir para construirnos un tensor Φ_*T en N.

- Pullback de la función (tensor $(0,0)$, 0-forma) $f \in C^\infty(N) = \mathcal{F}(N) = \Omega^0(N) = \{f : N \to \mathbb{R} \ : \ \text{suave}, C^\infty\}$ por $\Phi : M \to N$:

  Se define como la función $\Phi^* f : M \to \mathbb{R}$ (o sea $\Phi^* f \in C^\infty(M)$) dado por:

$$\Phi^* f(q) \equiv f \circ \Phi(q) \quad \forall\, q \in M \tag{17}$$

  En coordenadas $\{x^\mu\}$ para M y $\{y^\alpha\}$ para N, el mapa Φ es de la forma $y(x)$: El pullback de $f(y)$ (función en N) es simplemente $\Phi^* f(x) \equiv f(y(x))$ (función en M).

  Diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi^* f"'] & N \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Figura 2: Diagrama conmutativo del pullback de una función

  Otro diagrama para expresar esto:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi"] & N \\ C^\infty(M) & C^\infty(N) \arrow[l, "\Phi^*"] \\ \Phi^* f \equiv f \circ \Phi & f \arrow[l, "\Phi^*"] \end{tikzcd}$$

Figura 3: Diagrama conmutativo del pullback de una función

- Pushforward de un vector (tensor $(1,0)$) $\vec{V}\Big|_p \in T_pM = \{\vec{V}\Big|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \ : \ \text{derivación en } p \in M\}$ por $\Phi : M \to N$:

  Se define como el vector $\Phi_*\vec{V}\Big|_{\Phi(p)} \in T_{\Phi(p)}N$ dado por:

$$\Phi_*\vec{V}\Big|_{\Phi(p)}(h) \equiv \vec{V}\Big|_p(\Phi^* h) = \vec{V}\Big|_p(h \circ \Phi) \quad \forall\, h \in C^\infty(N) \tag{18}$$

Notar que el vector $\Phi_*\vec{V}\Big|_{\Phi(p)} \in T_{\Phi(p)}N$ aplica (como derivación) sobre una función h en N, y el vector $\vec{V}\Big|_p \in T_pM$ aplica (como derivación) sobre una función Φ^*h en M.

En coordenadas $\{x^\mu\}$ para M y $\{y^\alpha\}$ para N, el mapa Φ es de la forma $y(x)$: El pushforward de $\vec{V}\Big|_p = V^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p = V^\mu \partial_\mu|_p \in T_pM$ es

$$\Phi_*\vec{V}\Big|_{\Phi(p)}(h) = \vec{V}\Big|_p (h\circ\Phi) = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p (h(y(x))) = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\Big|_p \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{\Phi(p)} (h(y))$$

donde se aplicó en el último paso la regla de la cadena. Por lo que:

$$\Phi_*\vec{V}\Big|_{\Phi(p)} = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\Big|_p \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{\Phi(p)} = (\Phi_*V)^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{\Phi(p)} = (\Phi_*V)^\alpha \partial_\alpha|_{\Phi(p)}$$

O sea que en componentes:

$$(\Phi_*V)^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, V^\mu \tag{19}$$

Esto resulta también válido para campos de vectores, no sólo para vectores en un punto. Se puede definir así el pushforward para cada $p \in M$. Pero hay que tener en cuenta que si se evalúa el campo de vectores $\vec{V}$ en $p \in M$, eso corresponde a evaluar el campo de vectores $\Phi_*\vec{V}$ en $\Phi(p) \in N$.

A veces se define $(\Phi_*)^\alpha{}_\mu \equiv \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ de forma que $(\Phi_*V)^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, V^\mu = (\Phi_*)^\alpha{}_\mu\, V^\mu$. Como Φ en principio puede no ser un difeomorfismo (puede no tener inversa suave), la matriz $(\Phi_*)^\alpha{}_\mu \equiv \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ puede no ser invertible. Vamos a ver que pasan cosas interesantes en caso de que sí se la pueda invertir.

Diagramáticamente:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Phi"] & N \\
T_pM \arrow[r, "\Phi_*"] & T_{\Phi(p)}N \\
\vec{V} = V^\mu\partial_\mu \arrow[r, "\Phi_*"] & \Phi_*\vec{V} = \underbrace{\left(\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, V^\mu\right)}_{=(\Phi_*V)^\alpha} \partial_\alpha
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Diagrama conmutativo del pushforward de un vector

- Pullback de una 1-forma (tensor $(0,1)$) $\tilde{\omega}|_{\Phi(p)} \in T^*_{\Phi(p)}N$

  Completar leyendo apéndice A,B del Carroll para terminar esto

B. Algo más, muy muy extra

Esto queda como algo **demasiado extra**. Es otra forma de ver la derivada de Lie que puede ser útil en otros contextos (como teoría de campos por ejemplo).

Consideremos un cambio de coordenadas infinitesimal de la forma $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x)$. Esto sería el típico cambio de coordenadas pasivo (un difeomorfismo sería un cambio de coordenadas activo). **OJO!** Notar que por conveniencia, estamos primando la magnitud x' y no los índices (lo cual es una notación, y es distinta a la notación que usamos y usaremos en la materia de primar índices (no magnitudes) para indicar cantidades transformadas). Consideremos una cierta *cosa* $\chi(x)$ cuya ley de transformación $\chi'(x')$ desconocemos: Puede llegar a incluir índices y transformar como un tensor o como otra cosa. Definimos (de acuerdo a la sección 1.4 del libro *Field Theory: A modern primer*, Pierre Ramond) a $\delta\chi$ como la ley de transformación de $\chi(x) \to \chi'(x')$:

$$\delta\chi \equiv \chi'(x') - \chi(x) = \chi'(x+\delta x) - \chi(x) = \underbrace{\chi'(x) - \chi(x)}_{\equiv\, \delta_0\chi} + \delta x^\mu \partial_\mu \chi'(x) + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{20}$$

Donde se expresó $\chi'(x+\delta x)$ con Taylor a orden 1 en δx. Se definió $\delta_0\chi \equiv \chi'(x) - \chi(x)$ que nos dice la ley de transformación de la *cosa* χ sin incluir la transformación del argumento x. Como $\delta x^\mu \partial_\mu \chi'(x) \simeq \delta x^\mu \partial_\mu \chi(x) + \mathcal{O}(\delta x^2)$ ya que $\chi'(x) = \chi(x) + \delta_0\chi$; en otras palabras la diferencia entre $\partial_\mu\chi'(x)$ y $\partial_\mu\chi(x)$ es de $\mathcal{O}(\delta x)$, y luego la diferencia entre $\delta x^\mu\partial_\mu\chi'(x)$ y $\delta x^\mu\partial_\mu\chi(x)$ es de $\mathcal{O}(\delta x^2)$, entonces despreciando dichos términos de $\mathcal{O}(\delta x^2)$:

$$\delta\chi = \delta_0\chi + \delta x^\mu \partial_\mu \chi(x) \tag{21}$$

Que nos separa la ley de transformación propiamente de la *cosa* $\delta_0\chi = \chi'(x) - \chi(x)$, de la ley de transformación del argumento $\chi'(x') - \chi'(x) \simeq \delta x^\mu \partial_\mu \chi(x)$.

Formalmente, podemos escribir lo anterior como un operador:

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu \tag{22}$$

En este ejercicio, van a mostrar que si χ es una función escalar, o las componentes de un vector o un tensor, entonces es válido:

$$\delta_0 = -\pounds_{\delta x^\mu \partial_\mu} \tag{23}$$

O sea que el operador δ_0 es igual a (un signo $-$ por) la derivada de Lie respecto al vector generador del difeomorfismo infinitesimal $\vec{V} \equiv \delta x^\mu(x)\partial_\mu$.

Vamos a verlo para el caso de una función escalar (inciso a), y un vector (inciso b), y para un tensor genérico tipo (r, s) queda como ejercicio:

a) Considerando que la ley de transformación de una función escalar $f : M \to \mathbb{R}$ ante un cambio de coordenadas es $f'(x') = f(x) \implies \delta f = f'(x') - f(x) = 0$, tenemos que

$$\delta_0 f = \underbrace{\delta f}_{=0} - \delta x^\mu \partial_\mu f = -\underbrace{\delta x^\mu \partial_\mu}_{=\vec{V}} f = -\vec{V}(f) = -\pounds_{\vec{V}} f \tag{24}$$

b) Considerando que la ley de transformación de un vector U^μ es $U'^\nu = \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} U^\mu$, en particular en nuestra transformación $x'^\nu = x^\nu + \delta x^\nu(x) \implies \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu + \partial_\mu \delta x^\nu$, por lo que: $\delta U^\nu = U'^\nu - U^\nu = \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} U^\mu - U^\nu = \left(\delta^\nu_\mu + \partial_\mu \delta x^\nu\right) \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} U^\mu - U^\nu = U^\nu + (\partial_\mu \delta x^\nu) U^\mu - U^\nu = U^\mu \partial_\mu \delta x^\nu$, por lo tanto:

$$\delta_0 U^\nu = \underbrace{\delta U^\nu}_{= U^\mu \partial_\mu \delta x^\nu} - \delta x^\mu \partial_\mu U^\nu = U^\mu \partial_\mu \delta x^\nu - \delta x^\mu \partial_\mu U^\nu = [\vec{U}, \vec{V}]^\nu = -\left(\pounds_{\vec{V}} \vec{U}\right)^\nu \tag{25}$$

c) **Ejercicio:** Considerando que la ley de transformación de un tensor tipo (r, s) $T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ es $T'^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} = \dfrac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} (\cdots) \dfrac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \dfrac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} (\cdots) \dfrac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\beta_s}} T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$, mostrar explícitamente que:

$$\delta_0 T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} = -\left(\pounds_{\vec{V}} T\right)^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} \tag{26}$$

O sea que calculando $\delta_0 T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}$ se obtiene la ecuación 16 (por un signo $-$).

Este δ_0 (que como vimos no es más que la derivada de Lie) es muy útil para hacer variaciones de acciones. Se puede mostrar (ver sección 1.5 de *Field Theory: A modern primer*, Pierre Ramond) que dada una integral $S = \displaystyle\int d^n x \; \chi(x)$, su variación ante un cambio de coordenadas más una transformación interna de χ tal vez es (tomando δx nulo en el borde de la región de integración):

$$\delta S = \int d^n x \; \delta_0 \chi \tag{27}$$

Si tomamos $\chi(x) = \mathcal{L}(\Phi_l(x), \partial_\mu \Phi_l(x))$, tenemos un funcional $S = S[\Phi_l] = \displaystyle\int d^n x \; \mathcal{L}(\Phi_l(x), \partial_\mu \Phi_l(x))$. Tomando $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ como función (o sea $\mathcal{L}'(\Phi_l(x), \partial_\mu \Phi_l(x)) = \mathcal{L}(\Phi_l(x), \partial_\mu \Phi_l(x))$), se puede demostrar (tomando $\delta_0 \Phi_l$ nulo en el borde de la región de integración) como se hace en la sección 1.5 del Ramond:

$$\delta S = \int d^n x \; \delta_0 \chi = \int d^n x \; \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_l} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_l)} \right) \right) \delta_0 \Phi_l \tag{28}$$

donde hay una sumatoria implícita en l, μ. O sea, vemos que el operador δ_0 (o sea, derivadas de Lie) son muy útiles para variar acciones. De ahí sacamos las ecuaciones de Euler-Lagrange si se quisiera tomar $\delta S = 0$, pero sino tenemos en claro que las variaciones que hay que considerar son las δ_0.

En la sección 1.5 de *Field Theory: A modern primer* de Pierre Ramond, no considera que las variaciones son nulas en el borde, es más genérico.