

Sistemas localmente inerciales asociados a observadores

Andrés Goya*

1. Introducción

La idea de estas notas es introducir un nuevo método para calcular energías de partículas o fotones en el sistema de referencia localmente inercial (SLI) asociado a observadores arbitrarios¹ lo que brinda un método práctico para calcular, por ejemplo, el corrimiento al rojo de frecuencias en espacios curvos. Primero veremos cómo funciona esto en Relatividad Especial (RE) en la Sección 2 y luego en la Sección 4 lo aplicaremos al Problema 6 de la Guía 6 ya en el contexto de Relatividad General (RG). Entre medio haremos un breve repaso de las órbitas y potenciales efectivos de partículas masivas y fotones en la geometría de Schwarzschild en la Sección 3.

2. Sistemas localmente inerciales asociados a observadores en Relatividad Especial

Referencias: Sección 5.6 de Hartle [Har03] y Sección 3.4 de Carroll [Car04].

En RE la energía de una partícula medida por un observador en un sistema de referencia inercial es simplemente la componente de su cuádrimomento en el eje temporal de dicho sistema (la componente “0” de \bar{p}). En RG no es posible hallar sistemas inerciales que estén definidos en todo el espacio-tiempo pero siempre es posible definir **localmente** una carta inercial^{2 3 4}. En particular, dado un observador que sigue una trayectoria temporal (no necesariamente geodésica) y su cuádrivelocidad \bar{U}_{obs} es posible definir una base de vectores asociada a un SLI

$$\{\bar{e}_{\hat{0}}, \bar{e}_{\hat{1}}, \bar{e}_{\hat{2}}, \bar{e}_{\hat{3}}\}, \quad (1)$$

donde

$$\bar{e}_{\hat{0}} = \bar{U}_{\text{obs}} \quad (2)$$

y $\{\bar{e}_{\hat{1}}, \bar{e}_{\hat{2}}, \bar{e}_{\hat{3}}\}$ son otros tres vectores tipo-espacio ortogonales entre sí. Dado que el vector unitario $\bar{e}_{\hat{0}}$ es tangente a la trayectoria del observador, ya que esa es la dirección en la que se mueve un reloj

*af.goya@gmail.com

¹En realidad esto constituye una suposición adicional en el marco de la Relatividad Especial: estamos diciendo que la medición realizada por un observador arbitrario coincide con la medición en un sistema localmente inercial. Es decir, dos observadores cuyas posiciones y 4-velocidades coincidan en un punto del espacio-tiempo van a realizar las mismas mediciones independientemente de sus aceleraciones relativas. En particular, la llamada hipótesis del reloj nos dice que para cualquier observador el tiempo que mide entre dos sucesos es el tiempo propio entre dichos sucesos, es decir, coincide con el tiempo propio medido en el sistema localmente inercial. Un argumento similar permite realizar mediciones de distancias propias definiendo adecuadamente versores espaciales cartesianos. Esta hipótesis adicional también será generalizada a observadores arbitrarios en Relatividad General.

²Para ver con más detalle cómo se construye una carta localmente inercial en cada evento de la línea de mundo de observadores acelerados es conveniente referirse a las secciones 6.1-6.6, 8.6, 13.6 y 16.4, y los recuadros 6.2 y 16.2 de libro de Misner, Thorne y Wheeler [MTW73].

³A efectos prácticos, si el observador se mueve con una aceleración instantánea g , el sistema de coordenadas local debe ser lo suficientemente “pequeño” para que sean confiables sus mediciones, es decir, la carta local debe tener un tamaño característico $\ell \ll c^2/g$, $\delta t \ll c/g$. Si $g \sim 10^3 \text{ cm/seg}$ entonces $c^2/g \sim 10^{17} \text{ cm} \sim \text{ly}$ y $c/g \sim 10^7 \text{ seg} \sim 10^2 \text{ y}$. Para más detalles ver el recuadro 6.2 de [MTW73].

⁴También puede resultar interesante mirar el blog de John Baez y Don Koks: Clock Postulate.

estacionario en el sistema de referencia solidario al observador, es natural la identificación $\bar{e}_{\hat{0}} = \bar{U}_{\text{obs}}$ que además nos asegura $\bar{U}_{\text{obs}} \cdot \bar{U}_{\text{obs}} = -1$. Nos podemos imaginar que dicho observador lleva consigo un “laboratorio” con relojes y reglas con las que puede hacer mediciones. (ver figura 1 y 2). Notar que estamos enfatizando el hecho de que la base es ortonormal colocando un caret⁵ “^” encima de las etiquetas de la base, es decir, los elementos de la base cumplen que $\bar{e}_{\hat{\mu}} \cdot \bar{e}_{\hat{\nu}} = g(\bar{e}_{\hat{\mu}}, \bar{e}_{\hat{\nu}}) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

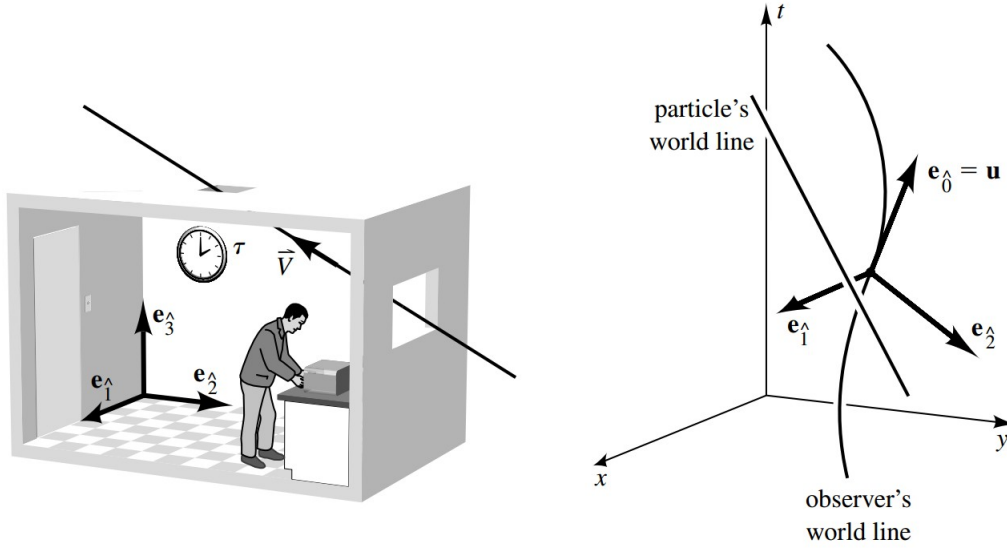


Figura 1: Figura tomada del libro de Hartle [Har03], página 96.

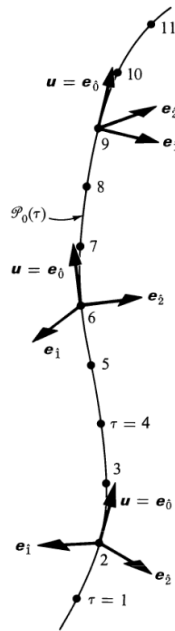


Figura 2: Figura tomada del libro Gravitation [MTW73], página 328.

Para fijar ideas veamos un ejemplo: Consideremos un observador acelerado en el espacio-tiempo de Minkowski como el del Problema 2 de la Guía 2. Su cuadrivelocidad viene dada por

$$\bar{U}_{\text{obs}} = \cosh(a\tau)\partial_t + \sinh(a\tau)\partial_x, \quad (3)$$

donde a es una constante con unidades de aceleración y $\{t, x, y, z\}$ es una carta coordenada asociada a un sistema inercial fijo (la Tierra por ejemplo) en la que el observador se mueve con velocidad

⁵Confieso que desconocía que ese era el nombre del símbolo.

$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{x}}{\dot{t}} = \tanh(a\tau)$. Cualquier trío de vectores espaciales ortogonales entre sí son buenos para terminar de definir la carta localmente inercial asociada al observador. Es fácil elegir dos de ellos, por ejemplo \bar{e}_2 y \bar{e}_3 para que coincidan con ∂_y y ∂_z . El vector base restante $\bar{e}_1 = A(\tau)\partial_t + B(\tau)\partial_x$ se determina pidiendo que ortogonalidad con \bar{e}_0 y que tenga norma unitaria

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1, \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_0 = 0, \quad (4)$$

de lo que se obtiene que

$$\bar{e}_1 = \sinh(a\tau)\partial_t + \cosh(a\tau)\partial_x. \quad (5)$$

Las mediciones realizadas por nuestro observador estarán referidas a los ejes de su laboratorio y al reloj que lleva consigo (que mide el tiempo propio en su SLI). Por ejemplo, las componentes de un cuadvivector (el cuadrivector de una partícula que pasa cerca del observador, ver figura derecha de 1) serán medidas a lo largo de los vectores de la base ortonormal $\{\bar{e}_\mu\}$. En particular, la energía de una partícula (masiva o no-masiva) que pasa por el laboratorio del observador estará dada por la componente de su cuadrivector en el eje \bar{e}_0 de su SLI. Expandiendo el momento de la partícula \bar{p} en la base $\{\bar{e}_\mu\}$

$$\bar{p} = p^{\hat{\mu}}\bar{e}_\mu, \quad (6)$$

con lo cual podemos definir la energía medida por el observador como

$$E = -g(\bar{p}, \bar{e}_0) = -\bar{p} \cdot \bar{e}_0 = -\bar{p} \cdot \bar{U}_{\text{obs}}, \quad (7)$$

y las componentes del 3-vector momento \vec{p} como

$$p^{\hat{i}} = g(\bar{p}, \bar{e}_i). \quad (8)$$

Es interesante notar que la expresión (7) es la misma en cualquier sistema de referencia y ahí radica su utilidad, podemos hacer el cálculo en cualquier sistema de coordenadas pero luego al momento de interpretar el resultado como una medición debemos referirnos al sistema de coordenadas ortonormal asociado al observador.

Apliquemos (7) a un ejemplo sencillo. Consideremos ahora un observador que se mueve con velocidad constante V y en su camino se cruza con una partícula masiva estacionaria (ver Figura 3). En el sistema inercial “fijo” el momento de la partícula estacionaria es

$$\vec{p} = m\partial_t. \quad (9)$$

La 4-velocidad del observador en mismo sistema de referencia es

$$\bar{U}_{\text{obs}} = \bar{e}_0 = \gamma\partial_t + \gamma V\partial_x, \quad (10)$$

donde $\gamma = (1 - V^2)^{1/2}$. Entonces de acuerdo a (7) la energía de la partícula medida por el observador en el sistema de referencia fijo a sí mismo es

$$E_{\text{med}} = -\bar{p} \cdot \bar{e}_0 = \bar{p} \cdot \bar{U}_{\text{obs}} = -\eta_{tt}m\gamma = m\gamma. \quad (11)$$

Éste es el resultado correcto ya que la partícula estacionaria en el sistema de referencia fijo se mueve con velocidad $|V|$ en el SLI solidario al observador.

Ahora veamos un ejemplo un tanto menos trivial. Volvamos al caso del observador acelerado (3) y consideremos que se está moviendo en una región del espacio plano donde hay una estrella estacionaria que emite luz monocromática. La estrella está ubicada en el origen del sistema de referencia fijo como en la Figura 4. En el sistema de referencia fijo las componentes del 4-vector de onda del fotón son $(\omega|_{\text{em}}, k^i|_{\text{em}})$ y en el SLI solidario al observador/receptor son $(\omega|_{\text{em}}, k^i|_{\text{obs}})$.

Recordemos que para fotones tenemos

$$\bar{k} = (\omega, \vec{k}) \quad (12)$$

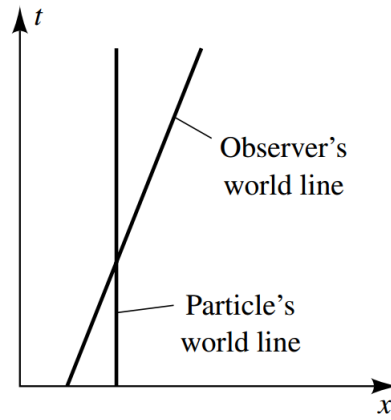
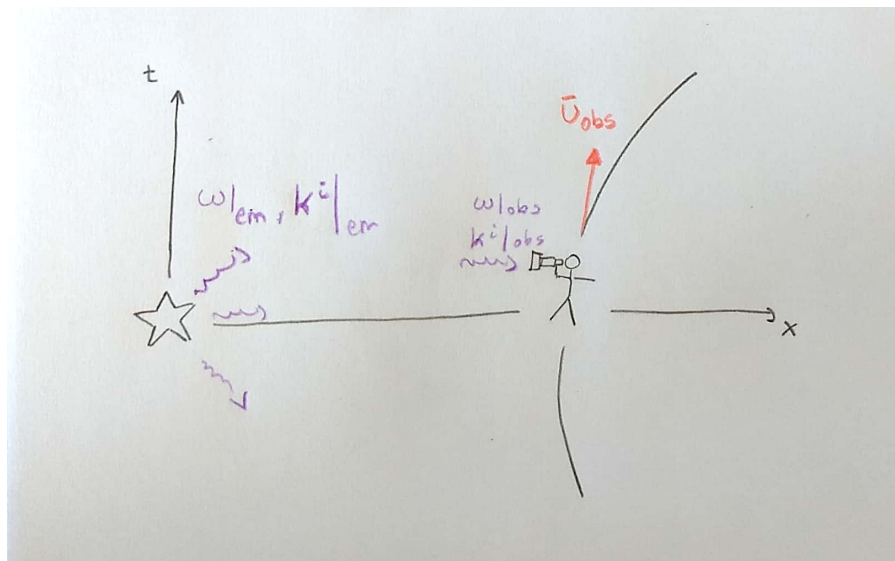


Figura 3: Figura tomada del libro de Hartle [Har03], página 98.



Escaneado con CamScanner

Figura 4: Estrella estacionaria y observador acelerado. El 4-vector de onda del fotón en el sistema de referencia fijo tiene componentes $(\omega|_{em}, k^i|_{em})$ y el 4-vector de onda del fotón en el SLI del observador es $(\omega|_{obs}, k^i|_{obs})$.

donde ω es la frecuencia del fotón y \vec{k} su 3-vector de onda. Podemos identificar el momento

$$\vec{p}_{fotón} = (E_{fotón}, \vec{p}_{fotón}) \tag{13}$$

de un fotón con el 4-vector de onda del siguiente modo

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \tag{14}$$

Utilizando (7) nos lleva a que la energía del fotón medida por el observador $E_{fotón\ obs}$ en términos del 4-momento del fotón en el sistema fijo \vec{p}_{em} es

$$E_{obs} = -\vec{p}_{em} \cdot \vec{U}_{obs}. \tag{15}$$

Equivalentemente la frecuencia del fotón medida por el observador ω_{obs} en términos del 4-vector de onda en el sistema fijo a la estrella \vec{k}_{em} es

$$\omega_{obs} = -\vec{k}_{em} \cdot \vec{U}_{obs}. \tag{16}$$

Reemplazando (3) en (16) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{obs}} &= -\bar{k}_{\text{em}} \cdot \bar{U}_{\text{obs}} = -\eta_{\mu\nu} (\bar{k}_{\text{em}})^\mu (\bar{U}_{\text{obs}})^\nu \\
 &= -\eta_{tt} (\bar{k}_{\text{em}})^t (\bar{U}_{\text{obs}})^t - \eta_{xx} (\bar{k}_{\text{em}})^x (\bar{U}_{\text{obs}})^x \\
 &= \omega_{\text{em}} \cosh(a\tau) - k_{\text{em}}^x \sinh(a\tau) = \omega_{\text{em}} e^{-a\tau}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

En la última igualdad utilizamos que $\omega_{\text{em}} = |k^x|$ dado que $\bar{k} \cdot \bar{k} = 0$.

La expresión $\omega_{\text{obs}} = \omega_{\text{em}} e^{-a\tau}$ es consistente con el efecto Doppler: a tiempos muy iniciales ($\tau \rightarrow \infty$) el observador se acerca aceleradamente a la fuente a una gran velocidad por lo que la frecuencia está muy corrida al azul $\omega_{\text{obs}} \gg \omega_{\text{em}}$; mientras que a tiempos muy tardíos ($\tau \rightarrow \infty$) el observador se aleja aceleradamente de la fuente a una gran velocidad y la frecuencia está muy corrida hacia el rojo $\omega_{\text{obs}} \ll \omega_{\text{em}}$.

Para terminar de convencernos de que la expresión (7) tiene sentido calculemos el cambio de frecuencia realizando un boost del sistema fijo a la estrella al SLI solidario al observador. La estrella está en el sistema fijo S y el observador se mueve con velocidad V en la dirección x como en la Figura 5.

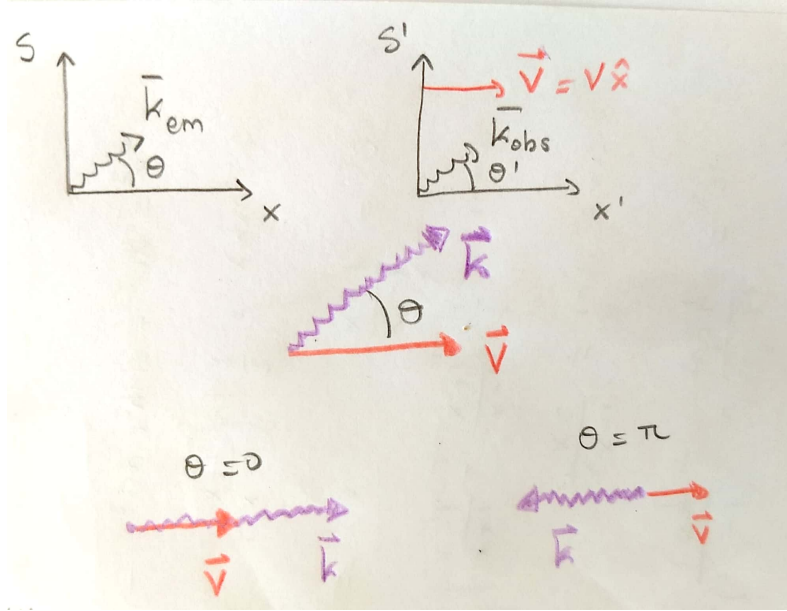


Figura 5: Esquema de sistemas de referencia para el efecto Doppler.

Para obtener la frecuencia ω_{obs} en el sistema S' simplemente hacemos un boost

$$\omega_{\text{obs}} = \gamma(\omega_{\text{em}} - \vec{V} \cdot \vec{k}). \tag{18}$$

Notemos que $\vec{V} \cdot \vec{k} = |V| |k^x| \cos(\theta)$, entonces la expresión de arriba que

$$\omega_{\text{obs}} = \frac{\omega_{\text{em}} (1 - |V| \cos(\theta))}{\sqrt{1 - |V|^2}}, \tag{19}$$

que es la expresión del Doppler relativista. Para $\theta = 0$ el observador se aleja de la fuente y tenemos corrimiento al rojo $\omega_{\text{obs}} < \omega_{\text{em}}$; y para $\theta = \pi$ el observador se acerca a la fuente y tenemos corrimiento al azul $\omega_{\text{obs}} > \omega_{\text{em}}$.

Para el caso particular del observador acelerado (3) la velocidad es

$$|V| = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| \frac{\dot{x}}{\dot{t}} \right| = \tanh(a\tau), \tag{20}$$

reemplazando esta expresión en (19) asumiendo que para $\tau > 0$ el observador se aleja de la fuente ($\theta = 0$) obtenemos que $\omega_{\text{obs}} = \omega_{\text{em}} e^{-a\tau}$.

Ahora que ya estamos convencidos de que (7) funciona vamos a querer aplicarlo en RG a un observador en caída libre en la geometría de Schwarzschild que le manda fotones a otro observador estacionario ubicado más lejos, pero antes vamos a hacer un breve repaso de las geodésicas masivas y no-masivas en dicha geometría.

3. Geodésicas en la geometría de Schwarzschild y sus potenciales efectivos

Referencias: Sección 6.3 de Wald [Wal84] y Sección 5.4 de Carroll [Car04].

Ahora vamos a hacer un breve repaso de las geodésicas temporales y nulas en la geometría de Schwarzschild cuyo intervalo está dado por ($c = 1$, $G = 1$)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (21)$$

La métrica (21) no depende explícitamente de t ni de φ por lo cual tenemos dos vectores de Killing “obvios” ∂_t y ∂_φ que dan lugar a dos cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas

$$p_0 = g(\partial_t, d/d\lambda) \equiv -E = \text{const}, \quad p_\varphi = g(\partial_\varphi, d/d\lambda) \equiv L = \text{const}, \quad (22)$$

donde λ es el parámetro afín de las geodésicas.

Además, tenemos la condición de normalización del vector tangente de la geodésica

$$g(d/d\lambda, d/d\lambda) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\kappa, \quad \kappa = \begin{cases} 1 & \text{geodésica temporal} \\ 0 & \text{geodésica nula.} \end{cases} \quad (23)$$

Recordemos que en el caso de geodésicas temporales el parámetro afín es el tiempo propio medido en el SLI solidario a la partícula/observador y el vector tangente es la cuadrivelocidad

$$(\bar{U})^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (24)$$

Mientras que para las geodésicas nulas el parámetro afín λ se elige para hacerlo coincidir con el 4-vector de onda $\bar{k} = (\omega, \vec{k})$ ó bien con el 4-momento del fotón $\bar{p} = (\hbar\omega, \vec{p})$, es decir,

$$(\bar{k})^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad \text{ó} \quad (\bar{p})^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (25)$$

En el caso de las geodésicas temporales va a ser conveniente escribir las cantidades conservadas por unidad de masa

$$e \equiv \frac{E}{m}, \quad \ell \equiv \frac{L}{m}. \quad (26)$$

Análogamente para las geodésicas nulas podemos expresar las cantidades conservadas más convenientemente dividiendo por \hbar

$$e \equiv \frac{E}{\hbar}, \quad \ell \equiv \frac{L}{\hbar}. \quad (27)$$

En lugar de resolver las ecuaciones de la geodésica, algo ciertamente complicado (ver ecuaciones 5.52 y 5.53 de [Car04]) vamos a utilizar las constantes de integración. En este caso lo que es conveniente es reemplazar las cantidades conservadas (22) en la ecuación de normalización (23) asumiendo que el movimiento se da en el plano $\theta = \pi/2$ (el punto “()” indica derivada respecto al parámetro afín)

$$\begin{aligned} -\kappa &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 \\ &= g^{tt}e^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g^{\varphi\varphi}\tilde{\ell}^2 \\ &= \frac{1}{f(r)}e^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + \frac{\tilde{\ell}^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

En la segunda línea utilizamos explícitamente que la métrica es diagonal.

Una forma más simpática de escribir la ecuación (28) se obtiene al multiplicarla por $\frac{f(r)}{2}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{f(r)}{2} \left(\kappa + \frac{\ell^2}{r^2} \right) = \frac{e^2}{2}, \quad (29)$$

obteniendo un problema equivalente unidimensional de mecánica clásica con un potencial efectivo particular. Específicamente para el caso de Schwarzschild $f(r) = 1 - 2M/r$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(\kappa)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{eff}}^{(\kappa)}(r), \\ V_{\text{eff}}^{(\kappa)}(r) &\equiv -\kappa \frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^2}, \\ \mathcal{E}^{(\kappa)} &\equiv \frac{e^2 - \kappa}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

donde la constante $\mathcal{E}^{(\kappa)}$ actúa como la energía mecánica total del sistema.

Más precisamente para geodésicas temporales ($\kappa = 1$) tenemos que

$$\mathcal{E}^{(1)} = \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^2}. \quad (31)$$

Notemos que $\mathcal{E}^{(1)}$ tiene una cota inferior: su valor no puede ser menor que $-1/2$. Algunas curvas para distintos valores de $\tilde{\ell}$ se pueden ver en la Figura 6.

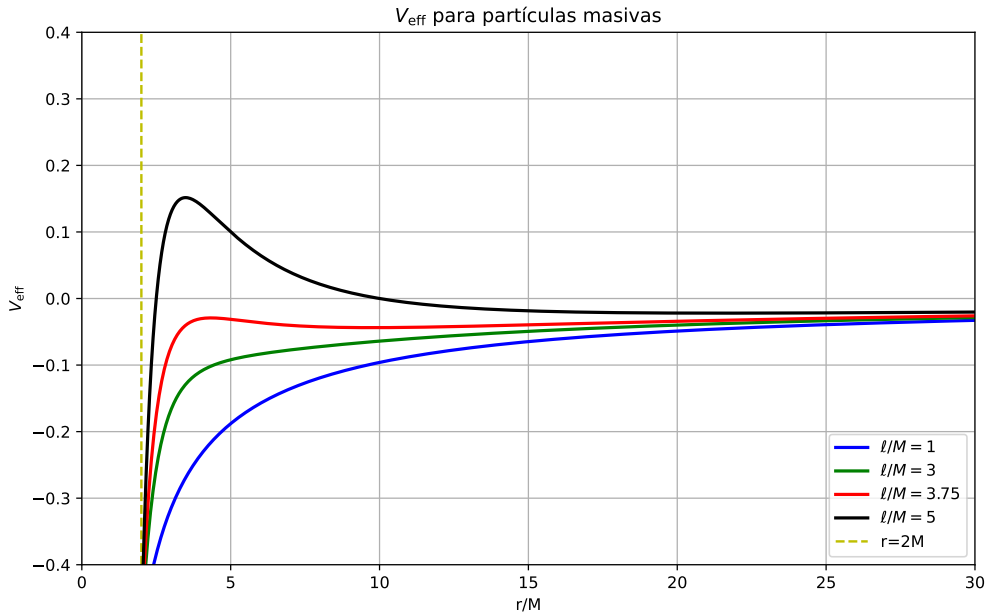


Figura 6: Potencial efectivo para partículas masivas en función de r/M para distintos valores de ℓ/M .

Para geodésicas nulas ($\kappa = 0$) tenemos que

$$\mathcal{E}^{(0)} = \frac{e^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^2}. \quad (32)$$

En este caso $\mathcal{E}^{(0)} \geq 0$. Algunas curvas para distintos valores de $\tilde{\ell}$ se pueden ver en la Figura 8.

El análisis de estabilidad, órbitas circulares, etc, se hace de manera análoga a como se hacía en Mecánica Clásica, sólo que debido al término extra que va como $1/r^3$ es un poco más complicado.

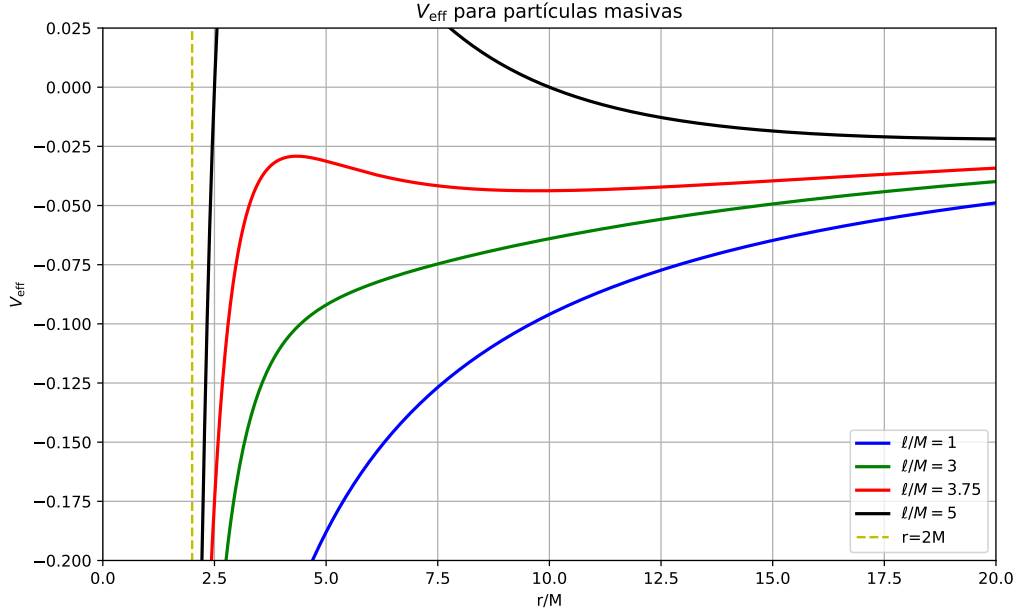


Figura 7: Ampliación del potencial efectivo para partículas masivas. Se puede apreciar claramente que la curva roja tiene un mínimo alrededor de $r/M = 10$.

Algunos efectos de ese término son el corrimiento del periastro y la deflexión de la luz que fueron explicados en la clase teórica del 02/11 [Fer]. También pueden referirse a la Sección 5.5 de Carroll [Car04], el capítulo 9 de Hartle [Har03] o la sección 6.3 de Wald [Wal84]. También hay otras cosas interesantes para analizar en algunos ejercicios de la Guía 6.

4. Sistemas localmente inerciales asociados a observadores en Relatividad General

Ahora apliquemos lo aprendido en la Sección 2⁶ al caso del Problema 6 de la Guía 6. En este problema tenemos dos observadores: uno se encuentra estacionario en $r = r_{\text{obs}}$ y otro cae hacia el agujero negro (o planeta o estrella) en una geodésica radial cuya posición es $r_{\text{em}}(\tau)$ (ver Figura 9). Dado que ambas trayectorias son radiales tenemos que $\tilde{\ell} = 0$. En la clase del 09/11 [Zan] vieron un modo de resolver el problema, en este caso vamos a recurrir a otro método. Recordemos que la energía/frecuencia de un fotón medida por un observador está dada por (7)

$$\omega_{\text{med}} = -\bar{k}_{\text{fotón}} \cdot \bar{U}_{\text{obs}} . \quad (33)$$

Notemos/recordemos que \bar{U}_{obs} ya cumple la condición de normalización $\bar{U}_{\text{obs}} \cdot \bar{U}_{\text{obs}} = -1$.

Aplicando esta expresión para las frecuencias medidas por el emisor y el receptor tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_{\text{em}} &= -g(\bar{k}_{\text{em}}, \bar{U}_{\text{em}}) = -k_{\mu} U^{\mu} \Big|_{\text{em}} , \\ \omega_{\text{rec}} &= -g(\bar{k}_{\text{rec}}, \bar{U}_{\text{rec}}) = -k_{\mu} U^{\mu} \Big|_{\text{rec}} . \end{aligned} \quad (34)$$

Ahora notemos que la trayectoria seguida por un fotón es una geodésica nula y dado que ∂_t es un vector de Killing

$$e_{\text{fotón}} = -g(\partial_t, \bar{k}) = -k_0 = \text{const} , \quad (35)$$

⁶Como en RE dos observadores cuyas posiciones y 4-velocidades coinciden en un punto del espacio-tiempo van a realizar las mismas mediciones. Un observador en movimiento arbitrario realiza las mediciones en el sistema localmente inercial en reposo instantáneo junto a él.

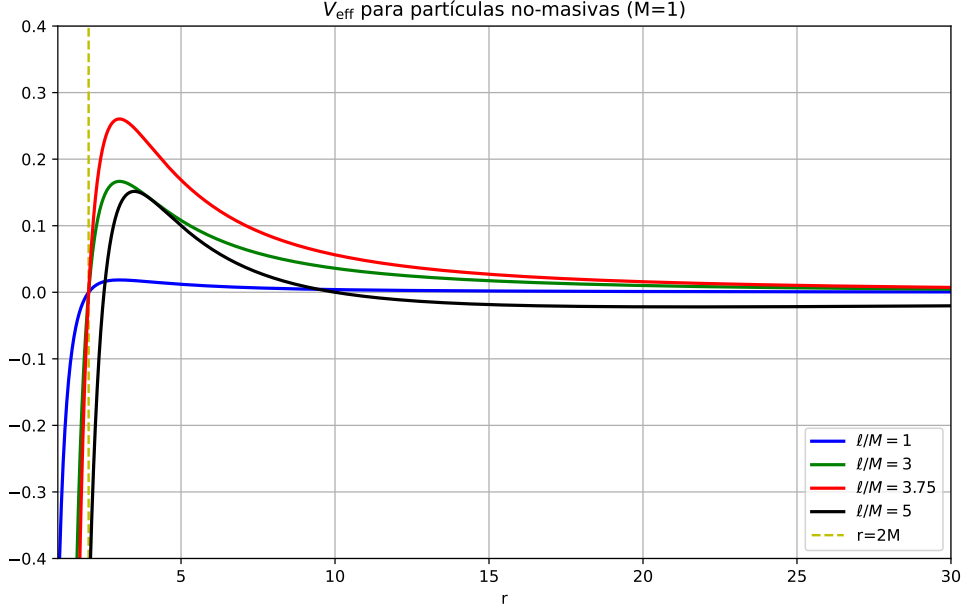


Figura 8: Potencial efectivo para partículas no-masivas.

es una constante de movimiento. Reemplazando ésto en (34) tenemos que

$$\begin{aligned}\omega_{\text{em}} &= -e \dot{t}_{\text{em}} + k_r \dot{r}_{\text{em}} , \\ \omega_{\text{rec}} &= -e \dot{t}_{\text{rec}} ,\end{aligned}\quad (36)$$

donde suprimimos la etiqueta “fotón” en k y el punto denota derivada respecto al tiempo propio. En (36) nos molesta el término k_r pero recordemos que dado que $\vec{k} \cdot \vec{k} = 0$ podemos relacionarlo con e

$$\begin{aligned}0 &= g_{tt}(k^t)^2 + g_{rr}(k^r)^2 = g^{tt}(k_t)^2 + g^{rr}(k_r)^2 \\ \Rightarrow (k_r)^2 &= -\frac{g^{tt}}{g^{rr}}(k_0)^2 \\ \Rightarrow k_r &= +\frac{e}{f(r)} = \frac{e}{1 - 2M/r} ,\end{aligned}\quad (37)$$

donde elegimos “+” ya que el fotón viaja hacia desde r_{em} hacia $r_{\text{rec}} > r_{\text{em}}$.

Entonces el cociente de frecuencias $\frac{\omega_{\text{em}}}{\omega_{\text{rec}}}$ nos queda

$$\frac{\omega_{\text{em}}}{\omega_{\text{rec}}} = \sqrt{f(r_{\text{rec}})} \left(\dot{t}_{\text{em}}(\tau) - \frac{1}{f(r_{\text{em}}(\tau))} \dot{r}_{\text{em}}(\tau) \right) ,\quad (38)$$

donde reemplazamos la expresión que obtuvimos para k_r y recordando que para un observador estacionario ($r = r_0 = \text{const}$) se tiene que

$$\left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{\text{obs estacionario}} = \frac{1}{\sqrt{f(r_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2M/r_0}} .\quad (39)$$

Notemos que la expresión (38) coincide con la ecuación (38) del apunte de Juan [Zan].

Para analizar el resultado (38) es conveniente considerar casos particulares más simples donde sea posible aislar los distintos efectos que intervienen (*redshift* gravitatorio y efecto Doppler relativista). En el caso particular en que el emisor es estacionario tenemos que $\dot{r}_{\text{em}} = 0$ ya se estudió en el apunte [Zan] pero para intentar ser autocontenidos repasémoslo: En este caso tenemos que

$$\frac{\omega_{\text{em}}}{\omega_{\text{rec}}} \simeq \sqrt{f(r_{\text{rec}})} \dot{t}_{\text{em}}(\tau) = \frac{\sqrt{f(r_{\text{rec}})}}{\sqrt{f(r_{\text{em}})}} ,\quad (40)$$

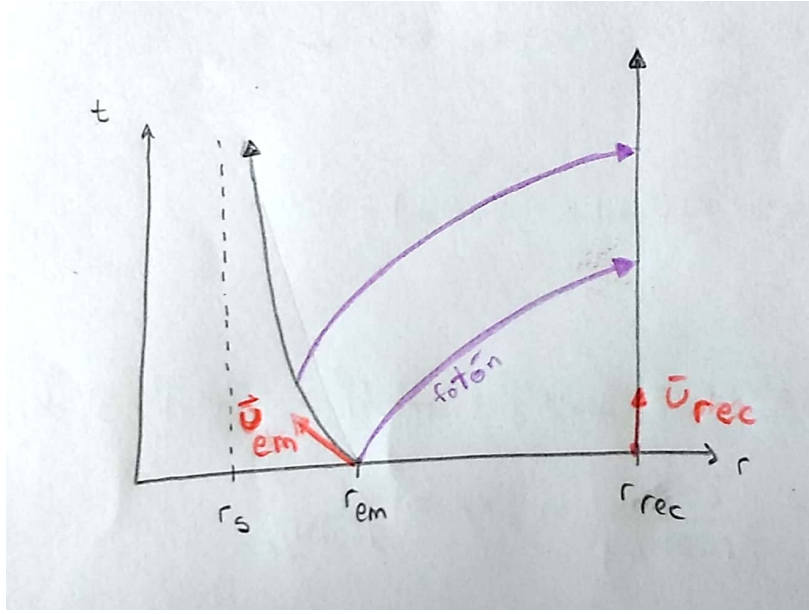


Figura 9: Diagrama Problema 6 Guía 6.

que es la ya conocido *redshift* gravitatorio (ésto ya fue analizado en el apunte [Zan]).

Para analizar el efecto Doppler es conveniente considerar el caso en que no hay curvatura del espacio-tiempo $f(r) \simeq 1$. En este caso

$$\frac{\omega_{em}}{\omega_{rec}} = \dot{t}_{em} - \dot{r}_{em} = \dot{t}_{em} \left(1 - \frac{\dot{r}_{em}}{\dot{t}_{em}} \right). \quad (41)$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{t}_{em} &= \left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{em} = \gamma|_{em} = \frac{1}{\sqrt{1 - |V|^2}}, \\ \frac{\dot{r}_{em}}{\dot{t}_{em}} &= \frac{dr_{em}}{dt_{em}} = -|V|, \end{aligned} \quad (42)$$

donde en la última igualdad de la segunda línea utilizamos explícitamente que el emisor está cayendo hacia el agujero negro. Reemplazando todo esto en el cociente de frecuencias obtenemos la expresión del efecto Doppler relativista

$$\frac{\omega_{em}}{\omega_{rec}} = \frac{\sqrt{1 + |V|}}{\sqrt{1 - |V|}}. \quad (43)$$

Casos más generales requieren utilizar las ecuaciones de la geodésica para los distintos observadores.

Referencias

- [Car04] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison-Wesley, 2004.
- [Fer] Ferraro, Rafael. Clase 17: Corrimiento del perihelio y deflexión de rayos de luz en la geometría de schwarzschild. coordenadas de kruskal-szekeres. <http://materias.df.uba.ar/rga2020c2/files/2020/08/Clase-17.pdf>.
- [Har03] J.B. Hartle. *An introduction to Einstein's general relativity*. 2003.
- [MTW73] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [Wal84] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [Zan] Zanella, Juan. Clase 19: Geodésicas radiales en la métrica de schwarzschild. http://materias.df.uba.ar/rga2020c2/files/2020/11/RG_2020_2c_Clase_practica_9_del_11.pdf.