"Gimnasia" de índices

- Vector V^{α} índice arriba se llama contravariante
- Co-vector (1-forma) ω_{α} índice abajo se llama covariante

La posición de los índices importa

- Convención de suma de Einstein: si hay dos índices, uno contravariante y otro covariante, repetidos está implícita una suma y se dice q' están **contraídos**

$$\omega_{\alpha} V^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{3} \omega_{\alpha} V^{\alpha} = \omega_0 V^0 + \omega_1 V^1 + \omega_2 V^2 + \omega_3 V^3$$

$$\omega_{\mu} T^{\rho\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} \omega_{\mu} T^{\rho\mu} = \omega_0 T^{\rho 0} + \omega_1 T^{\rho 1} + \omega_2 T^{\rho 2} + \omega_3 T^{\rho 3}$$

A los índices contraídos se les dice índices mudos, los puedo re-etiquetar o renombrar como me guste

$$\omega_{\mu} T^{\rho\mu} = \omega_{\alpha} T^{\rho\alpha}$$

ρ: índice libre

μ ó α: índices mudos

Los índices sin contraer son índices **libres** NO los puedo renombrar como yo quiera

$$V^{\rho} = \omega_{\nu} T^{\rho\nu} = \omega_{\lambda} T^{\rho\lambda} \quad ✓$$

$$V^{\sigma} = \omega_{\nu} T^{\rho\nu} \quad ✗$$

Obs/ los índices contraídos deben ir de a pares

$$W_{\alpha\beta\gamma} Z^{\alpha\alpha} \quad ✗$$

Ejemplos de vectores y co-vectores

- dx^α es un vector, su regla de transformación es

  $dx^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\, dx^\alpha$, transforma con la matriz de Lorentz $\Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}$

- $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ es un co-vector, su regla de transformación es

  $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, transforma con la matriz de Lorentz inversa $\Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'}$

Comentario: más adelante vamos a ver una definición más formal (y precisa) de vector en geometría diferencial sin tener qu recurrir a un sistema de coordenadas ni a su regla de transformación.

Métrica (signatura $(-,+,+,+)$)

$g_{\alpha\beta}$ es simétrica $\rightsquigarrow$ $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

Define un producto interno $g(v,w) = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta$

pero no es definido positivo $g(v,v) = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$ puede ser positivo (vector tipo espacio), negativo (vector tipo tiempo) o cero (vector tipo luz o nulo)

En Minkowski (aka espacio plano) $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}$$

Inversa de la métrica

Denotamos la inversa de la métrica como

$$g^{\alpha\beta} \text{ "="} [g^{-1}]^{\alpha\beta}$$

En notación matricial $\quad \mathbb{g}\,\mathbb{g}^{-1} = \mathbb{g}^{-1}\mathbb{g} = \mathbb{1}$

En notación de índices $\quad g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = g^{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}$

$$\delta^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Subir y bajar índices

Se dice q' uno "baja" un índice cuando "convierte" un índice contravariante en uno covariante contrayendo con la métrica

$$V_{\alpha} = g_{\alpha\beta}V^{\beta}$$

Se dice q' uno "sube" un índice cuando "convierte" un índice covariante en uno contravariante contrayendo con la métrica inversa

$$\omega^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\omega_{\beta}$$

Los índices se "suben" y "bajan" con el tensor métrico

Obs/ Las operaciones de subir y bajar proveen un mapa entre vectores y co-vectores

$$\omega_{\alpha}V^{\alpha} = \omega^{\alpha}V_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\omega^{\beta}V^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\omega_{\alpha}V_{\beta}$$

Observación:

- Uno suele cometer abusos de notación al identificar tensores con sus componentes pero es una práctica habitual

Ej: $\eta = \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$

Pero se entiende no?

Traza de un tensor

La traza de una matriz $\mathbb{m}$ es la suma de los elementos de la diagonal

$$\mathbb{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{tr} \mathbb{m} = \sum_{i=1}^{3} m_{ii}$$

En geometría euclídea esto se puede escribir como

$$\delta^{ij} m_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \delta^{ij} m_{ij} = \sum_{i=1}^{3} m_{ii} = \operatorname{tr}(m)$$

Esta idea se generaliza a espacios con signatura lorentziana (y espacios con curvatura) mediante la contracción con la métrica inversa

$$\operatorname{tr} M = g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \overset{\text{Minkowski}}{=} \eta^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$$

$\boxed{\text{Para nosotros tomar traza significa contraer con la métrica inversa}}$

Ej./ $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \overset{\text{Mink}}{=} \eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\alpha} = 4$ (dim = 4)

$$\delta^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

en n-dimensiones $\delta^{\alpha}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{n} \Bigg\} n \Rightarrow \underline{\delta^{\alpha}_{\alpha} = n}$

<u>Ejercicios</u>: (Hartle p 142)

Chequear si la convención de suma de índices repetido está bien usada o no

a) $g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\gamma}$, b) $g_{\alpha\beta}\, a^{\alpha} a^{\beta} = g_{\beta\gamma}\, a^{\beta} b^{\gamma}$

c) $g_{\alpha\beta}\, a^{\alpha} b^{\beta} = g_{\alpha\beta}\, a^{\alpha} c^{\beta}$, d) $\Gamma^{\alpha}_{\ \alpha\gamma}\, a^{\gamma} = g_{\alpha\beta}\, a^{\alpha} b^{\beta}$

e) $\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}\, a^{\alpha} c^{\beta} c^{\gamma} = b^{\alpha}$, f) $\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$

g) $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = 0$, h) $g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma'} \Lambda^{\beta}_{\ \delta'} = g_{\gamma\delta}\, \Lambda^{\gamma}_{\ \alpha'} \Lambda^{\delta}_{\ \beta'}$

i) $g_{\alpha'\beta'}\, a^{\alpha'} b^{\beta'} = g_{\alpha\beta}\, a^{\alpha} b^{\beta}$, j) $a^{\alpha}(g_{\beta\gamma}\, b^{\beta} b^{\gamma}) = b^{\gamma}$

k) $\Gamma^{\alpha}_{\ \alpha\beta} = \Gamma^{\beta}_{\ \beta\beta}$ l) $g_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$

Observación:

En espacio euclídeo (plano) se puede "omitir" la regla de contraer índices covariantes con contravariantes.

Noten q' la métrica del espacio euclídeo plano es

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = \delta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\quad v_i = g_{ij}\, v^j = \delta_{ij} v^j = \boxed{v^i = v_i}$

Recordemos q' en Minkowski las componentes temporales cambian de signo

$$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta \rightsquigarrow V_0 = \eta_{0\beta} V^\beta = \eta_{00} V^0 = -V^0 = V_0$$

pero p/ las componentes espaciales no

$$V_i = \eta_{i\beta} V^\beta = \eta_{ij} V^j = \delta_{ij} V^j = V^i = V_i$$

Por lo tanto, sólo en espacio plano euclídeo se puede omitir la regla

$$w_i v^i = w^i v_i = w^i v^i = w_i v_i$$

ya q' $\quad v_i = v^i \quad$ y $\quad w_i = w^i$

Pero hay q' ser cuidadoso