Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del miércoles 23/9: *Guía 3: geometría diferencial.* [*]

Formas diferenciales y producto exterior

En una variedad de dimensión n, las formas diferenciales son tensores covariantes antisimétricos. Una p-forma α, escrita en una base coordenada dx^i, tiene el siguiente aspecto:

$$\alpha = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}\, dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}, \tag{1}$$

con $i_j = 1, 2, \dots, n$ y $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}$ antisimétrica en todos sus índices. En lenguaje libre de coordenadas, la p-forma α es una función multilineal de p vectores en los reales,

$$\alpha(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_p), \tag{2}$$

antisimétrica respecto al intercambio de dos cualesquiera de sus argumentos.

La propiedad de antisimetría de las componentes $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ se expresa en la siguiente identidad

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = \alpha_{[i_1 i_2 \dots i_p]}, \tag{3}$$

donde los corchetes indican la operación de antisimetrización: la suma normalizada con el factor $1/p!$ sobre todas las permutaciones pesadas con el signo de la permutación. Por ejemplo, para $p = 1$, $p = 2$ y $p = 3$ sería

$$A_{[i]} = A_i, \tag{4}$$

$$B_{[ij]} = \frac{1}{2!}\left(B_{ij} - B_{ji}\right), \tag{5}$$

$$C_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(C_{ijk} + C_{jki} + C_{kij} - C_{ikj} - C_{kji} - C_{jik}\right). \tag{6}$$

Es fácil demostrar la siguiente propiedad (**ejercicio**)

$$A_{[i_1 i_2 \dots i_p]} B^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{i_1 i_2 \dots i_p} B^{[i_1 i_2 \dots i_p]}. \tag{7}$$

En especial, si A es antisimétrico

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p} B^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{i_1 i_2 \dots i_p} B^{[i_1 i_2 \dots i_p]}. \tag{8}$$

[*] zanellaj@df.uba.ar

Si volvemos a la ec. (1) podemos escribir

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p} \\ &= \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx^{[i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p]} \\ &= \frac{1}{p!}\, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \tag{9}$$

La primera igualdad es la expansión de la p-forma en la base dx^i. La segunda igualdad usa la propiedad (8). Por último, el producto tensorial antisimetrizado de las 1-formas de la base se escribe en términos del producto exterior o producto *wedge*. Notar que este producto no incluye el factor $1/p!$ de normalización. Así, para $p = 2$ y $p = 3$ es

$$dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = {} & dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k + dx^j \otimes dx^k \otimes dx^i + dx^k \otimes dx^i \otimes dx^j \\ & - dx^i \otimes dx^k \otimes dx^j - dx^k \otimes dx^j \otimes dx^i - dx^j \otimes dx^i \otimes dx^k. \end{aligned} \tag{11}$$

En general,

$$dx^{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p} = p!\, dx^{[i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p]}. \tag{12}$$

Los productos

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p} \tag{13}$$

proporcionan una base para la expansión de las p-formas, pero hay que hacer una salvedad. Como la permutación de índices produce expresiones linealmente dependientes, la base propiamente dicha tiene que fijar un ordenamiento para cada conjunto de índices $\{i_1, \ldots, i_p\}$, y tomar ese ordenamiento para construir un elemento de la base. Lo convencional es usar un ordenamiento de menor a mayor. Esto se sintetiza en la siguiente expansión

$$\alpha = \alpha_{|i_1 i_2 \ldots i_p|}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p}, \tag{14}$$

donde las barras indican que la suma sólo tiene en cuenta los índices tales que

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_p. \tag{15}$$

Así, por ejemplo, una 2−forma en 3 dimensiones queda escrita como

$$\omega = \omega_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + \omega_{23}\, dx^2 \wedge dx^3. \tag{16}$$

Sobre todo en el caso tridimensional, para respetar la terna derecha 123 tenderemos a escribir, de manera equivalente,

$$\omega = \omega_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{31}\, dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{23}\, dx^2 \wedge dx^3. \tag{17}$$

Es sencillo demostrar que si A es una p-forma y B es una q-forma, las componentes de la $(p+q)$-forma $A \wedge B$ son (**ejercicio**)

$$(A \wedge B)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[i_1 \dots i_p} B_{i_{p+1} \dots i_{p+q}]}. \tag{18}$$

También es útil saber que el producto exterior puede definirse de manera única a partir de unas pocas propiedades, que son fundamentales en la práctica:

i) Si ν es la p-forma nula, es decir, si ω es una p-forma vale $\nu + \omega = \omega$, entonces para cualquier q-forma η

$$\nu \wedge \eta = 0. \tag{19}$$

ii) Si f es una 0-forma y ω es una p-forma cualquiera, entonces

$$f \wedge \omega = f\omega. \tag{20}$$

iii) (*Distributividad*). Si f es una 0-forma, ω_1 y ω_2 son p-formas y η una q-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + \omega_2 \wedge \eta. \tag{21}$$

iv) (*Anticonmutatividad*). Si ω es una p-forma y η una q-forma, entonces

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\, \eta \wedge \omega. \tag{22}$$

v) (*Asociatividad*). Si ω_1, ω_2 y ω_3 son k_1, k_2 y k_3 formas, respectivamente, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3. \tag{23}$$

Ejemplos en una variedad de dimensión 3:

Aquí usamos $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$ y $dx^3 = dz$.

a) El producto exterior $\omega \wedge \eta$ de dos 1-formas,

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz, \tag{24}$$

$$\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz, \tag{25}$$

se obtiene aplicando la propiedad distributiva a la expresión

$$\Big(\omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz\Big) \wedge \Big(\eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz\Big). \tag{26}$$

Notemos que, por antisimetría,

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0, \tag{27}$$

de modo que en el producto de las dos 1-formas sólo sobreviven los términos cruzados,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta = \; & \omega_1\eta_2 \; dx \wedge dy + \omega_2\eta_1 \; dy \wedge dx \\ & + \omega_1\eta_3 \; dx \wedge dz + \omega_3\eta_1 \; dz \wedge dx \\ & + \omega_2\eta_3 \; dy \wedge dz + \omega_3\eta_2 \; dz \wedge dy. \end{aligned} \tag{28}$$

Ahora usamos que para 1-formas el producto anticonmuta, de manera que, por ejemplo, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$. Entonces:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta = \; & (\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1) \; dx \wedge dy \\ & + (\omega_1\eta_3 - \omega_3\eta_1) \; dx \wedge dz \\ & + (\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2) \; dy \wedge dz. \end{aligned} \tag{29}$$

Esto se puede escribir de forma más sugestiva reordenando términos según el sentido derecho de la terna xyz o 123:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta = \; & (\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2) \; dy \wedge dz \\ & + (\omega_3\eta_1 - \omega_1\eta_3) \; dz \wedge dx \\ & + (\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1) \; dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{30}$$

Se ve la analogía con el producto vectorial ordinario. La analogía puede llevarse más lejos aún.

En tres dimensiones, la base de 1-formas tiene la misma dimensión que la base de las 2-formas. Esto permite mapear un espacio en el otro. Definimos un operador lineal *estrella* por su efecto en la base de las dos formas como

$$*(dy \wedge dz) = dx, \qquad *(dz \wedge dx) = dy, \qquad *(dx \wedge dy) = dz, \tag{31}$$

entonces

$$*(\omega \wedge \eta) = (\omega_2\eta_3 - \omega_3\eta_2)dx + (\omega_3\eta_1 - \omega_1\eta_3)dy + (\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1)dz. \tag{32}$$

Ahora la correspondencia entre el producto externo de dos 1-formas y el producto vectorial en un espacio euclídeo de 3 dimensiones es evidente.

b) El producto exterior entre una 1-forma y una 2-forma:

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz, \tag{33}$$

$$\eta = \eta_{12} \; dx \wedge dy + \eta_{31} \; dz \wedge dx + \eta_{23} \; dy \wedge dz. \tag{34}$$

Al hacer el producto externo $\omega \wedge \eta$, los términos que tengan repetida una misma 1-forma son automáticamente cero. Por ejemplo,

$$\omega_1 dx \wedge (\eta_{12}\ dx \wedge dy) = \omega_1\eta_{12}\ dx \wedge dx \wedge dy = 0. \tag{35}$$

Así sólo sobreviven tres términos,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta = \ & \omega_1\eta_{23}\ dx \wedge dy \wedge dz \\ & + \omega_2\eta_{31}\ dy \wedge dz \wedge dx \\ & + \omega_3\eta_{12}\ dz \wedge dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{36}$$

Aplicando transposiciones, reescribimos los tres triples productos de idéntica manera

$$\omega \wedge \eta = (\omega_1\eta_{23} + \omega_2\eta_{31} + \omega_3\eta_{12})\ dx \wedge dy \wedge dz. \tag{37}$$

Es evidente que esto guarda relación con el producto escalar. La 2-forma η sólo tiene 3 componentes independientes, igual número que una 1-forma. Volvamos a introducir el operador estrella, pero esta vez actuando sobre 1-formas mediante la asociación

$$*dx = dy \wedge dz, \qquad *dy = dz \wedge dx, \qquad *dz = dx \wedge dy. \tag{38}$$

Entonces una 1-forma $\alpha = \alpha_1\ dx + \alpha_2\ dy + \alpha_3\ dz$ sería mapeada como

$$*\alpha = \alpha_1\ dy \wedge dz + \alpha_2\ dz \wedge dx + \alpha_3\ dx \wedge dy. \tag{39}$$

Comparando con la 2-forma original,

$$\eta = \eta_{12}\ dx \wedge dy + \eta_{31}\ dz \wedge dx + \eta_{23}\ dy \wedge dz, \tag{40}$$

esto crea las siguientes identificaciones

$$\alpha_1 = \eta_{23}, \qquad \alpha_2 = \eta_{31}, \qquad \alpha_3 = \eta_{12}. \tag{41}$$

Vemos entonces que

$$\omega \wedge (*\alpha) = (\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)\ dx \wedge dy \wedge dz. \tag{42}$$

Resumiendo: esta operación genera el producto escalar ordinario de dos vectores en el espacio euclídeo tridimensional.

Derivada exterior

La derivada exterior es una operación que mapea p-formas en $(p+1)$-formas. Es posible definirla explícitamente en términos de componentes, pero, al igual que el producto exterior, también es posible definirla axiomáticamente dando una lista de sus propiedades. Dada una p-forma A con componentes

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p}, \tag{43}$$

la definición explícita de la derivada exterior en términos de las componentes es

$$(dA)_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} = (p+1)\partial_{[i_0} A_{i_1 i_2 \dots i_p]}. \tag{44}$$

Apliquemos esta definición a los casos más sencillos.

- Para una 0-forma f, es decir, una función, resulta

  $$(df)_i = \partial_i f, \tag{45}$$

  esto es,

  $$df = \partial_i f \; dx^i. \tag{46}$$

- Para una 1-forma con componentes A_i obtenemos

  $$(dA)_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{47}$$

  Lo que se traduce en

  $$dA = \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) \; dx^i \wedge dx^j. \tag{48}$$

- Para una 2-forma F_{ij},

  $$\begin{aligned}(dF)_{ijk} = 3\partial_{[i} F_{jk]} &= \frac{1}{2}\Big(\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} - \partial_i F_{kj} - \partial_k F_{ji} - \partial_j F_{ik}\Big) \\ &= \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij}.\end{aligned} \tag{49}$$

  Nótese que, de manera un poco anti intuitiva, esta expresión es antisimétrica respecto al intercambio de dos índices cualesquiera. Más exactamente, tiene la misma simetría que F_{ij}.

- De manera análoga la derivada exterior de una 3-forma se escribe como la suma de 4 términos. Esto queda como **ejercicio**.

Hasta aquí, en ningún lugar demostramos que dA fuera un tensor de tipo $\binom{0}{p+1}$. Verifiquemos explícitamente que, en el caso de una 1-forma A, las componentes de dA transforman como las de un tensor $\binom{0}{2}$. Hemos visto que

$$(dA)_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{50}$$

Si las componentes de A en una base coordenada $x^{i'}$ son $A_{i'}$, entonces tendremos

$$A_j = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} A_{j'}. \tag{51}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \partial_i A_j &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \partial_i A_{j'} + \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} A_{j'} \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \partial_{i'} A_{j'} + \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} A_{j'}. \end{aligned} \tag{52}$$

El primer término muestra las propiedades de transformación adecuadas pero el segundo, no. La situación se corrige cuando consideramos la diferencia $\partial_i A_j - \partial_j A_i$. En tal caso resulta

$$\begin{aligned} \partial_i A_j - \partial_j A_i = &\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \partial_{i'} A_{j'} + \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} A_{j'} \\ &- \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \partial_{j'} A_{i'} - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} A_{i'}. \end{aligned} \tag{53}$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^i \partial x^j} A_{j'} - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} A_{i'} = 0, \tag{54}$$

porque i' y j' son índices mudos y, en última instancia, debido a la igualdad de las derivadas cruzadas. Es decir, debido al hecho de que

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} \tag{55}$$

sea simétrica en los índices i y j. Finalmente,

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \left(\partial_{i'} A_{j'} - \partial_{j'} A_{i'}\right), \tag{56}$$

que muestra las propiedades de transformación adecuadas. Esta demostración puede extenderse a la derivada exterior de p-formas con $p > 2$. Eso se deja como **ejercicio**.

La manera axiomática de definir la derivada exterior es mediante una enumeración de sus propiedades:

i) Si f es una 0-forma, entonces

$$df = \partial_i f \, dx^i. \tag{57}$$

ii) (*Linealidad*). Si ω_1 y ω_2 son p-formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2. \tag{58}$$

iii) (*Derivación de un producto*). Si ω es una p-forma y η es una q forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \tag{59}$$

iv) (*Lema de Poincaré*). Si ω es una p-forma:

$$d(d\omega) = 0. \tag{60}$$

Aplicando estas propiedades es sencillo deducir la fórmula explícita (44),

$$(dA)_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_p} = (p+1)\partial_{[i_0} A_{i_1 i_2 \ldots i_p]}. \tag{61}$$

Partimos de una p-forma general, escrita en la base del producto exterior de 1-formas,

$$A = \frac{1}{p!} A_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p}. \tag{62}$$

Una primera aplicación de la regla del producto da

$$dA = \frac{1}{p!} \, dA_{i_1 \ldots i_p} \wedge \Big(dx^{i_1} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p} \Big) + \frac{1}{p!} \, A_{i_1 \ldots i_p} \, d\Big(dx^{i_1} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p} \Big). \tag{63}$$

El segundo término en el miembro de la derecha es cero, porque la aplicación sucesiva de la regla del producto siempre involucra un término de la forma

$$d(dx^{i_j}) = 0. \tag{64}$$

Explícitamente, aplicando sucesivamente la regla del producto y el lema de Poincaré,

$$\begin{aligned} d\Big(dx^{i_1} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p} \Big) &= d(dx^{i_1}) \wedge \Big(dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \Big) - dx^{i_1} \wedge d\Big(dx^{i_2} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p} \Big) \\ &= -dx^{i_1} \wedge d(dx^{i_2}) \wedge d\Big(dx^{i_3} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p} \Big) + dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge d\Big(dx^{i_3} \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{i_p} \Big) \\ &= \quad \ldots \quad = (-1)^{p-1} \, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \, \ldots \, \wedge d(dx^{i_p}) = 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Luego,

$$dA = \frac{1}{p!}\, dA_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p}. \tag{66}$$

Usando ahora la regla para derivar 0-formas, queda

$$dA = \frac{1}{p!}\, \partial_{i_0} A_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p}. \tag{67}$$

Pero el producto exterior es completamente antisimétrico. Entonces por la propiedad (8) resulta

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{p!}\, \partial_{[i_0} A_{i_1\ldots i_p]}\, dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{(p+1)!}\, (p+1)\partial_{[i_0} A_{i_1\ldots i_p]}\, dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \tag{68}$$

De aquí se lee que las componentes de dA son

$$(dA)_{i_0\ldots i_p} = (p+1)\partial_{[i_0} A_{i_1\ldots i_p]}. \tag{69}$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo la aplicación de las propiedades de la derivada exterior, en los casos más sencillos, no requiere memorizar ninguna fórmula.

Ejemplos en una variedad de dimensión 3:

a) La derivada exterior de una 0-forma f equivale a la 1-forma gradiente de f,

$$df = \partial_x f\; dx + \partial_y f\; dy + \partial_z f\; dz. \tag{70}$$

b) La derivada exterior de una 1-forma $A = A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz$:

$$dA = dA_x \wedge dx + dA_y \wedge dy + dA_z \wedge dz. \tag{71}$$

Aquí hemos aplicado la regla del producto y el lema de Poincaré para escribir, por ejemplo,

$$d(A_x dx) = d(A_x \wedge dx) = dA_x \wedge dx + A_x \wedge d(dx) = dA_x \wedge dx. \tag{72}$$

Luego usamos la expresión para la derivada exterior de una 0-forma, y escribimos, por ejemplo,

$$dA_x = \partial_x A_x\; dx + \partial_y A_x\; dy + \partial_z A_x\; dz. \tag{73}$$

Al tomar el producto exterior de dA_x con dx, sólo sobreviven los dos últimos términos, puesto que $dx \wedge dx = 0$,

$$dA_x \wedge dx = \partial_y A_x\; dy \wedge dx + \partial_z A_x\; dz \wedge dx. \tag{74}$$

De la misma forma se calculan $dA_y \wedge dy$ y $dA_z \wedge dz$,

$$dA_y \wedge dy = \partial_x A_y \; dx \wedge dy + \partial_z A_y \; dz \wedge dy, \tag{75}$$

$$dA_z \wedge dz = \partial_x A_z \; dx \wedge dz + \partial_y A_z \; dy \wedge dz. \tag{76}$$

Reuniendo todos los resultados y usando la antisimetría de los productos exteriores de las 1-formas, resulta

$$dA = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \; dy \wedge dz + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \; dz \wedge dx + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \; dx \wedge dy. \tag{77}$$

Queda a la vista que esta operación no es otra cosa que el cálculo de un rotor. Para hacerlo más evidente, volvamos a aplicar el operador estrella, definido por su acción sobre las 2-formas fundamentales

$$*(dy \wedge dz) = dx, \qquad *(dz \wedge dx) = dy, \qquad *(dx \wedge dy) = dz. \tag{78}$$

Así resulta

$$*dA = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \; dx + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \; dy + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \; dz, \tag{79}$$

que es lo mismo que escribir

$$*dA = (\nabla \times A)_i \, dx^i. \tag{80}$$

c) La derivada exterior de una 2-forma

$$\eta = \eta_{12} \; dx \wedge dy + \eta_{31} \; dz \wedge dx + \eta_{23} \; dy \wedge dz. \tag{81}$$

Tomemos el primer término y apliquemos la regla del producto y el lema de Poincaré:

$$\begin{aligned} d\Big(\eta_{12} \; dx \wedge dy\Big) &= d\eta_{12} \wedge dx \wedge dy + \eta_{12} d\Big(dx \wedge dy\Big) \\ &= d\eta_{12} \wedge dx \wedge dy + \eta_{12}\Big[d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy)\Big] \\ &= d\eta_{12} \wedge dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{82}$$

Ahora usamos la expresión para la derivada exterior de una 0-forma y la antisimetría de los productos exteriores de las 1-formas. Sólo sobrevive un término:

$$\begin{aligned} d\eta_{12} \wedge dx \wedge dy &= (\partial_x \eta_{12} \; dx + \partial_y n_{12} \; dy + \partial_z \eta_{12} \; dz) \wedge dx \wedge dy \\ &= \partial_z \eta_{12} \; dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned} \tag{83}$$

Repitiendo estos mismos pasos con los otros dos términos de la ec. (81) obtenemos

$$d\eta = \Big(\partial_z \eta_{12} + \partial_y \eta_{31} + \partial_x \eta_{23}\Big) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{84}$$

Tal como hicimos notar anteriormente, las tres componentes independiente de la 2-forma η pueden ponerse en correspondencia con las tres componentes de una 1-forma α mediante la aplicación del operador $*$. Repetimos aquí lo fundamental:

$$*dx = dy \wedge dz, \qquad *dy = dz \wedge dx, \qquad *dz = dx \wedge dy. \tag{85}$$

Entonces una 1-forma α es mapeada en la 2-forma

$$*\alpha = \alpha_1 \; dy \wedge dz + \alpha_2 \; dz \wedge dx + \alpha_3 \; dx \wedge dy. \tag{86}$$

Lo que, teniendo en cuenta la definición (81) para η,

$$\eta = \eta_{12} \; dx \wedge dy + \eta_{31} \; dz \wedge dx + \eta_{23} \; dy \wedge dz, \tag{87}$$

crea las siguientes identificaciones

$$\alpha_1 = \eta_{23}, \qquad \alpha_2 = \eta_{31}, \qquad \alpha_3 = \eta_{12}. \tag{88}$$

Finalmente, en términos de α, la ec. (84) queda escrita como

$$d(*\alpha) = \Big(\partial_x \alpha_1 + \partial_y \alpha_2 + \partial_z \alpha_3\Big) \; dx \wedge dy \wedge dz. \tag{89}$$

Esto muestra que la derivada exterior de una 2-forma está relacionada con la divergencia del cálculo vectorial usual,

$$d(*\alpha) = (\nabla \cdot \alpha) \; dx \wedge dy \wedge dz. \tag{90}$$

Problema 8

■ En una variedad diferenciable cualquiera que posea una noción de volumen Ω resulta posible definir la divergencia de un vector $\vec{V}$:

$$\big(\mathrm{div}_\Omega \vec{V}\big)\Omega = d\big[\Omega(\vec{V})\big]. \tag{91}$$

a) Verifique que el volumen métrico en un espacio euclídeo conduce a la forma ordinaria de la divergencia (en coordenadas cartesianas).

b) Si la componente de Ω en una base coordenada es f, muestre que

$$\mathrm{div}_\Omega \vec{V} = f^{-1} \frac{\partial f V^\mu}{\partial x^\mu}. \tag{92}$$

c) Exprese el volumen métrico $\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ del espacio euclídeo tridimensional en la base de coordenadas esféricas $\{dr, d\theta, d\varphi\}$, y use el resultado del inciso (b) para calcular la divergencia de un vector $\vec{V} = V^r \partial_r + V^\theta \partial_\theta + V^\varphi \partial_\varphi$. Compare con la expresión usual de la divergencia en coordenadas esféricas y explique por qué resultan distintas.

■ **Solución**. Recién al final veremos los motivos que llevan a definir la divergencia a través de la relación

$$\big(\mathrm{div}_\Omega \vec{V}\big)\Omega = d\big[\Omega(\vec{V})\big]. \tag{93}$$

Por el momento, nos limitaremos a verificar las propiedades que enumera el ejercicio. Primero vamos a definir los términos. Que exista una noción de volumen significa que existe una n-forma sobre la variedad. En una variedad diferenciable provista de métrica, el volumen métrico se define como

$$\Omega = \sqrt{|g|}\ \ dx^1 \wedge dx^2 \wedge\ \dots\ \wedge dx^n. \tag{94}$$

Esto hace las veces de elemento de volumen invariante. En un espacio euclídeo, las componentes de la métrica en coordenadas cartesianas son

$$g^{ij} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1), \tag{95}$$

y por lo tanto

$$\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge\ \dots\ \wedge dx^n. \tag{96}$$

El problema nos pide aplicar esta n-forma a un vector, luego tomar su derivada exterior y verificar que es proporcional al propio elemento de volumen Ω. El factor de proporcionalidad será, según la definición (93), la divergencia de $\vec{V}$.

Apliquemos pues la n-forma Ω a un vector $\vec{V}$. A primera vista esta es una operación extraña, puesto que una n-forma tiene n argumentos vectoriales. Debemos dar significado a la siguiente operación

$$\Omega(\vec{V}) = \Big(dx^1 \wedge dx^2 \wedge\ \dots\ \wedge dx^n\Big)(\vec{V}). \tag{97}$$

Esto debe entenderse como la $(n-1)$-forma que resulta de evaluar el primer argumento de la n-forma Ω en el vector $\vec{V}$. Esta operación puede generalizarse a formas de cualquier clase. Si tuviéramos una 3-forma A, evaluada sobre un vector, daría el siguiente resultado

$$A(\vec{V}) \equiv A(\vec{V}, \cdot, \cdot), \tag{98}$$

es decir, una funcional lineal antisimétrica de dos vectores, esto es, una 2-forma. Este tipo de operaciones resulta familiar cuando se escribe en componentes

$$A(\vec{V})_{jk} = A(V^i \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = V^i A_{ijk}. \tag{99}$$

De manera que esta evaluación incompleta de una p-forma es equivalente a la contracción con un vector respecto de su primer argumento.

La verdadera dificultad que presenta la ec. (97),

$$\Omega(\vec{V}) = \left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)(\vec{V}), \tag{100}$$

es que incluye una suma antisimetrizada sobre los productos tensoriales de las n 1-formas. Hay $n!$ términos que tenemos que organizar. Notemos lo siguiente: podemos separar esta suma según el primer factor que aparezca en el producto tensorial. Si n fuera igual a 3 escribiríamos

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 \otimes (dx^2 \wedge dx^3) - dx^2 \otimes (dx^1 \wedge dx^3) + dx^3 \otimes (dx^1 \wedge dx^2). \tag{101}$$

Estamos separando los términos de la suma según la 1-forma que aparece adelante de todo. Esto es, estamos ordenando las permutaciones poniendo primero las que empiezan con dx^1, después las que empiezan con dx^2, etc. Puesto que llevar cada 1-forma dx^j al comienzo de la cadena implica hacer $j-1$ transposiciones, los signos se van alternando. Así, llevar dx^2 al primer lugar implica hacer desde el comienzo una transposición. Llevar dx^3 al primer lugar, entraña dos transposiciones iniciales. Y así siguiendo.

En general, para una n-forma Ω, quedará

$$\begin{aligned}\Omega = dx^1 &\otimes \left(dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)\\ &- dx^2 \otimes \left(dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)\\ &+ dx^3 \otimes \left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)\\ &- \ldots\\ &+ (-1)^{n-1}\, dx^n \otimes \left(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}\right).\end{aligned} \tag{102}$$

Ahora que está claro cuál es el primer elemento de cada producto tensorial, podemos calcular $\Omega(\vec{V})$ fácilmente:

$$\begin{aligned}\Omega(\vec{V}) = V^1 &\left(dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)\\ &- V^2\left(dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)\\ &+ V^3\left(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n\right)\\ &- \ldots\\ &+ (-1)^{n-1} V^n\left(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}\right).\end{aligned} \tag{103}$$

Aún queda calcular la derivada exterior de esta $(n-1)$-forma:

$$d\big[\Omega(\vec{V})\big]. \tag{104}$$

En el primer término de la ec. (103) sólo importará calcular la derivada de V^1 respecto de x^1, puesto que el producto exterior de todas las otras contribuciones involucrará la repetición de dos 1-formas idénticas. Así

$$\begin{aligned} d\big[\Omega(\vec{V})\big] = {} & \partial_1 V^1 \; dx^1 \wedge \Big(dx^2 \wedge \, \ldots \, \wedge dx^n\Big) \\ & - \partial_2 V^2 \; dx^2 \wedge \Big(dx^1 \wedge dx^3 \wedge \, \ldots \, \wedge dx^n\Big) \\ & + \partial_3 V^3 \; dx_3 \wedge \Big(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \, \ldots \, \wedge dx^n\Big) \\ & - \ldots \\ & + (-1)^{n-1} \partial_n V^n \; dx^n \wedge \Big(dx^1 \wedge \, \ldots \, \wedge dx^{n-1}\Big). \end{aligned} \tag{105}$$

Ahora reordenamos las 1-formas en cada cadena de productos exteriores. En el primer caso no hay que hacer ninguna transposición. En el segundo, hay que hacer una. En el tercero, hay que hacer dos, etc. Cada transposición involucra una multiplicación por menos uno, que cancela la multiplicación que hicimos en primer lugar para llevar las 1-formas al comienzo del producto tensorial. En definitiva,

$$d\big[\Omega(\vec{V})\big] = \partial_i V^i \; dx^1 \wedge dx^2 \ldots \wedge dx^n = \partial_i V^i \; \Omega. \tag{106}$$

Según la definición (93),

$$d\big[\Omega(\vec{V})\big] = \big(\mathrm{div}_\Omega \vec{V}\big)\Omega, \tag{107}$$

esto implica que en un espacio euclídeo en coordenadas cartesianas

$$\mathrm{div}_\Omega(\vec{V}) = \partial_i V^i, \tag{108}$$

que es el resultado conocido de cálculo vectorial.

Al principio evitamos dar una justificación de la fórmula para la divergencia. En todo caso, es este resultado particular para espacios euclídeos en coordenadas cartesianas el que lleva a generalizar la divergencia según la definición (107).

■ Los dos últimos *items* del problema quedan como ejercicio.