Plano hiperbólico como superficie inmersa en $\mathbb{R}^{1,2}$

En el espacio de Minkowski 3D la métrica es $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$

en coordenadas "cartesianas" $X^\mu = (T, X, Y)$

La norma de vectores está dada por

$$\|\bar{X}\|^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -T^2 + X^2 + Y^2 \qquad (1)$$

Hipérbolas en $\mathbb{R}^{1,2}$: $\|\bar{X}\|^2 = \pm \ell^2$ define hipérbolas

▷ Plano hiperbólico:

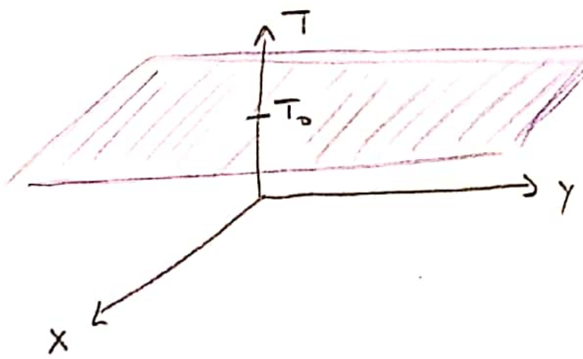
Como sugiere su nombre, el plano hiperbólico es una superficie **espacial**, es decir, es una superficie euclídea (la métrica "natural" es la métrica inducida y es definida positiva).

Cómo obtenemos una superficie espacial en $\mathbb{R}^{1,3}$?

Un caso sencillo (q' no corresponde al plano hiperbólico) es tomar una superficie a tiempo constante $T = T_0 = \text{const}$ $(T_0 > 0)$

La función q' define dicha superficie es

$$f(\bar{X}) = T - T_0 = 0$$



Es fácil ver q' los vectores tangentes a dicha superficie son ∂_X y ∂_Y en coords cartesianas del espacio ambiente (Minkowski).

Tmb es fácil ver q' el vector normal es ∂_T

$$g(\partial_T, \partial_X) = \eta(\partial_T, \partial_X) = \eta(\partial_T, \partial_Y) = 0$$

Tmb es fácil ver q' la norma de los vectores tangentes es positiva, mientras q' la norma del vector normal es negativa:

$$\eta(\partial_x, \partial_x) = \eta(\partial_y, \partial_y) = 1 \quad , \quad \eta(\partial_T, \partial_T) = -1$$

Esto nos brinda un ejemplo trivial de la clasificación de hipersuperficies en espacios lorentzianos según la norma de su vector (o 1-forma) normal (ver Apéndice D del Carroll).

Volviendo al plano hiperbólico, este está definido por el hiperboloide

$$||\bar{x}||^2 = -T^2 + x^2 + y^2 = -\ell^2 \qquad (2)$$

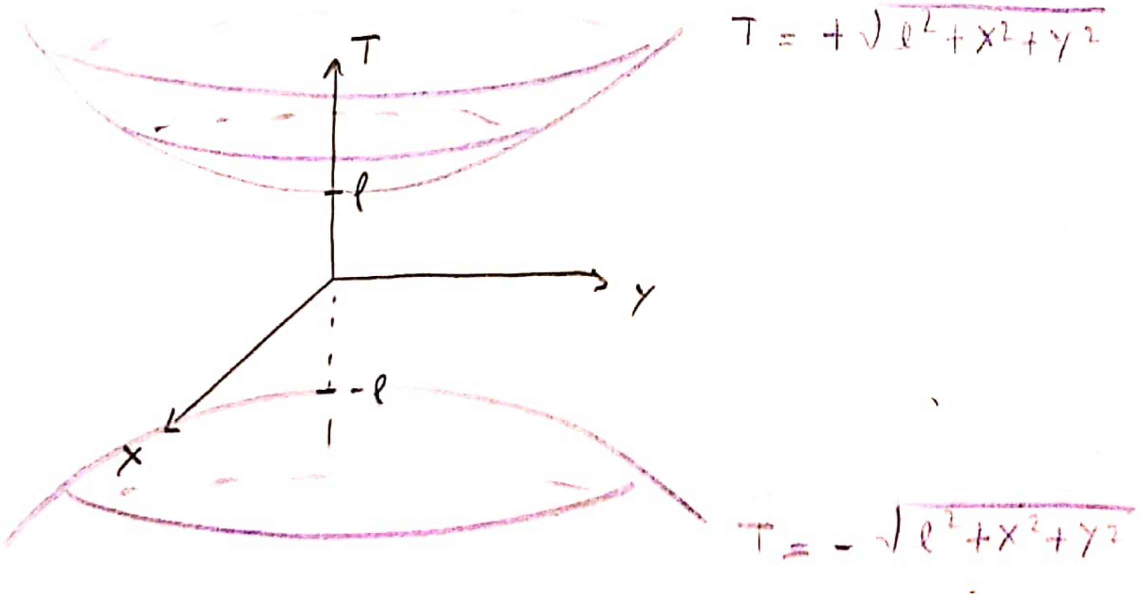
notemos q' (2) es equivalente a

$$T^2 = \ell^2 + x^2 + y^2 > 0 \quad \forall \{x, y\} \qquad (3)$$

esto nos da dos superficies

$$T = \pm\sqrt{\ell^2 + x^2 + y^2} \qquad (4)$$

Entonces (4) define un hiperboloide de dos hojas



Si nos quedamos con el hiperboloide de arriba $(T>0)$

una parametrización que cubre toda la superficie es (fijamos $l=1$)

$$\begin{cases} T(\rho,\varphi) = \operatorname{ch}\rho \\ X(\rho,\varphi) = \operatorname{sh}\rho\cos\varphi \\ Y(\rho,\varphi) = \operatorname{sh}\rho\sin\varphi \end{cases} \quad (5)$$

con $\rho\in[0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$ cubrimos toda la superficie

Para ver cual es la métrica inducida en el plano hiperbólico simplemente evaluamos el intervalo 3D con la parametrización (5) (Problema 4b Guía 2)

$$ds^2_{\mathbb{H}^2} = ds^2_{\mathbb{R}^{1,3}}\Big|_{\text{parametrización}} = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2\rho\, d\varphi^2 \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \operatorname{sh}^2\rho \end{pmatrix}$$ es una métrica euclídea

En el Problema 1a de la Primer Entrega calculamos los vectores tangentes y la 1-forma normal

$$\frac{d}{d\rho} = \operatorname{sh}\rho\,\partial_T + \operatorname{ch}\rho\cos\varphi\,\partial_X + \operatorname{ch}\rho\sin\varphi\,\partial_Y$$

$$\frac{d}{d\varphi} = -\operatorname{sh}\rho\sin\varphi\,\partial_X + \operatorname{sh}\rho\cos\varphi\,\partial_Y$$

$$\tilde{n} = \frac{1}{2}\partial_\mu f\,\tilde{d}x^\mu = -T\tilde{d}T + X\tilde{d}X + Y\tilde{d}Y \qquad (7)$$

Es fácil ver que

$$\|d/d\rho\|^2 = \eta(d/d\rho, d/d\rho) = 1 \quad , \quad \|d/d\varphi\|^2 = \eta(d/d\varphi, d/d\varphi) = \operatorname{sh}^2\rho > 0$$

es decir, los vectores tangentes son tipo **espacio**.

Por otro lado,

$$\|\tilde{n}\|^2 = \eta^{-1}(\tilde{n},\tilde{n}) = -T^2 + X^2 + Y^2 = -1$$

es decir, la 1-forma normal es tipo **tiempo**.

Entonces $\mathbb{H}^2$ es una superficie tipo **espacio**.

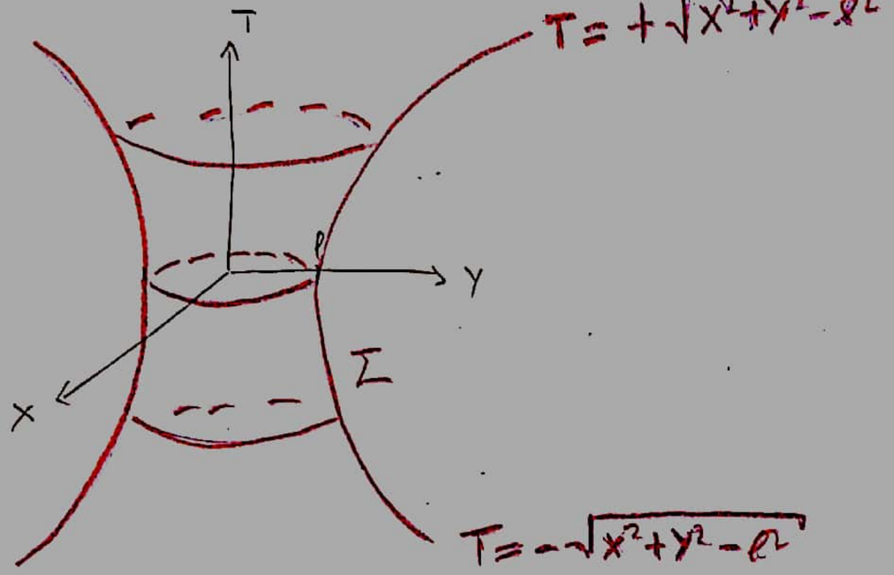
▷ ¿Qué pasa si consideramos el otro hiperboloide?

$$\|\bar{X}\|^2 = -T^2 + X^2 + Y^2 = \ell^2 \quad (8)$$

esto equivale a

$$T^2 = X^2 + Y^2 - \ell^2 \geq 0 \quad \text{si} \quad X^2 + Y^2 \geq \ell^2$$

(8) es un hiperboloide de 1 sola hoja



Podemos parametrizar (8) con (fijamos $\ell = 1$)

$$\begin{cases} T(\tau,\varphi) = \operatorname{sh}\tau \\ X(\tau,\varphi) = \operatorname{ch}\tau\cos\varphi \\ Y(\tau,\varphi) = \operatorname{ch}\tau\sin\varphi \end{cases} \quad (9)$$

con $\tau \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi)$ cubrimos la parte de arriba y con $\tau \in (-\infty,0]$, $\varphi \in [0,2\pi)$

En este caso la métrica inducida es

$$ds^2_\Sigma = -d\tau^2 + \operatorname{ch}^2\tau\, d\varphi^2 \quad (10)$$

Esta métrica bidimensional es lorentziana!

Los vectores tangentes a Σ son

$$\frac{d}{d\tau} = \operatorname{ch}\tau\,\partial_T + \operatorname{sh}\tau\cos\varphi\,\partial_X + \operatorname{sh}\tau\sin\varphi\,\partial_Y$$

$$\frac{d}{d\varphi} = -\operatorname{ch}\tau\sin\varphi\,\partial_X + \operatorname{ch}\tau\cos\varphi\,\partial_Y \quad (11)$$

Y la 1-forma normal es

$$\tilde{n} = \frac{1}{2}\partial_\mu f \, \tilde{d}x^\mu = -T\tilde{d}T + X\tilde{d}X + Y\tilde{d}Y \qquad (12)$$

Podemos comprobar g'

$$\| d/d\tau \|^2 = -1 \qquad y \qquad \| d/d\varphi \|^2 = ch^2\tau > 0$$

es decir, un vector tangente es tipo **tiempo** y otro vector tangente es tipo **espacio**.

Por otro lado, la norma de la 1-forma normal es

$$\| \tilde{n} \|^2 = -T^2 + X^2 + Y^2 = +1$$

es decir, es tipo espacio.

Entonces Σ es una superficie tipo tiempo.

- <u>Comentario de Yapa 1</u>

Se pueden ver las parametrizaciones (5) y (9) como mapas entre variedades

- P/ $\mathbb{H}^2$

$$\Phi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$$

$$\Phi(\rho,\varphi) = (ch\,\rho,\ sh\rho\cos\varphi,\ sh\rho\sin\varphi) \qquad (13)$$

- P/ Σ

$$\Phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$$

$$\Phi(\tau,\varphi) = (sh\,\tau,\ ch\tau\cos\varphi,\ ch\tau\sin\varphi) \qquad (14)$$

Entonces, utilizando la "tecnología" de pullbacks (ver apunte de Facundo Clase 9) se puede ver a las métricas inducidas (6) y (10) como los pullbacks de $\mathbb{R}^{1,3}$ bajo los mapas (13) y (14) respectivamente

$$g' = \Phi^* \eta \qquad (15)$$

- Comentario de Yapa 2: Spoiler

Dentro de poco vamos a ver el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Estos tensores caracterizan la curvatura de una variedad dotada de una métrica.

El escalar de Ricci del plano hiperbólico es

$$R(\mathbb{H}^2) = -2$$

El escalar de Ricci de la esfera es

$$R(S^2) = +2$$

La métrica de I pertenece a la versión bidimensional de una familia de métricas llamada FRLW

$$ds^2_{FRLW\,2D} = -d\tau^2 + a^2(\tau)\,dx^2$$

cuyo escalar de Ricci (en 2D) es

$$R(FRLW\,2D) = \frac{2}{a(\tau)} \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} \overset{a(\tau)=\operatorname{ch}\tau}{=} 2$$

Obs: Notar g', S^2 y I son globalmente distintos, S^2 es compacto mientras g' I no lo es.