Problema (1)

a) Esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = \ell^2\}$

Plano hiperbólico $H^2 = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^{1,2} \mid t>0 \ \& \ -t^2+x^2+y^2 = -\ell^2\}$

- En espacio euclídeo 3D con coord cartesianas la métrica "natural" p/ medir distancias es $g_{ij} = \delta_{ij}$

$\|\bar{x}\|^2 = \delta_{ij} x^i x^j = x^2+y^2+z^2$

Como el radio de la esfera es const, sin pérdida de generalidad asumimos $\ell = 1$. La parametrización de la esfera 2 es

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad d\ell^2_{S^2} = d\ell^2\Big|_{esf} = \delta_{ij}\,dx^i dx^j\Big|_{esf} = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \quad (\text{Prob } 4)$$

θ y φ parametrizan la esfera S^2 así como cualquier punto en S^2 y las curvas sobre la esfera.

$\Rightarrow$ los vectores tangentes de la esfera son $\bar{\Theta} = \frac{d}{d\theta}$, $\bar{\Phi} = \frac{d}{d\varphi}$

Si los expresamos en coord cartesianas: $\{x,y,z\}$

$$\bar{\Theta} = \frac{d}{d\theta} = \frac{dx^i}{d\theta}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{dx}{d\theta}\partial_x + \frac{dy}{d\theta}\partial_y + \frac{dz}{d\theta}\partial_z$$

$$\boxed{\bar{\Theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\partial_x + \cos\theta\sin\varphi\,\partial_y - \sin\theta\,\partial_z}$$

Haciendo lo mismo para $\bar{\Phi}$ obtenemos

$$\boxed{\bar{\Phi} = -\sin\theta\sin\varphi\,\partial_x + \sin\theta\cos\varphi\,\partial_y}$$

la 1-forma normal se obtiene de diferenciar la condición q' define la superficie

$$f(x) = x^2+y^2+z^2 = 1 = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{n} = n_\mu \, \tilde{d}x^\mu = \partial_\mu f \, \tilde{d}x^\mu = 2\left(x\,\tilde{d}x + y\,\tilde{d}y + z\,\tilde{d}z\right)$$

Para no arrastrar el factor 2 podemos hacer el cambio $f \mapsto 2f$ (cualquier factor multiplicativo no altera el hecho de q' $\partial_\mu f$ sea perpendicular a la superficie)

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = x\,\tilde{d}x + y\,\tilde{d}y + z\,\tilde{d}z}$$

Veamos q' $\tilde{n}$ es $\perp$ a $\bar{\Theta}$ y $\bar{\Phi}$

$$\tilde{n}(\bar{\Theta}) = \langle \tilde{n}, \bar{\Theta} \rangle = \left(x\,\tilde{d}x + y\,\tilde{d}y + z\,\tilde{d}z\right)\left(\cos\theta\cos\varphi\,\partial_x + \cos\theta\sin\varphi\,\partial_y - \sin\theta\,\partial_z\right)$$

Recordando q' $\tilde{d}x^i(\partial_j) = \delta^i_j$

$$\tilde{n}(\bar{\Theta}) = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\cos\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \sin\theta\cos\theta = 0$$

$x = \sin\theta\cos\varphi$
$y = \sin\theta\sin\varphi$
$z = \cos\theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle \tilde{n}, \bar{\Theta} \rangle = 0}$$

Análogamente p/ $\langle \tilde{n}, \bar{\Phi} \rangle$ obtenemos

$$\langle \tilde{n}, \bar{\Phi} \rangle = -x\sin\theta\sin\varphi + y\sin\theta\cos\varphi = -\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle \tilde{n}, \bar{\Phi} \rangle = 0}$$

Por lo tanto, $\tilde{n}$ es normal a los vectores tangentes $\bar{\Theta}$ y $\bar{\Phi}$ en el sentido de (4)

- En el espacio de Minkowski tridimensional la métrica para medir "distancias" es $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1)$

$$\|x\|^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -t^2+x^2+y^2$$

Asumiendo $l=1$, una parametrización del plano hiperbólico es

$$\begin{cases} t(\rho,\varphi) = \mathrm{ch}\,\rho \\ x(\rho,\varphi) = \mathrm{sh}\,\rho \cos\varphi \\ y(\rho,\varphi) = \mathrm{sh}\,\rho \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad ds^2_{H^2} = d\rho^2 + \mathrm{sh}^2\rho\, d\varphi^2$$

Obs: notar q' $t = +\sqrt{1+x^2+y^2} \geq 1$

ρ y φ parametrizan el plano hiperbólico y cualquier punto en el mismo así como las curvas en el

$\Rightarrow$ vectores tangentes $\overline{R} = \frac{d}{d\rho}$ y $\overline{\Phi} = \frac{d}{d\varphi}$

Como antes $\overline{R} = \frac{d}{d\rho} = \frac{dx^\mu}{d\rho}\partial_\mu$.

$$\boxed{\overline{R} = \mathrm{sh}\,\rho\, \partial_t + \mathrm{ch}\,\rho \cos\varphi\, \partial_x + \mathrm{ch}\,\rho \sin\varphi\, \partial_y}$$

$$\boxed{\overline{\Phi} = -\mathrm{sh}\,\rho \sin\varphi\, \partial_x + \mathrm{sh}\,\rho\cos\varphi\, \partial_y}$$

1- forma normal: $f(x) = -t^2+x^2+y^2 = -1$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{n} = -t\,\tilde{d}t + x\,\tilde{d}x + y\,\tilde{d}y}$$

$$\langle \tilde{n}, \overline{R} \rangle = -t\,\mathrm{sh}\,\rho + x\,\mathrm{ch}\,\rho\cos\varphi + y\,\mathrm{ch}\,\rho \sin\varphi$$

$$= -\mathrm{ch}\rho\,\mathrm{sh}\rho + \mathrm{sh}\rho\,\mathrm{ch}\rho\cos^2\varphi + \mathrm{sh}\rho\,\mathrm{ch}\rho\sin^2\varphi = 0$$

$t = \mathrm{ch}\rho, \quad x = \mathrm{sh}\rho\cos\varphi, \quad y = \mathrm{sh}\rho\sin\varphi$

$\langle \tilde{n}, \bar{\Phi} \rangle = x(-\operatorname{sh}\rho \sin\varphi) + y \operatorname{sh}\rho\cos\varphi = \operatorname{sh}^2\rho(-\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{n} \text{ es normal a } \bar{R} \text{ y } \bar{\Phi}}$

Comentario yapa: en espacios lorentzianos (es decir, en aquellos donde la métrica tiene un signo menos) las hipersuperficies pueden ser tipo tiempo o tipo espacio (+tmb tipo nulas).

Una hipersuperficie se dice tipo **espacio** si su vector normal $\bar{n}$ cuyas componentes son $(\bar{n})^\mu = g^{\mu\nu}(\tilde{n})_\nu$ es tipo tiempo, es decir, $g(\bar{n},\bar{n}) < 0$.

Una hipersuperficie se dice tipo **tiempo** si su vector normal es tipo espacio, es decir, $g(\bar{n},\bar{n}) > 0$

Notar q' p/ el plano hiperbólico $\bar{n}$ es tipo tiempo.

(ver Apéndice D del Carroll y Sección 2.7 del Hawking - Ellis)

b) AdS_2 se define como el hiperboloide

$$\|X\|^2 = g_{AB} X^A X^B = -U^2 - V^2 + X^2 = -\ell^2 \quad (*)$$

con $g_{AB} = \operatorname{diag}(-1,-1,1)$

Parametrización de (*)

$$\left.\begin{aligned} U(\tau,\rho) &= \cos\tau \cosh\rho \\ V(\tau,\rho) &= \sin\tau\cosh\rho \\ X(\tau,\rho) &= \sinh\rho \end{aligned}\right\} \Rightarrow ds^2_{(AdS_2)} = g_{AB}\, dX^A dX^B \Big|_{\{U,V,X\} \text{ q' cumplen } (*)}$$

$$\boxed{ds^2_{(AdS_2)} = -\operatorname{ch}^2\rho\, d\tau^2 + d\rho^2}$$

τ y ρ parametrizan AdS_2 $\Rightarrow$

$\bar{T} = \frac{d}{d\tau}$ y $\bar{R} = \frac{d}{d\rho}$ son sus vectores tangentes

$$\bar{T} = \frac{d}{d\tau} = \frac{dx^A}{d\tau}\partial_A = \underline{-\sin\tau\,ch\rho\,\partial_U + \cos\tau\,ch\rho\,\partial_V = \bar{T}}$$

$$\bar{R} = \frac{d}{d\rho} = \frac{dx^A}{d\rho}\partial_A = \underline{\cos\tau\,sh\rho\,\partial_U + \sin\tau\,sh\rho\,\partial_V + ch\rho\,\partial_X = \bar{R}}$$

1-forma normal

$$f(x) = -U^2 - V^2 + X^2 = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{n} = -U\tilde{d}U - V\tilde{d}V + X\tilde{d}X}$$

$$\langle \tilde{n}, \bar{T}\rangle = +U\sin\tau\,ch\rho - V\cos\tau\,ch\rho$$

$$\underset{\text{usando parametrización}}{=} \cos\tau\sin\tau\,ch^2\rho - \sin\tau\cos\tau\,ch^2\rho = 0 \checkmark$$

$$\langle \tilde{n}, \bar{R}\rangle = -U\cos\tau\,sh\rho - V\sin\tau\,sh\rho + X\,ch\rho$$

$$= -\cos^2\tau\,ch\rho\,sh\rho - \sin^2\tau\,ch\rho\,sh\rho + sh\rho\,ch\rho = 0 \checkmark$$

$$\boxed{\tilde{n} \text{ es normal a } \bar{T} \text{ y } \bar{R}}$$

Escaneado con CamScanner

Problema ②

Cambio de coordenadas $\{t, x, y, z\} \longrightarrow \{t', x', y', z'\}$

$$t = \frac{c}{g}\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right) sh\left(\frac{gt'}{c}\right),$$

$$x = \frac{c^2}{g}\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right) ch\left(\frac{gt'}{c}\right) - \frac{c^2}{g},$$

$$y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad [c] = m/s \; , \; [g] = m/s^2 \qquad (6)$$

a) Hallar el intervalo $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ y el diferencial de tiempo propio $c^2 d\tau^2 = -ds^2$ en las coords $\{t', x', y', z'\}$.

Primero hallamos los diferenciales dt y dx en las coords primadas (notar q' $dy = dy'$, $dz = dz'$). Recordemos q' $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}$

$$t = t(t', x') \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dt}{dt'} dt' + \frac{dt}{dx'} dx'$$

$$\Rightarrow \quad dt = \left(1 + \frac{gx'}{c}\right) ch\left(\frac{gt'}{c}\right) dt' + \frac{1}{c} sh\left(\frac{gt'}{c}\right) dx'$$

$$x = x(t', x') \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dx}{dt'} dt' + \frac{dx}{dx'} dx'$$

$$\Rightarrow \quad dx = c\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right) sh\left(\frac{gt'}{c}\right) dt' + ch\left(\frac{gt'}{c}\right) dx'$$

Los cuadrados de los diferenciales quedan:

$$-c^2 dt^2 = -c^2\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)^2 ch^2\left(\frac{gt'}{c}\right) dt'^2 - 2c\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right) sh\left(\frac{gt'}{c}\right) ch\left(\frac{gt'}{c}\right) dt' dx' - sh^2\left(\frac{gt'}{c}\right) dx'^2$$

$$dx^2 = c^2\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)^2 sh^2\left(\frac{gt'}{c}\right) dt'^2 + 2c\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right) sh\left(\frac{gt'}{c}\right) ch\left(\frac{gt'}{c}\right) dt' dx' + ch^2\left(\frac{gt'}{c}\right) dx'^2$$

La parte del intervalo q' no transforma trivialmente es

$$-c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)^2 dt'^2 + dx'^2$$

(Aux/ $ch^2 x - sh^2 x = 1$

Por lo tanto el intervalo en las coords $\{x^{\mu'}\}$ es

$$\boxed{ds^2 = -c^2\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

y el diferencial de tiempo propio

$$\boxed{d\tau^2 = \left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)^2 dt'^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\right)}$$

b) Aproximar $\frac{gx'}{c^2} \ll 1 \Rightarrow$ hacemos una expansión de Taylor en $g_{0'0'}(x')$ alrededor de $x'=0$

$$\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)^2 \simeq 1 + 2\frac{gx'}{c^2} + O\left(\frac{g^2x^2}{c^4}\right) \Rightarrow ds^2 \simeq -c^2\left(1+2\frac{gx'}{c^2}\right)dt'^2 + d\bar{x}\cdot d\bar{x}$$

El intervalo de campo débil del probleme 11 es

$$ds^2 = -c^2\left(1+2\frac{\Phi}{c^2}\right)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Podemos identificar $\boxed{\Phi = gx'}$

y notar q' es el potencial gravitatorio newtoniano asociado a un campo uniforme en la dirección $-\hat{x}$

c) Ver q' p/ $gt'/c \ll 1$ y $\frac{gx}{c^2} \ll 1$ la transformación (6) corresponde a un sisteme uniformemente acelerado en la teoría de Newton

Haciendo desarrollos de Taylor obtenemos

$$ch(\alpha x) \simeq 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \quad , \quad sh(\alpha x) \simeq \alpha x$$

$$\Rightarrow t \simeq \frac{c}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\frac{g}{c}t' \simeq t' \Rightarrow \boxed{t \simeq t'}$$

Además

$$x \simeq \frac{c^2}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{g^2}{c^2}t'^2\right)-\frac{c^2}{g}$$

$$= \frac{c^2}{g}\left\{\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{g^2}{c^2}t'^2+\frac{gx'}{c^2}+\frac{1}{2}\frac{g^3}{c^4}x't'^2-\cancel{1}\right\}$$

$$\simeq \frac{1}{2}gt'^2+x' \quad \Rightarrow \quad \boxed{x' \cong x-\frac{1}{2}gt'^2} \; \checkmark$$

El sistema de coordenadas $\{t', x'\}$ se mueve aceleradamente respecto de $\{t, x\}$

d) · Ver q' un reloj en reposo en $x'=h$ adelanta respecto de uno situado en $x'=0$

Reloj en reposo en $x'=h=\text{const} \Rightarrow dx'=0=dy'=dz'$

Reloj en reposo en $x'=0=\text{const} \Rightarrow dx'=0=dy'=dz'$

Del item a) tenemos q'

$$d\tau' = \left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)dt' \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau' = \left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\Delta t'$$

(el tiempo propio es el tiempo q' mide el reloj de un observador en reposo)

p/ observador en $x'=h$ $\qquad \Delta\tau\big|_{x'=h} = \left(1+\frac{gh}{c^2}\right)\Delta t'$

p/ observador en $x'=0$ $\qquad \Delta\tau\big|_{x'=0} = \Delta t'$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\tau|_h}{\Delta\tau_0} = 1+\frac{gh}{c^2} > 1} \quad \Rightarrow \text{reloj en } x'=h \text{ avanza más rápido}$$

El hecho de q' los relojes situados "más arriba" en el potencial avancen más rápido es equivalente al corrimiento al rojo gravitatorio en términos de frecuencias $\nu = 1/\Delta\tau$

$$\frac{\nu_{x'=0}}{\nu_{x'=h}} \simeq 1 + \frac{gh}{c^2}$$

(ver Clase teórica 2 y Probleme 9 guía 2)

es decir, es otra forme de expreser el principio de equivalencia.

Problema 3

Se tiene

$$\tilde{F} = -\frac{q}{r^2}\,\tilde{d}t\wedge\tilde{d}r \qquad (8)$$

a) Comprobar q' (8) corresponde al campo de una carga puntual

Recordemos q' $\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$ y $\tilde{A} = A_\mu \tilde{d}x^\mu$ con $A_\mu = (-\phi, A_i)$
$\mu = \{0,1,2,3\}$ $\quad i = \{1,2,3\}$

P/ una carga puntual en electrostática $\partial_t \phi = 0$ y $A_i = A^i = 0$
$\phi = \phi(r)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A} = A_0\,\tilde{d}x^0 = -\phi\,\tilde{d}t$$

$$\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A} = \tilde{d}\left(A_0(r)\,\tilde{d}x^0\right) = \partial_r A_0(r)\,\tilde{d}r\wedge\tilde{d}t$$

$$\tilde{F} = -\partial_r A_0(r)\,\tilde{d}t\wedge\tilde{d}r = +\partial_r\phi(r)\,\tilde{d}t\wedge\tilde{d}r$$

ordenamiento de la base
$\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$
$\{\tilde{d}t, \tilde{d}r, \tilde{d}\theta, \tilde{d}\varphi\}$

$$= -\frac{q}{r^2}\,\tilde{d}t\wedge\tilde{d}r \Rightarrow \boxed{\partial_r\phi = -\frac{q}{r^2}}$$

Potencial de carga puntual $\phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const} \Rightarrow \partial_r\phi = -\frac{q}{r^2}$ ✓

Por otro lado, las componentes "temporal-espacial" de $F_{\mu\nu}$ nos dan el campo eléctrico. Las componentes puramente espaciales se relacionan con el campo magnético.

b) obtener $\tilde{\tilde{F}}$ en coords cartesianos

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \tilde{d}r = \frac{x}{r}\tilde{d}x + \frac{y}{r}\tilde{d}y + \frac{z}{r}\tilde{d}z$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{F}} = F_{0r}\, \tilde{d}t \wedge \left(\frac{x}{r}\tilde{d}x + \frac{y}{r}\tilde{d}y + \frac{z}{r}\tilde{d}z\right)$$

$$\tilde{\tilde{F}} = -\frac{q}{r^2}\, \tilde{d}t \wedge \left(\cos\varphi\sin\theta\, \tilde{d}x + \sin\varphi\sin\theta\, \tilde{d}y + \cos\theta\, \tilde{d}z\right)$$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

De la expresión de arriba tmb podemos identificar $F_{ti} = -E_i$

$$\bar{E}(r) = \frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{q}{r^2}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right)$$