Ejercicio concreto de transporte y derivada de Lie: Ejer 17b - Guía 3

Facundo Rost

Relatividad General - 2do cuatrimestre 2020

Resumen

En la clase del 30/09 no llegué a hacer un ejercicio concreto de derivada de Lie o transporte de Lie, así que en este apunte hago el ejer 17b de la guía 3. Capaz les sirva ver como aplicar todos los conceptos vistos en la segunda parte de dicha clase en un ejercicio práctico.

El problema 17b de la guía 3 pide, en el plano $M = \mathbb{R}^2$, calcular el transporte de Lie del vector ∂_x en el punto $p = (x, y) = (1, 0)$ a lo largo del campo de vectores $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y$. Es decir, a lo largo de la curva integral de $\vec{U}$ que pasa por p. Para resolver esto, primero calculamos las curvas integrales de $\vec{U}$, y luego calcularemos explícitamente el push-forward de $\vec{U}$ por los difeomorfismos α_λ inducidos por el campo vectorial $\vec{U}$ (es decir, el transporte de Lie) por dos métodos distintos. Vean con atención las figuras, capaz sean útiles para hacerse una idea geométrica de lo que está pasando.

El problema 17a, que queda como ejercicio, pide hacer esto mismo con $\vec{U} = -y\partial_x + x\partial_y = \partial_\theta$.

Índice

1. Curvas integrales

Para calcular las curvas integrales $x(\lambda)$ del campo de vectores $\vec{U}$, planteamos:

$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} = U^\mu(x(\lambda)) \tag{1}$$

dada una cierta condición inicial genérica $x^i(\lambda = 0) = x^i_0$.

Para nuestro campo de vectores particular $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y = U^1(x,y)\partial_x + U^2(x,y)\partial_y \iff U^1(x,y) = y,\ U^2(x,y) = x$ y nuestra variedad $M = \mathbb{R}^2$ (considerando la carta $x \equiv x^1$ y $y \equiv x^2$), se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1(\lambda)}{d\lambda} = \dfrac{dx(\lambda)}{d\lambda} = U^1(x(\lambda), y(\lambda)) = y(\lambda) \\ \dfrac{dx^2(\lambda)}{d\lambda} = \dfrac{dy(\lambda)}{d\lambda} = U^2(x(\lambda), y(\lambda)) = x(\lambda) \end{cases} \tag{2}$$

O sea, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(\lambda)}{d\lambda} = y(\lambda) \\ \dfrac{dy(\lambda)}{d\lambda} = x(\lambda) \end{cases} \tag{3}$$

dada una cierta condición inicial genérica $x(\lambda = 0) = x_0$ y $y(\lambda = 0) = y_0$.

Este sistema de ecuaciones diferenciales es equivalente a:

$$\begin{cases} \dfrac{d(x(\lambda) + y(\lambda))}{d\lambda} = x(\lambda) + y(\lambda) \iff x(\lambda) + y(\lambda) = Ae^\lambda \\ \dfrac{d(x(\lambda) - y(\lambda))}{d\lambda} = -(x(\lambda) - y(\lambda)) \iff x(\lambda) - y(\lambda) = Be^{-\lambda} \end{cases} \tag{4}$$

Con A, B constantes de integración. Luego, despejando $x(\lambda), y(\lambda)$, tenemos que la solución es:

$$\begin{cases} x(\lambda) = Ae^\lambda + Be^{-\lambda} \\ y(\lambda) = Ae^\lambda - Be^{-\lambda} \end{cases} \tag{5}$$

Imponiendo la condición inicial genérica $x(\lambda = 0) = A + B = x_0$ y $y(\lambda = 0) = A - B = y_0$, podemos expresar A, B en términos de x_0, y_0 de la forma: $A = (x_0 + y_0)/2$ y $B = (x_0 - y_0)/2$. Por lo tanto, reemplazando esto en la ecuación anterior, podemos expresar $x(\lambda), y(\lambda)$ en términos de la condición inicial x_0, y_0:

$$\begin{cases} x(\lambda) = \dfrac{(x_0 + y_0)}{2}e^\lambda + \dfrac{(x_0 - y_0)}{2}e^{-\lambda} = x_0\cosh(\lambda) + y_0\sinh(\lambda) \\ y(\lambda) = \dfrac{(x_0 + y_0)}{2}e^\lambda - \dfrac{(x_0 - y_0)}{2}e^{-\lambda} = x_0\sinh(\lambda) + y_0\cosh(\lambda) \end{cases} \tag{6}$$

Luego, vemos que la curva integral $x^i(\lambda)$ del campo de vectores $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y$ con condición inicial $(x(\lambda = 0), y(\lambda = 0)) = (x_0, y_0)$, tiene la forma descripta por la ecuación anterior. En este caso, la curva integral $x^i(\lambda)$ está bien definida para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para toda condición inicial (x_0, y_0), luego se dice que el campo de vectores $\vec{U}$ es completo.

Una observación acerca de estas curvas integrales: A lo largo de cada curva integral, la expresión

$$(x(\lambda))^2-(y(\lambda))^2 = x_0^2(\cosh^2(\lambda)-\sinh^2(\lambda))-y_0^2(\cosh^2(\lambda)-\sinh^2(\lambda))+0 = x_0^2-y_0^2 = \text{constante} \tag{7}$$

es independiente de λ, o sea se mantiene constante a lo largo de la curva integral (se usó que los términos cruzados se tachan y dan 0). Es decir, es un invariante en cada curva integral.

En particular, para la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 0)$ se tiene que la curva integral de $\vec{U}$ con dicha condición inicial es $(x(\lambda), y(\lambda)) = (\cosh(\lambda), \sinh(\lambda))$.

Los puntos $(x(\lambda), y(\lambda))$ de la curva integral se pueden interpretar como los puntos a los que se puede llegar a partir de aplicarle un boost (transformación propia de Lorentz) al punto (x_0, y_0). Precisamente, vemos que $x(\lambda)^2 - y(\lambda)^2 = x_0^2 - y_0^2$ se mantiene invariante, y en efecto las transformaciones de Lorentz mantienen invariante a la forma cuadrática $x^2 - y^2$.

Por otro lado, el campo de vectores $\vec{U}$ induce una familia de difeomorfismos $\{\alpha_\lambda : M \to M \text{ tq } \lambda \in \mathbb{R}\}$, que son tales que:

$$\alpha_\lambda(x_0, y_0) = (x(\lambda), y(\lambda)) = (x_0\cosh(\lambda) + y_0\sinh(\lambda), x_0\sinh(\lambda) + y_0\cosh(\lambda)) \tag{8}$$

En este caso, el difeomorfismo α_λ está bien definido para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (pues el campo de vectores $\vec{U}$ es completo).

O sea, el difeomorfismo α_λ manda un punto de la variedad descripto por (x_0, y_0) (que se corresponde con el parámetro $\lambda = 0$ de la curva integral que pasa por dicho punto) a un punto de la variedad descripto por $(x(\lambda), y(\lambda)) = (x_0\cosh(\lambda)+y_0\sinh(\lambda), x_0\sinh(\lambda)+y_0\cosh(\lambda))$ (que se corresponde con el valor del parámetro λ de dicha curva integral con condición inicial (x_0, y_0)). Ver figura 1 para entender esto gráficamente.

Notar: Este difeomorfismo mantiene invariante la forma cuadrática $x^2 - y^2$.

Vemos que precisamente este difeomorfismo actúa como un boost, como una transformación propia de Lorentz (para todo $\lambda \in \mathbb{R}$). El λ está relacionado con la velocidad v del boost, más precisamente con $\tanh(v/c)$. Porque justamente mueve a los puntos (x_0, y_0) de la variedad manteniendo $x^2 - y^2$ constante. Vemos también que un difeomorfismo funciona como un cambio de coordenadas, como un cambio del sistema de referencia.

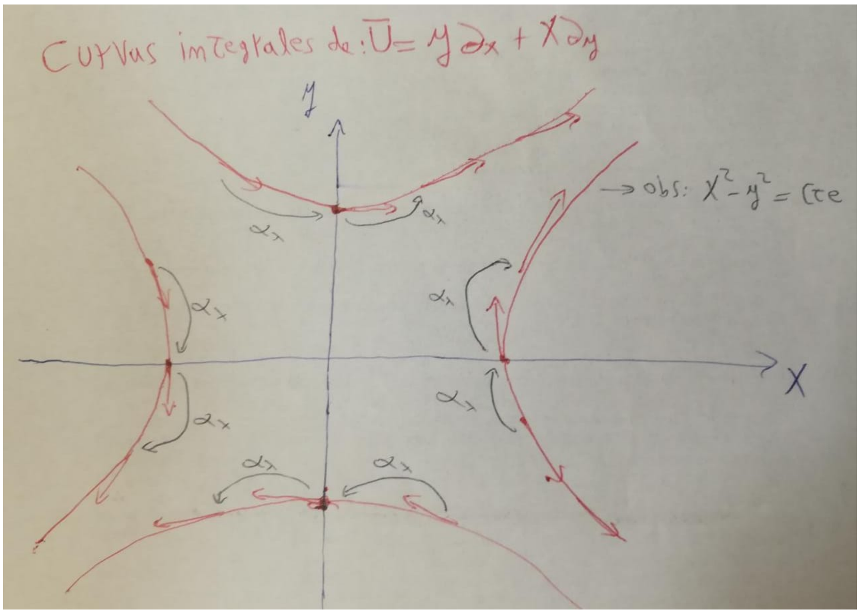

Figura 1: Curvas integrales de $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y$. El campo de vectores son las flechas en cada punto de la variedad. Notar que, al recorrer una curva, se mantiene invariante $x^2 - y^2$. También se puede ver como el difeomorfismo α_λ mueve a los puntos de la variedad: Los mueve λ a lo largo de las curvas integrales de $\vec{U}$ (o sea el punto $x(\lambda = 0)$ de una curva integral lo manda a $x(\lambda)$).

2. Transporte de Lie, o pushforward por α_λ

Ya conociendo las curvas integrales de $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y$, calculemos el transporte de Lie de $\vec{V}|_p \equiv \partial_x|_p$ en el punto $p = (1, 0)$ a lo largo de $\vec{U}$, o sea a lo largo de la curva integral $(x(\lambda), y(\lambda))$ de $\vec{U}$ con condición inicial $p = (1, 0)$ (que como vimos es $\alpha_\lambda(1, 0) = (x(\lambda), y(\lambda)) = (\cosh(\lambda), \sinh(\lambda))$). Notar que en principio sólo nos va a interesar el vector $\vec{V}|_p = \partial_x|_p$ en el punto p, no en otro punto.

Por definición, el transporte de Lie de $\vec{V}|_p \equiv \partial_x|_p$ a lo largo de $\vec{U}$ viene dado por el pushforward $\alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p) \in T_{\alpha_\lambda(p)}M$ de $\vec{V}|_p$ por el difeomorfismo α_λ, que es un vector definido en $\alpha_\lambda(p)$.

Como $\alpha_\lambda(x, y) = (x\cosh(\lambda) + y\sinh(\lambda), x\sinh(\lambda) + y\cosh(\lambda)) \equiv (w^1(x, y), w^2(x, y))$ es el difeomorfismo que vamos a usar para el pushforward, necesitamos la matriz diferencial $\dfrac{\partial w^\beta(x, y)}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial \alpha^\beta_\lambda(x, y)}{\partial x^\mu}$ de este difeomorfismo, que viene dada por

$$\frac{\partial w^1(x, y)}{\partial x} = \cosh(\lambda)\ , \quad \frac{\partial w^1(x, y)}{\partial y} = \sinh(\lambda)\ , \quad \frac{\partial w^2(x, y)}{\partial x} = \sinh(\lambda)\ , \quad \frac{\partial w^2(x, y)}{\partial y} = \cosh(\lambda) \tag{9}$$

Con la matriz diferencial del difeomorfismo, podemos calcular fácilmente el pushforward (transporte de Lie):

$$(\alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p))^\beta = \frac{\partial \alpha^\beta_\lambda(x, y)}{\partial x^\mu}\ (\vec{V}|_p)^\mu = \frac{\partial w^\beta(x, y)}{\partial x^\mu}\ (\vec{V}|_p)^\mu \tag{10}$$

que va a ser un vector definido en el punto $\alpha_\lambda(p)$ de la variedad. Evaluando la anterior expresión para $\vec{V}|_p = \partial_x|_p \iff (\vec{V}|_p)^1 = 1\ ,\ (\vec{V}|_p)^2 = 0$, y evaluando también la matriz diferencial anterior:

$$(\alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p))^\beta = \frac{\partial w^\beta(x,y)}{\partial x^1} = \frac{\partial w^\beta(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial w^1(x,y)}{\partial x} = \cosh(\lambda) \ \text{ si } \ \beta = 1 \\ \dfrac{\partial w^2(x,y)}{\partial x} = \sinh(\lambda) \ \text{ si } \ \beta = 2 \end{cases} \tag{11}$$

O sea, vemos que el vector transportado Lie es:

$$\alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p) = (\alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p))^\beta\ \partial_\beta|_{\alpha_\lambda(p)} = \cosh(\lambda)\ \partial_x|_{\alpha_\lambda(p)} + \sinh(\lambda)\ \partial_y|_{\alpha_\lambda(p)} \in T_{\alpha_\lambda(p)}M \tag{12}$$

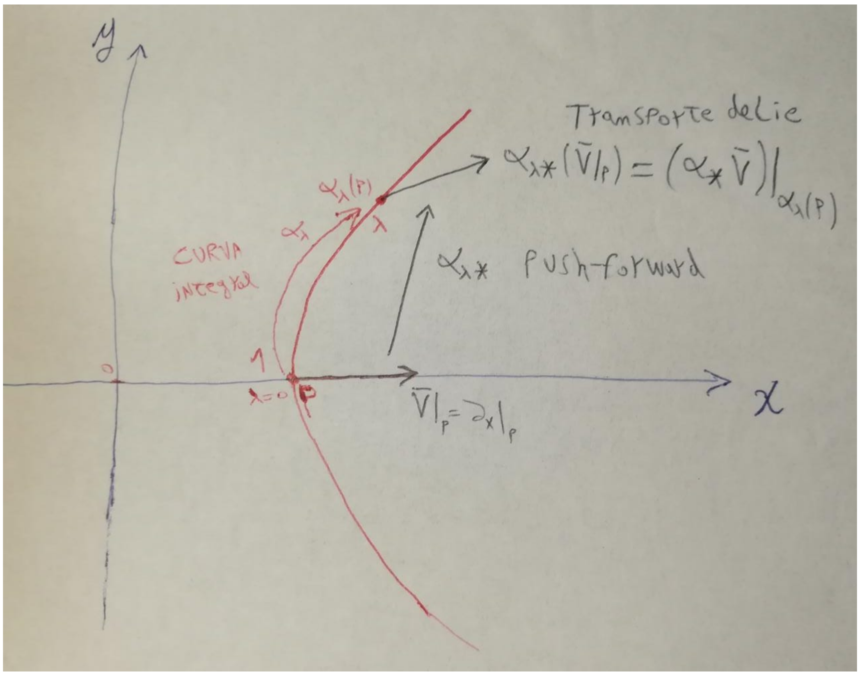

Figura 2: Transporte de Lie de $\vec{V}|_p = \partial_x|_p$ (vector en $p = (1,0)$) a lo largo de $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y$. Es decir, pushforward de $\vec{V}|_p = \partial_x|_p$ por el difeomorfismo α_λ (que mueve los puntos de la variedad λ a lo largo de las curvas integrales de $\vec{U}$).

Vemos también, interpretando a los difeomorfismos α_λ como transformaciones propias de Lorentz (más generalmente, cambios de sistema de referencia o coordenadas), que el pushforward $\alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p)$ nos dice como cambia un vector $\vec{V}|_p$ al aplicar esta transformación. Para pensar un ejemplo de física, si queremos ver como cambia el vector velocidad o el vector momento ante esta transformación, aplicamos el pushforward al vector y listo. El pushforward y pullback nos dice como transforman en general los tensores ante un difeomorfismo, o equivalentemente ante un cambio de sistema de referencia o coordenadas.

3. Otra forma de resolverlo con la derivada de Lie

Notar: el vector $\vec{V}|_p = \partial_x|_p$ está sólo definido en p (en principio), pero gracias al transporte de Lie podemos extenderlo a un campo de vectores $\alpha_*\vec{V}$ que está bien definido en toda la curva integral de $\vec{U}$ que pasa por p, y al evaluar dicho campo de vectores en un punto $\alpha_\lambda(p)$ de la curva se obtiene el pushforward: $(\alpha_*\vec{V})|_{\alpha_\lambda(p)} = \alpha_{\lambda*}(\vec{V}|_p)$. Si transportamos Lie al campo de vectores $\alpha_*\vec{V}$, obtenemos el mismo campo de vectores, por lo que esperamos que la derivada de Lie del campo de vectores transportado Lie $\alpha_*\vec{V}$ respecto del campo de vectores $\vec{U}$ (a lo largo del cual se transporta Lie) es nula:

$$\pounds_{\vec{U}}(\alpha_*\vec{V}) = 0 \iff \underbrace{U^\mu\partial_\mu}_{=\frac{\partial}{\partial\lambda}}(\alpha_*\vec{V})^\nu - (\alpha_*\vec{V})^\mu\partial_\mu U^\nu = 0 \tag{13}$$

Donde se escribió lo anterior también en componentes. El campo de vectores $\alpha_*\vec{V}$ debe verificar que al evaluarlo en p se obtenga el mismo vector $\vec{V}|_p$, es decir: $(\alpha_*\vec{V})|_p = \alpha_{0*}(\vec{V}|_p) = \vec{V}|_p$ (ya que $\alpha_0 =$Id). De esta forma vemos que, en efecto, el campo de vectores $\alpha_*\vec{V}$ (definido en todo punto $\alpha_\lambda(p)$ de la curva) es una extensión del vector $\vec{V}|_p$ (definido sólo en p)

En efecto, con sólo plantear lo anterior, se pueden deducir las componentes $(\alpha_*\vec{V})^\nu$ en cada punto $\alpha_\lambda(p)$ de la curva. O sea, pensamos que las componentes $(\alpha_*\vec{V})^\nu = (\alpha_*\vec{V})^\nu(x(\lambda), y(\lambda)) = (\alpha_*\vec{V})^\nu(\lambda)$ son una función de λ (pues sólo están definidas en los puntos $\alpha_\lambda(p)$ de la curva) y deducimos esa función de la anterior ecuación diferencial

Luego, planteamos:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\alpha_*\vec{V})^\nu(\lambda) = (\alpha_*\vec{V})^\mu(\lambda)\partial_\mu U^\nu \tag{14}$$

Recordando $\vec{U} = y\partial_x + x\partial_y \implies U^1 = y$, $U^2 = x$, luego $\partial_1 U^1 = \partial_2 U^2 = 0$ y $\partial_1 U^2 = \partial_2 U^1 = 1$, y en consecuencia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\alpha_*\vec{V})^1(\lambda) = (\alpha_*\vec{V})^2(\lambda) \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\alpha_*\vec{V})^2(\lambda) = (\alpha_*\vec{V})^2(\lambda) \end{cases} \tag{15}$$

Esta ecuación diferencial es la misma que resolvimos en la sección 1. La condición inicial es que al evaluar el campo de vectores $\alpha_*\vec{V}$ en $\lambda = 0$ (es decir en p) se debe obtener $(\alpha_*\vec{V})|_p = \alpha_{0*}(\vec{V}|_p) = \vec{V}|_p = \partial_x|_p$, entonces la condición inicial es $(\alpha_*\vec{V})^1(\lambda = 0) = 1$ y $(\alpha_*\vec{V})^1(\lambda = 0) = 0$. Como es la misma condición inicial que la analizada en la sección 1 para la misma ecuación diferencial, la solución es entonces:

$$\begin{cases} (\alpha_*\vec{V})^1(\lambda) = \cosh(\lambda) \\ (\alpha_*\vec{V})^2(\lambda) = \sinh(\lambda) \end{cases} \tag{16}$$

Luego, el campo de vectores $\alpha_* \vec{V}$ que se obtiene de transportar Lie a $\vec{V}|_p$ a lo largo de la curva integral de $\vec{U}$ que pasa por p, es:

$$(\alpha_* \vec{V})|_{\alpha_\lambda(p)} = (\alpha_* \vec{V})^\beta(\lambda)\ \partial_\beta|_{\alpha_\lambda(p)} = \cosh(\lambda)\ \partial_x|_{\alpha_\lambda(p)} + \sinh(\lambda)\ \partial_y|_{\alpha_\lambda(p)} \in T_{\alpha_\lambda(p)}M \tag{17}$$

Lo cual coincide con lo obtenido en la sección 2.