Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del lunes 26/10.

*Guía 5: Ecuaciones de Einstein linealizadas.**

Las ecuaciones de Einstein linealizadas

El punto de partida es asumir que la métrica es globalmente plana salvo por una perturbación,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{1}$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. El objetivo es escribir las ecuaciones de Einstein lineales en $h_{\mu\nu}$, en particular el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Para eso es necesario calcular hasta el orden lineal en $h_{\mu\nu}$ los coeficientes de la conexión, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

Para los coeficientes de la conexión resulta

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \simeq \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}). \tag{2}$$

En la expresión del tensor de Riemann,

$$R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\eta\rho}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\eta\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\rho}\,, \tag{3}$$

puede prescindirse de los términos cuadráticos en la conexión, pues serán cuadráticos en $h_{\mu\nu}$. A primer orden en $h_{\mu\nu}$ resulta

$$\begin{aligned} R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\sigma,\mu\rho} - h_{\mu\nu,\sigma\rho}) - \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\rho\nu} + h_{\rho\sigma,\mu\nu} - h_{\mu\rho,\sigma\nu}) \\ &= \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\nu\sigma,\mu\rho} - h_{\mu\nu,\sigma\rho}) - \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\rho\sigma,\mu\nu} - h_{\mu\rho,\sigma\nu}). \end{aligned} \tag{4}$$

Al mismo orden, el tensor de Ricci está dado por

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\nu\sigma,\mu\lambda} - h_{\mu\nu,\sigma\lambda}) - \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\lambda\sigma,\mu\nu} - h_{\mu\lambda,\sigma\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} - h_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(h_{,\mu\nu} - h_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + h_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu} - h_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - h_{,\mu\nu}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

donde $h = h^{\mu}{}_{\mu}$. Notar que a este orden los índices de $h_{\mu\nu}$ se suben y bajan con $\eta_{\mu\nu}$ y $\eta^{\mu\nu}$.

Finalmente, el escalar de Ricci es

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = h_{\sigma\lambda,}{}^{\sigma\lambda} - h_{,}{}^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{6}$$

*zanellaj@df.uba.ar

Así pues, el tensor de Einstein linealizado es

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \tfrac{1}{2}\left(h_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + h_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu} - h_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - h_{,\mu\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(h_{\sigma\lambda,}{}^{\sigma\lambda} - h_{,}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\right). \qquad (7)$$

Conviene escribir $h_{\mu\nu}$ en términos de

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \qquad (8)$$

La traza de este nuevo campo es igual a $-h$, y además la relación inversa se escribe del mismo modo:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \qquad (9)$$

Pero lo más práctico en este punto es reemplazar directamente $h_{\mu\nu}$ por $\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = {} & \tfrac{1}{2}\left(\bar{h}_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \tfrac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}h_{,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \bar{h}_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}h_{,}{}^{\lambda}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_{,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - h_{,\mu\nu}\right) \\ & - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\bar{h}_{\sigma\lambda,}{}^{\sigma\lambda} + \tfrac{1}{2}\eta_{\sigma\lambda}h_{,}{}^{\sigma\lambda} - h_{,}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\right). \end{aligned} \qquad (10)$$

Todos los términos que contienen a la traza de $h_{\mu\nu}$ se cancelan entre sí; queda

$$G_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{h}_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \bar{h}_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\sigma\lambda,}{}^{\sigma\lambda}\right). \qquad (11)$$

Las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \qquad (12)$$

en su versión linealizada toman la siguiente forma

$$\bar{h}_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \bar{h}_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\sigma\lambda,}{}^{\sigma\lambda} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \qquad (13)$$

Transformaciones de *gauge*

La posibilidad de hacer un cambio de coordenadas arbitrario existe tanto para las ecuaciones exactas como para su versión linealizada. En la versión linealizada, se parte de una métrica del tipo

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \qquad (14)$$

con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y se buscan las transformaciones de coordenadas para las cuales sigue valiendo esta última condición. Dentro de esta clase de transformaciones se consideran las transformaciones *infinitesimales*

$$y^{\mu}(x) = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \qquad (15)$$

donde se asumen las suficientes condiciones de acotación para ξ y sus derivadas.

Hecho el cambio de coordenadas anterior, la nueva métrica es

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\sigma\rho}(x(y))\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu}(y)\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}(y). \tag{16}$$

No tenemos $x^\mu(y)$, sino la ecuación implícita

$$x^\mu(y) = y^\mu - \xi^\mu(x(y)), \tag{17}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu}(y) = \delta^\sigma{}_\mu - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\lambda}(x(y))\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\mu}(y). \tag{18}$$

En una primera aproximación esta ecuación implica

$$\frac{\partial x^\sigma(y)}{\partial y^\mu} = \delta^\sigma{}_\mu - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu}(x(y)). \tag{19}$$

Además, debido a que $x(y) = y + \mathcal{O}(\xi)$, podemos reemplazar $x(y)$ por y en el argumento de la última derivada:

$$\frac{\partial x^\sigma(y)}{\partial y^\mu} = \delta^\sigma{}_\mu - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu}(y). \tag{20}$$

Procediendo de esta manera, conservando términos de hasta orden ξ, la ec. (16) se lee

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(y) &= \Big[\eta_{\sigma\rho} + h_{\sigma\rho}(x(y))\Big]\Big[\delta^\sigma{}_\mu - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu}(y)\Big]\Big[\delta^\rho{}_\nu - \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu}(y)\Big] \\ &\simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y) - \eta_{\mu\rho}\,\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu}(y) + \eta_{\sigma\nu}\,\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu}(y). \end{aligned} \tag{21}$$

A este nivel de precisión, los índices se suben y bajan con la métrica $\eta_{\mu\nu}$, así que, en definitiva,

$$g'_{\mu\nu}(y) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y) - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu}(y) - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu}(y). \tag{22}$$

O, sencillamente,

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{23}$$

Vemos entonces que para que la métrica siga siendo globalmente una perturbación de la métrica plana, las derivadas de las funciones ξ_μ tienen que ser a lo sumo del mismo orden que $h_{\mu\nu}$. La métrica transformada se escribe como

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}, \tag{24}$$

donde

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}. \tag{25}$$

Notar la analogía con la transformación de *gauge* del cuadripotencial en electrodinámica

$$A'_\mu = A_\mu + \psi_{,\mu}. \tag{26}$$

Esta transformación deja invariante el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, y por lo tanto los campos físicos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Una situación similar ocurre con la transformación de *gauge* (25). Según la ec. (4)

$$R^\lambda{}_{\mu\rho\nu} = \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\nu\sigma,\mu\rho} - h_{\mu\nu,\sigma\rho}) - \tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\rho\sigma,\mu\nu} - h_{\mu\rho,\sigma\nu}), \tag{27}$$

entonces la contribución de los nuevos términos a la expresión del tensor de curvatura es

$$-\tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(\xi_{\nu,\sigma\mu\rho} + \xi_{\sigma,\nu\mu\rho} - \xi_{\mu,\nu\sigma\rho} - \xi_{\nu,\mu\sigma\rho} - \xi_{\rho,\sigma\mu\nu} - \xi_{\sigma,\rho\mu\nu} + \xi_{\mu,\rho\sigma\nu} + \xi_{\rho,\mu\sigma\nu}) = 0. \tag{28}$$

De modo que

$$R'^\lambda{}_{\mu\rho\nu}(y) = R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}(y). \tag{29}$$

Hemos hecho explícita aquí la dependencia en la variable y, puesto que cuando escribimos una ecuación de transformación para un campo, por ejemplo,

$$V'^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \tag{30}$$

en realidad estamos diciendo

$$V'^\mu(y) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}(x(y))\; V^\nu(x(y)). \tag{31}$$

En la ecuación de transformación para un campo hay sobreentendido usualmente un cambio de variables. Por el contrario, en la ec. (92) no hay tal cambio implícito de variables. En última instancia, esto es debido a que trabajamos con tensores que ya son lineales en $h_{\mu\nu}$, entonces la diferencia entre evaluar en $y(x)$ o en y es de segundo orden, ya que $y(x) = x + \mathcal{O}(\xi)$.

Si tenemos una solución $h_{\mu\nu}$, lo que esperamos es que sea posible elegir las funciones ξ_μ de forma que se cumpla alguna condición predeterminada. Recordemos que las ecuaciones de Einstein linealizadas son

$$\bar{h}_{\nu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \bar{h}_{\mu\lambda,}{}^{\lambda}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\sigma\lambda,}{}^{\lambda\sigma} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{32}$$

Salvo el tercer término, en el primer miembro siempre aparece la contracción

$$\bar{h}_{\alpha\lambda,}{}^{\lambda}. \tag{33}$$

Si fijáramos la condición

$$\bar{h}_{\alpha\lambda,}{}^{\lambda} = \bar{h}^\lambda{}_{\alpha,\lambda} = 0, \tag{34}$$

las ecuaciones de Einstein se reducirían a

$$\bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{35}$$

Introduciendo el operador D'Alembertiano

$$\Box f = f_{,}{}^{\mu}{}_{\mu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \nabla^2 f, \tag{36}$$

lo usual es escribir

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{37}$$

Al fijar la condición (34) decimos que estamos trabajando en el *gauge* de Lorenz, también llamado armónico. En la mayoría de los libros lo encontrarán escrito como *gauge* de Lorentz, pero se trata de un error antiguo. De los libros que consulté, únicamente Carroll usa la lección correcta. El nombre de este *gauge* está tomado del electromagnetismo, en cuyo caso se expresa como

$$A^{\mu}{}_{,\mu} = 0. \tag{38}$$

Al final del capítulo 6 de la 3ra. edición del libro Jackson encontrarán una nota histórica sobre la confusión en la atribución a Lorentz del *gauge* de Lorenz.

Escrita por extenso, la condición de Lorenz para el campo $h_{\mu\nu}$ es

$$\eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu,\mu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\mu,\nu} = 0. \tag{39}$$

Para ver que siempre es posible imponer la condición de Lorenz, supongamos que se ha encontrado una solución $h_{\mu\nu}$ de las ecs. (32) que no necesariamente satisface esta condición. La transformación de *gauge* (25) conduce a un nuevo campo $h'_{\mu\nu}$. Para que este campo satisfaga la condición de Lorenz deberá ser

$$\eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu,\mu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\mu,\nu} = \eta^{\mu\sigma}\xi_{\sigma,\nu\mu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\xi_{\sigma,\mu\nu} + \eta^{\mu\sigma}\xi_{\nu,\sigma\mu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\xi_{\mu,\sigma\nu}. \tag{40}$$

El primer, segundo y último término del miembro de la derecha suman cero. Las ecuaciones que deben satisfacer las funciones ξ_ν son

$$\eta^{\mu\sigma}\xi_{\nu,\sigma\mu} = \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu,\mu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\mu,\nu}. \tag{41}$$

Es decir,

$$\Box \xi_\nu = h^{\mu}{}_{\nu,\mu} - \tfrac{1}{2} h^{\mu}{}_{\mu,\nu}. \tag{42}$$

Vemos que ξ_ν satisface una ecuación de ondas con fuentes.

En lugar de resolver las ecuaciones de Einstein linealizadas en su forma más general para luego imponer una condición de *gauge*, podemos resolver las ecuaciones de Einstein linealizadas imponiendo simultáneamente la condición de *gauge*. Así, por ejemplo, en el *gauge* de Lorenz tendremos que resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{43}$$

$$\bar{h}^{\mu}{}_{\nu,\mu} = 0. \tag{44}$$

Si el tensor $T_{\mu\nu}$ tiene su origen en materia no relativista, la componente dominante es

$$T_{00} = c^2 \rho_m, \tag{45}$$

donde ρ_m es la densidad de masa. Si el sistema es estacionario, $\Box \to \nabla^2$. Esperamos entonces que, a más bajo orden en potencias de $1/c^2$, $\bar{h}_{0i} = \bar{h}_{ij} = 0$. La ec. (44) se satisface entonces automáticamente. La única ecuación relevante es

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^2} \rho_m. \tag{46}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la que satisface el potencial newtoniano,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m. \tag{47}$$

Por lo tanto, si fijamos en ambos casos las mismas condiciones en el infinito,

$$\bar{h}_{00} = -\frac{4\Phi}{c^2}. \tag{48}$$

Para calcular el campo $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$ necesitaremos escribir la traza de $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$\bar{h} = \bar{h}^0{}_0 = \frac{4\Phi}{c^2}. \tag{49}$$

Obtenemos así

$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \tfrac{1}{2}\eta_{00}\bar{h} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \tag{50}$$

Tanto las componentes h_{0i} como las componentes h_{ij} son cero a este orden. Para las componentes espaciales sobre la diagonal encontramos (sin suma sobre i)

$$h_{ii} = -\tfrac{1}{2}\eta_{ii}\bar{h} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \tag{51}$$

Finalmente, la métrica toma la forma

$$ds^2 = -c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{52}$$

En los próximos dos problemas recorreremos el camino inverso al seguido hasta aquí. Postularemos la métrica anterior, calcularemos el tensor de Einstein, verificaremos que satisface una ecuación con fuentes no relativistas y que satisface también la condición de

Lorenz. En lugar de trabajar desde las ecuaciones hasta la solución, partiremos de la solución y construiremos las ecuaciones.

■ **Problema 1**. En una región de una variedad pseudo-riemanniana de cuatro dimensiones existe un sistema de coordenadas (t, x, y, z) donde el intervalo se escribe como

$$ds^2 = -c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{53}$$

siendo $|\Phi|/c^2 \ll 1$ e independiente de t.

a) Obtenga las componentes de la conexión a primer orden en Φ/c^2.

b) Calcule los tensores de Ricci y de Einstein a ese orden.

c) Muestre que esta métrica resuelve las ecuaciones de Einstein linealizadas cuando Φ es el potencial newtoniano y el tensor de energía-momento está asociado a materia no relativista.

■ **Solución**. a) Sabemos que las componentes de una conexión simétrica pueden obtenerse mediante el cálculo directo, a través de la expresión

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(g_{\nu\sigma,\rho} + g_{\rho\sigma,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}\right), \tag{54}$$

o bien leyéndolas directamente a través de la ecuación para las geodésicas,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \tag{55}$$

El segundo camino suele ser el más práctico. Las geodésicas temporales se deducen del principio variacional

$$\delta\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} = 0. \tag{56}$$

El lagrangiano de este problema variacional sería

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \tag{57}$$

Las veces que hemos aplicado este principio, luego de calcular las primeras derivadas de $\mathcal{L}$ hemos aprovechado el cambio de variables

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \tag{58}$$

para obtener ecuaciones diferenciales más sencillas en la variable independiente τ. Pueden demostrar como **ejercicio** que este procedimiento es equivalente a plantear el siguiente principio variacional

$$\delta \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} d\tau \, \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \tag{59}$$

que corresponde al lagrangiano

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{60}$$

En el caso del presente problema,

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = -\tfrac{1}{2} c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \dot{t}^2 + \tfrac{1}{2} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \tag{61}$$

donde indicamos con un punto la derivación respecto de τ.

Construyamos la ecuación de Euler-Lagrange para cada coordenada. Para $x^0 = ct$ encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \dot{x}^0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0} = 0. \tag{62}$$

Si estuviéramos integrando las ecuaciones de movimiento inmediatamente aprovecharíamos la ecuación de conservación que se deduce de aquí, a saber

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \dot{x}^0\right] = 0, \tag{63}$$

pero nuestro objetivo es escribir las ecuaciones diferenciales de segundo orden en τ, de modo que seguimos adelante y derivamos explícitamente:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \ddot{x}^0 + \frac{2}{c^2} \Phi_{,i} \, \dot{x}^i \dot{x}^0 = 0 \\ \Rightarrow \quad &\ddot{x}^0 + \frac{2}{c^2} \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1} \Phi_{,i} \, \dot{x}^i \dot{x}^0 = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Debido a la hipótesis de campo débil, es suficiente con aproximar la ecuación anterior por

$$\ddot{x}^0 + \frac{2}{c^2} \Phi_{,i} \, \dot{x}^i \dot{x}^0 = 0. \tag{65}$$

Puesto que esta ecuación debe compararse con la componente cero de la ecuación para la geodésica,

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \tag{66}$$

deducimos que

$$\Gamma^0{}_{i0} = \frac{\Phi_{,i}}{c^2}, \qquad \Gamma^0{}_{00} = \Gamma^0{}_{ij} = 0. \tag{67}$$

Notar que el segundo término de la ec. (65) debe ser leído como

$$\frac{2}{c^2}\Phi_{,i}\,\dot{x}^i\dot{x}^0 = \frac{1}{c^2}\Phi_{,i}\,\dot{x}^i\dot{x}^0 + \frac{1}{c^2}\Phi_{,i}\,\dot{x}^0\dot{x}^i. \tag{68}$$

Este es el motivo por el cual $\Gamma^0{}_{i0}$ no lleva ningún factor 2.

Las tres coordenadas espaciales aparecen en el lagrangiano de manera simétrica, de forma que es suficiente calcular la ecuación de Euler-Lagrange para cualquiera de ellas y luego generalizar. Así, para la coordenada x encontramos

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\dot{x}\right] + \frac{\Phi_{,x}}{c^2}(\dot{x}^0)^2 + \frac{\Phi_{,x}}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = 0. \tag{69}$$

Desarrollando la derivada total del primer término,

$$\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\ddot{x} - 2\frac{\Phi_{,i}}{c^2}\,\dot{x}^i\dot{x} + \frac{\Phi_{,x}}{c^2}(\dot{x}^0)^2 + \frac{\Phi_{,x}}{c^2}\dot{x}^2 = 0. \tag{70}$$

Quedándonos hasta primer orden en Φ/c^2, resulta

$$\ddot{x} - 2\frac{\Phi_{,i}}{c^2}\,\dot{x}^i\dot{x} + \frac{\Phi_{,x}}{c^2}(\dot{x}^0)^2 + \frac{\Phi_{,x}}{c^2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = 0. \tag{71}$$

De aquí se leen las componentes de la conexión

$$\begin{gathered}\Gamma^x{}_{00} = \Gamma^x{}_{yy} = \Gamma^x{}_{zz} = -\Gamma^x{}_{xx} = \frac{\Phi_{,x}}{c^2}, \quad \Gamma^x{}_{xy} = -\frac{\Phi_{,y}}{c^2}, \quad \Gamma^x{}_{xz} = \frac{\Phi_{,z}}{c^2}, \\ \Gamma^x{}_{0i} = \Gamma^x{}_{yz} = 0.\end{gathered} \tag{72}$$

b) Ahora nos piden calcular el tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{73}$$

El tensor de curvatura es

$$R^\lambda{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}. \tag{74}$$

Las componentes de la conexión son de orden $1/c^2$, de modo que podemos despreciar aquí los términos cuadráticos. Entonces,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu}. \tag{75}$$

Debido a la simetría entre las tres coordenadas espaciales y a la propia simetría del tensor de Ricci, alcanza con calcular los siguientes elementos,

$$R_{00}, \quad R_{0x}, \quad R_{xx}, \quad R_{xy}. \tag{76}$$

Hay que tener en cuenta que la métrica es estática, de modo que todas las derivadas temporales son nulas. En primer lugar tenemos

$$R_{00} = \Gamma^{\lambda}{}_{00,\lambda} = \Gamma^{i}{}_{00,i} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi. \tag{77}$$

Por otro lado,

$$R_{0x} = \Gamma^{\lambda}{}_{0x,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda,x}. \tag{78}$$

La componente $\Gamma^{\lambda}{}_{0x}$ es distinta de cero si $\lambda = 0$, pero entonces aparece derivada respecto de t, lo que da cero. Además, $\Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda} = 0$. En definitiva, $R_{0x} = 0$, o, más generalmente,

$$R_{0i} = 0. \tag{79}$$

Ahora evaluemos R_{xx},

$$R_{xx} = \Gamma^{\lambda}{}_{xx,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{x\lambda,x} = \Gamma^{y}{}_{xx,y} + \Gamma^{z}{}_{xx,z} - \Gamma^{0}{}_{x0,x} - \Gamma^{y}{}_{xy,x} - \Gamma^{z}{}_{xz,x} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi. \tag{80}$$

Finalmente, comprueben que

$$R_{xy} = \Gamma^{\lambda}{}_{xy,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{x\lambda,y} = \Gamma^{x}{}_{xy,x} + \Gamma^{y}{}_{xy,y} - \Gamma^{0}{}_{x0,y} - \Gamma^{x}{}_{xx,y} - \Gamma^{y}{}_{xy,y} - \Gamma^{z}{}_{xz,y} = 0. \tag{81}$$

Resumiendo, en notación matricial el resultado para el tensor de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\nabla^2\Phi. \tag{82}$$

Para construir el tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R \simeq R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R, \tag{83}$$

necesitamos calcular la contracción $R^{\mu}{}_{\mu}$. Debido a que $R_{\mu\nu}$ ya es de orden $1/c^2$, podemos subir índices usando la métrica de Minkowski. Así,

$$R^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\nabla^2\Phi. \tag{84}$$

Entonces,

$$R = \frac{2}{c^2}\nabla^2\Phi. \tag{85}$$

Es fácil verificar que la única componente no nula del tensor de Einstein es

$$G_{00} = \frac{2}{c^2}\nabla^2\Phi. \tag{86}$$

c) La componente 00 de la ecuación de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{87}$$

se lee como

$$\nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G}{c^2} T_{00}. \tag{88}$$

Las otras componentes de la ecuación de Einstein son compatibles con un tensor de energía-momento de materia no relativista. En tanto, T_{00} es aproximadamente igual a la densidad de energía de la masa en reposo,

$$T_{00} = c^2 \rho_m, \tag{89}$$

donde ρ_m es la densidad de masa. En definitiva,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m, \tag{90}$$

que es la ecuación para el potencial newtoniano de una distribución de masa ρ_m.

■ **Problema 2**.

a) La métrica del Problema 1 es un ejemplo de métrica de campo débil:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{91}$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Muestre que la métrica del Problema 1 satisface el *gauge* de Lorenz $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\rho,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu,\rho}$.

b) Reemplace esa métrica en las ecuaciones de Einstein sin fuentes y resuelva para condiciones de contorno esféricamente simétricas.

c) Establezca el significado físico de las constantes de integración y la región de validez de la solución.

■ **Solución**. La métrica del problema 1,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{92}$$

se puede escribir como

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{93}$$

con

$$h_{00} = h_{xx} = h_{yy} = h_{zz} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \tag{94}$$

Tenemos que verificar que se cumplen las cuatro ecuaciones

$$\eta^{\mu\nu}h_{\mu\rho,\nu} = \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu,\rho}, \tag{95}$$

o bien

$$h^{\nu}{}_{\rho,\nu} - \tfrac{1}{2}h_{,\rho} = 0, \tag{96}$$

donde $h = h^{\mu}{}_{\mu}$. Notar que, a este nivel de precisión, subimos y bajamos índices usando la métrica $\eta_{\mu\nu}$. En primer lugar notemos que

$$\tfrac{1}{2}h_{,\rho} = -\frac{2\Phi_{,\rho}}{c^2}. \tag{97}$$

Teniendo en cuenta que $h^{\mu}{}_{\nu}$ es diagonal y que las derivadas respecto del tiempo son nulas, es fácil ver que la condición (96) se cumple automáticamente para $\rho = 0$. Alcanza con verificar que se cumpla además para cualquiera de las otras tres coordenadas, puesto que aparecen de manera simétrica. Por ejemplo, tomemos $\rho = 1$. Entonces

$$h^{\nu}{}_{x,\nu} - \tfrac{1}{2}h_{,x} = h^{x}{}_{x,x} - \tfrac{1}{2}h_{,x} = -\frac{2}{c^2}\Phi_{,x} + \frac{2}{c^2}\Phi_{,x} = 0. \tag{98}$$

Luego, la métrica satisface la condición de *gauge* de Lorenz.

b), c) Según vimos en el problema anterior, la ecuación que satisface Φ es

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_m. \tag{99}$$

En ausencia de fuentes esta ecuación es

$$\nabla^2\Phi = 0. \tag{100}$$

Condiciones de contorno esféricamente simétricas sólo son posibles si la región en la que se busca la solución está acotada por superficies esféricas, $a \leqslant r \leqslant b$. Sabemos que las soluciones de la ecuación de Laplace en este tipo de recintos con condiciones de contorno esféricamente simétricas están dadas por

$$\Phi(\mathbf{r}) = C_1 + \frac{C_2}{r}. \tag{101}$$

Además, la ley de Gauss implica

$$C_2 = -GM, \tag{102}$$

donde M es la masa total contenida en la esfera de radio a. En el caso físicamente interesante en el que $b \to \infty$, tenemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}. \tag{103}$$

Más allá del valor de a, la región de validez de la solución viene dada por la condición

$$\frac{GM}{c^2 r} \ll 1. \tag{104}$$

Definiendo

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \tag{105}$$

el intervalo (92),

$$ds^2 = -c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{106}$$

se escribe como

$$ds^2 = -c^2(1 - r_s/r)dt^2 + (1 + r_s/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{107}$$

Podemos comparar la solución de campo débil con la métrica exacta para un cuerpo estático esféricamente simétrico. La comparación se dificulta por el hecho de que hay infinitas elecciones de coordenadas que representan la misma situación física. Así, por ejemplo, para el problema estático esféricamente simétrico todas estas expresiones de la métrica representan la misma geometría:

- Coordenadas de Schwarzschild:

$$ds^2 = -c^2\,(1 - r_s/r)\;dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\;d\varphi^2). \tag{108}$$

- Coordenadas isotrópicas ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$):

$$ds^2 = -c^2\frac{(1 - r_s/4r)^2}{(1 + r_s/4r)^2}\,dt^2 + (1 + r_s/4r)^4\,\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \tag{109}$$

- Coordenadas armónicas:

$$ds^2 = -c^2\frac{1 - r_s/2r}{1 + r_s/2r}\,dt^2 + \frac{1 + r_s/2r}{1 - r_s/2r}\,dr^2 + r^2\,(1 + r_s/2r)^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\;d\varphi^2). \tag{110}$$

Cuando $r_s/r \ll 1$ tanto la métrica en las coordenadas isotrópicas como en las coordenadas armónicas se reduce a la expresión (107), identificando en el segundo caso $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Para las coordenadas de Schwarzschild obtenemos una expresión distinta.