Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del miércoles 7/10.

*Guía 4: derivada covariante, conexión, transporte paralelo.**

Repaso

Una derivada covariante ∇ es un mapa que toma dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ en un punto de la variedad y devuelve un tercer vector

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V}. \tag{1}$$

La derivada covariante satisface las siguientes propiedades:

- Linealidad:

$$\nabla_{\vec{U}}(\vec{V}+\vec{W}) = \nabla_{\vec{U}}\vec{V} + \nabla_{\vec{U}}\vec{W}, \tag{2}$$

$$\nabla_{\vec{U}+\vec{W}}\vec{V} = \nabla_{\vec{U}}\vec{V} + \nabla_{\vec{W}}\vec{V}, \tag{3}$$

$$\nabla_{f\vec{U}}\vec{V} = f\nabla_{\vec{U}}\vec{V}. \tag{4}$$

- Derivada del producto por una función:

$$\nabla_{\vec{U}}(f\vec{V}) = \vec{U}(f)\vec{V} + f\,\nabla_{\vec{U}}\vec{V}. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta estas propiedades, es fácil ver que todo lo que se necesita para definir una derivada covariante es conocer su acción sobre los vectores de una base $\{\vec{e}_a\}$. En efecto, la derivada covariante de un vector

$$\vec{V} = V^a\vec{e}_a \tag{6}$$

respecto de un vector

$$\vec{U} = U^a\vec{e}_a \tag{7}$$

se calcula como

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = \nabla_{\vec{U}}(V^a\vec{e}_a) &= \vec{U}(V^a)\vec{e}_a + V^a\nabla_{\vec{U}}\vec{e}_a \\ &= \vec{U}(V^a)\vec{e}_a + V^a\nabla_{U^b\vec{e}_b}\vec{e}_a \\ &= \vec{U}(V^a)\vec{e}_a + V^aU^b\nabla_{\vec{e}_b}\vec{e}_a.\end{aligned} \tag{8}$$

*zanellaj@df.uba.ar

Entonces definimos los coeficientes de la conexión

$$\Gamma^{c}{}_{ab}\,, \tag{9}$$

a través de las relaciones

$$\nabla_{\vec{e}_b}\vec{e}_a = \Gamma^{c}{}_{ab}\,\vec{e}_c. \tag{10}$$

Así,

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = \left[\vec{U}(V^c) + \Gamma^{c}{}_{ab}\,V^a U^b\right]\vec{e}_c. \tag{11}$$

Es decir,

$$(\nabla_{\vec{U}}\vec{V})^c = \vec{U}(V^c) + \Gamma^{c}{}_{ab}\,V^a U^b. \tag{12}$$

Si se trata de una base coordenada, con

$$\vec{e}_\mu = \partial_\mu \tag{13}$$

resulta

$$\nabla_{\partial_\nu}\vec{V} = \left[\partial_\nu V^\mu + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\,V^\lambda\right]\partial_\mu. \tag{14}$$

En otras palabras,

$$(\nabla_{\partial_\nu}\vec{V})^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\,V^\lambda. \tag{15}$$

Se usa la siguiente notación:

$$(\nabla\vec{V})^{\mu}{}_{\nu} = V^{\mu}{}_{;\nu}\,, \tag{16}$$

donde

$$V^{\mu}{}_{;\nu} = V^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\,V^\lambda, \tag{17}$$

y

$$V^{\mu}{}_{,\nu} = \partial_\nu V^\mu. \tag{18}$$

El objeto $\nabla\vec{V}$ es un tensor de tipo $\binom{1}{1}$. En general,

$$(\nabla_{\vec{U}}\vec{V})^\mu = U^\nu V^{\mu}{}_{;\nu} = U^\nu\left(V^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\,V^\lambda\right). \tag{19}$$

Las expresiones anteriores suponen un campo $\vec{V}$ que está definido en algún abierto. La derivada covariante puede restringirse a campos definidos sobre curvas. Supongamos que tenemos una curva parametrizada como

$$x^\mu = x^\mu(\sigma). \tag{20}$$

Su vector tangente es

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma}\,\partial_\mu. \tag{21}$$

Entonces pueden ver que

$$\left(\nabla_{\frac{d}{d\sigma}}\vec{V}\right)^\mu = \frac{dV^\mu}{d\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\,V^\lambda\frac{dx^\nu}{d\sigma}. \tag{22}$$

En particular, si $\vec{V}$ es el propio vector tangente a la curva,

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}, \tag{23}$$

resulta

$$\left(\nabla_{\vec{V}}\vec{V}\right)^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\,\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}. \tag{24}$$

Se dice que un vector es transportado paralelamente a lo largo de una curva si

$$\nabla_{\frac{d}{d\sigma}}\vec{V} = 0. \tag{25}$$

La curva es una *geodésica* si su vector tangente es transportado paralelamente. En tal caso se satisfacen las ecuaciones

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\,\frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \tag{26}$$

■ **Problema 3**. Si la variedad es dotada de una métrica g, entonces queda definida la longitud de un arco de curva como

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu \tag{27}$$

y podemos hablar de la longitud de la curva $\int d\ell$. De modo que la curva de longitud mínima resulta de un problema variacional. La conexión métrica se define de manera tal que la geodésica, determinada por la ecuación $\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0$, donde $\vec{U}$ es tangente a la curva, coincida con la curva de longitud mínima. Por inspección de la ecuación de la geodésica, muestre que en coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ la conexión métrica se puede escribir como

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}\right). \tag{28}$$

Notar que la respuesta es única (*conexión de Levi-Civita*) sólo si se pide que $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$.

■ **Solución**. El problema está planteado en el contexto de una variedad riemanniana. Para describir geodésicas de tipo temporal en el espacio-tiempo deberíamos cambiar el signo de $g_{\mu\nu}$, pero como el resultado buscado es cuadrático en $g_{\mu\nu}$, el cambio de signo no tiene ningún efecto.

Se trata de plantear las ecuaciones diferenciales para el problema variacional

$$\delta S = \delta \int d\ell = 0. \tag{29}$$

Cada libro plantea el principio variacional a su modo. Seguiremos el procedimiento de Hartle. Supongamos que la trayectoria está parametrizada por un parámetro σ,

$$x^\mu = x^\mu(\sigma). \tag{30}$$

Así,

$$d\ell = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\, d\sigma, \tag{31}$$

donde

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}. \tag{32}$$

El principio variacional adopta la siguiente forma

$$\delta S = \delta \int_a^b d\sigma\, \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = 0. \tag{33}$$

Identificamos un lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}. \tag{34}$$

Tener en cuenta que $g_{\mu\nu}$ será en general una función de las coordenadas,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x). \tag{35}$$

Cada coordenada tiene asociada una ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{36}$$

Primero calculamos las siguientes derivadas

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = \frac{1}{\mathcal{L}}\, g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\mathcal{L}}\, g_{\rho\nu,\mu}\,\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu. \tag{38}$$

Ahora aprovechamos los factores $1/\mathcal{L}$ para hacer un cambio de variables, puesto que

$$\mathcal{L} = \frac{d\ell}{d\sigma}. \tag{39}$$

Así resulta

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\, g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} = g_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\ell}, \tag{40}$$

y el primer término en la ecuación de Euler-Lagrange se escribe como

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^{\mu}}\right) = \mathcal{L}\,\frac{d}{d\ell}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\right) = \mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{d\ell^2} + g_{\mu\nu,\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell}\right). \tag{41}$$

Debido a que en el último término el producto de las derivadas es simétrico en ν y ρ, podemos simetrizar el factor que lo acompaña,

$$g_{\mu\nu,\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell} = \tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu}\right)\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell}. \tag{42}$$

Reuniendo todos los resultados, la ecuación de Euler-Lagrange se lee como

$$\mathcal{L}g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{d\ell^2} + \frac{\mathcal{L}}{2}\left(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu}\right)\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell} - \frac{1}{2\mathcal{L}}\, g_{\rho\nu,\mu}\,\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\nu} = 0. \tag{43}$$

Dividiendo por $\mathcal{L}$ y volviendo a usar el cambio de variables para transformar las derivadas respecto de σ en derivadas respecto de ℓ, queda

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{d\ell^2} + \tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\mu}\right)\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell} = 0. \tag{44}$$

Multiplicando por la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$ y renombrando el índice libre, finalmente obtenemos la ecuación

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\ell^2} + \tfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\lambda}\right)\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell} = 0. \tag{45}$$

Si esta ecuación ha de coincidir con la ecuación de la geodésica,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\ell^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell} = 0, \tag{46}$$

debemos hacer la identificación

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\lambda}\right)\frac{dx^{\nu}}{d\ell}\frac{dx^{\rho}}{d\ell}. \tag{47}$$

Ahora bien, no podemos igualar $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ directamente con el factor que acompaña al producto de las derivadas en el término de la derecha. Este producto es simétrico en ν y ρ, de modo que todo lo que podemos asegurar es que

$$\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\right) = \tfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\lambda}\right). \tag{48}$$

Sólo si la conexión es simétrica podemos afirmar que

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\lambda} \right). \tag{49}$$

Esta es la expresión para la conexión de Levi-Civita o conexión de Christoffel.

■ **Problema 7**. Dotemos a la esfera S^2 de una conexión cuyas componentes en la base coordenada $\{\partial_\theta, \partial_\varphi\}$ sean

$$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\,\cos\theta, \quad \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \cot\theta, \tag{50}$$

y cero las restantes.

a) Muestre que ∂_θ es autoparalelo ($\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = 0$) sobre la esfera, mientras que ∂_φ únicamente lo es para $\theta = \pi/2$. Interprete este resultado en términos de las líneas de campo de ambos vectores.

b) Transporte paralelamente el vector $V(\theta = \theta_0, \varphi = 0) = \partial_\theta$ a lo largo de todo el círculo $\theta = \theta_0$. ¿Cuál es el cambio sufrido por el vector?

c) Muestre que Γ es la conexión métrica asociada a $d\ell^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$.

d) Calcule la derivada covariante de $\vec{e}_\theta = \partial_\theta$ respecto de $\vec{e}_\varphi = (\sin\theta)^{-1}\partial_\varphi$, y viceversa.

e) Utilice el resultado para calcular las componentes de la conexión en la base *anholónoma* $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$.

f) Calcule el tensor $V^{\mu}{}_{;\nu}$ de tipo $\binom{1}{1}$ para $\vec{V} = \sin\theta\,\cos\theta\;\partial_\theta + \sin\theta\;\partial_\varphi$. Calcule el vector $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ con $\vec{U} = \sin\theta\;\partial_\varphi$.

■ **Solución**. a) La esfera S^2 está parametrizada por las coordenadas θ y φ. En estas coordenadas, la base de vectores tangentes es

$$\{\partial_\theta, \partial_\varphi\}. \tag{51}$$

Según hemos dicho más arriba, en general, en una base $\{\vec{e}_a\}$ los coeficientes de la conexión están definidos a partir de las relaciones

$$\nabla_{\vec{e}_b}\vec{e}_a = \Gamma^{c}{}_{ab}\,\vec{e}_c. \tag{52}$$

En una base coordenada escribimos esto del siguiente modo

$$\nabla_{\partial_\nu}\partial_\mu = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,\partial_\lambda. \tag{53}$$

Según el enunciado,

$$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\,\cos\theta, \quad \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \cot\theta, \tag{54}$$

y cero las restantes componentes. Esto significa que

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi &= \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}\,\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\varphi}\,\partial_\varphi = -\sin\theta\,\cos\theta\,\partial_\theta, \\ \nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta &= \Gamma^{\theta}{}_{\theta\varphi}\,\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}\,\partial_\varphi = \cot\theta\,\partial_\varphi, \\ \nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi &= \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\theta}\,\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}\,\partial_\varphi = \cot\theta\,\partial_\varphi, \\ \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta &= \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}\,\partial_\theta + \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\theta}\,\partial_\varphi = 0. \end{cases} \tag{55}$$

La última ecuación implica que el campo ∂_θ se transporta de manera autoparalela. Sus curvas integrales son, por lo tanto, geodésicas sobre la esfera. En general, las curvas integrales de un campo $\vec{V}$ quedan definidas por las ecuaciones

$$\frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma} = V^\mu\big(x(\sigma)\big). \tag{56}$$

Para la esfera,

$$x^1 = \theta, \qquad x^2 = \varphi. \tag{57}$$

Si $\vec{V} = \partial_\theta$, entonces $V^1 = 1$ y $V^2 = 0$. Luego, las curvas integrales del campo ∂_θ satisfacen las ecuaciones

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = 1, \qquad \frac{d\varphi}{d\sigma} = 0. \tag{58}$$

Las soluciones son $\varphi =$ constante, $\theta = \sigma$. Estas curvas son los meridianos sobre la esfera: círculos máximos contenidos en un plano vertical. No es pues un resultado inesperado encontrar que estas curvas son geodésicas, más aún sabiendo de antemano que las componentes de la conexión son las asociadas a la métrica usual sobre S^2, tal como lo adelanta el *item* (c).

Por otro lado, las curvas integrales del campo ∂_φ satisfacen las ecuaciones

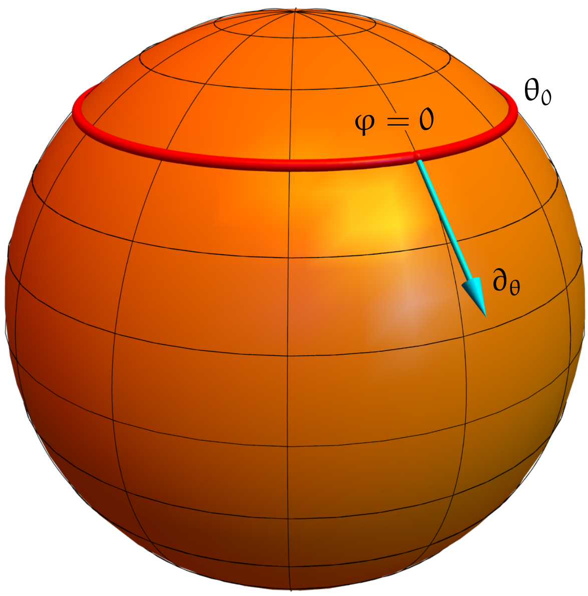
$$\frac{d\theta}{d\sigma} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\sigma} = 1. \tag{59}$$

Tal como esperábamos, son los paralelos de latitud $\theta =$ constante y $\varphi = \sigma$. Notemos que para el campo ∂_φ vale

$$\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi = -\sin\theta\,\cos\theta\,\partial_\theta. \tag{60}$$

Esto sólo se anula si $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi$. El primer y último caso no tienen interés, porque esos ángulos no definen ninguna curva propiamente dicha, sino un par de puntos. La conclusión es que ∂_φ se transporta autoparalelamente sólo en el caso $\theta = \pi/2$. La curva que corresponde a este ángulo es el ecuador de la esfera, es decir, un círculo máximo, que, como sabemos, es una geodésica. Los círculos con θ distinto de $\pi/2$ no son geodésicas sobre la esfera, y por lo tanto el campo ∂_φ no se transporta sobre ellos de manera autoparalela.

b) En este *item* nos dan una curva y nos piden que traslademos paralelamente sobre ella cierto vector. Eso significa encontrar el campo vectorial sobre la curva tal que su derivada covariante respecto de la curva sea cero y que satisfaga la condición inicial dada. La curva es un círculo definido por el ángulo $\theta = \theta_0$ y la condición inicial para el campo vectorial es que en $\theta = \theta_0$ y $\varphi = 0$ sea igual a ∂_θ.



Necesitamos escribir la ecuación diferencial

$$\nabla_{\frac{d}{\partial\sigma}} \vec{V}(\sigma) = 0, \tag{61}$$

donde $d/d\sigma$ es el vector tangente a la curva. Como la curva está definida por las ecuaciones paramétricas $\theta = \theta_0$ y $\varphi = \sigma$, con $0 \leqslant \sigma < 2\pi$, su vector tangente es

$$\vec{U} = \frac{d}{d\sigma} = \frac{d\theta}{d\sigma}\partial_\theta + \frac{d\varphi}{d\sigma}\partial_\varphi = \partial_\varphi. \tag{62}$$

Habíamos visto que la ecuación de transporte paralelo es

$$\frac{dV^\mu}{d\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} V^\lambda U^\nu = 0. \tag{63}$$

Teniendo en cuenta que la única componente no nula de $\vec{U}$ es la componente φ y usando los coeficientes de la conexión dados en el enunciado, quedan dos ecuaciones

$$\frac{dV^\theta}{d\sigma} + \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} V^\varphi = 0, \tag{64}$$

$$\frac{dV^\varphi}{d\sigma} + \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} V^\theta = 0. \tag{65}$$

Explícitamente

$$\frac{dV^\theta}{d\sigma} - \sin\theta_0 \, \cos\theta_0 \, V^\varphi = 0, \tag{66}$$

$$\frac{dV^\varphi}{d\sigma} + \cot\theta_0 \, V^\theta = 0. \tag{67}$$

Derivando otra vez cada ecuación y usando las ecuaciones originales para reescribir el resultado, obtenemos

$$\frac{d^2V^\theta}{d\sigma^2} + \cos^2\theta_0 \, V^\theta = 0, \tag{68}$$

$$\frac{d^2V^\varphi}{d\sigma^2} + \cos^2\theta_0 \, V^\varphi = 0. \tag{69}$$

La condición inicial sobre el campo vectorial es

$$V^\theta(0) = 1, \qquad V^\varphi(0) = 0. \tag{70}$$

A su vez, las ecs. (66) y (67) implican

$$\frac{dV^\theta(0)}{d\sigma} = 0, \qquad \frac{dV^\varphi(0)}{d\sigma} = -\cot\theta_0. \tag{71}$$

Con esto ya podemos escribir

$$V^\theta(\sigma) = \cos(\sigma\cos\theta_0), \tag{72}$$

$$V^\varphi(\sigma) = -\frac{\sin(\sigma\cos\theta_0)}{\sin\theta_0}. \tag{73}$$

Al regresar al punto de partida, cuando $\sigma \to 2\pi$, el campo toma el valor

$$V^\theta(2\pi) = \cos(2\pi\cos\theta_0), \qquad V^\varphi(2\pi) = -\frac{\sin(2\pi\cos\theta_0)}{\sin\theta_0}. \tag{74}$$

Notemos que cerca de los polos el módulo de $\cos\theta_0$ es cercano a 1 y así el cambio neto luego de dar una vuelta tiende a cero. (El factor $1/\sin\theta_0$ no es problemático, porque el módulo del vector ∂_φ es justamente $\sin\theta_0$). Es natural que ocurra esto: si el círculo sobre el que se traslada el vector $\vec{V}$ está muy cerca de los polos, todo el movimiento ocurre en una región cuya geometría no se aparta apreciablemente de la geometría plana. Si observásemos el movimiento del vector desde el espacio euclídeo de 3 dimensiones, lo veríamos desplazarse prácticamente paralelo a sí mismo en el sentido usual que esa palabra tiene en $\mathbf{R}^3$.

Tendremos una mejor idea de estos cambios si expresamos $\vec{V}(\sigma)$ en la base de versores ortonormales $\vec{e}_\theta = \partial_\theta$ y $\vec{e}_\varphi = (\sin\theta)^{-1}\partial_\varphi$,

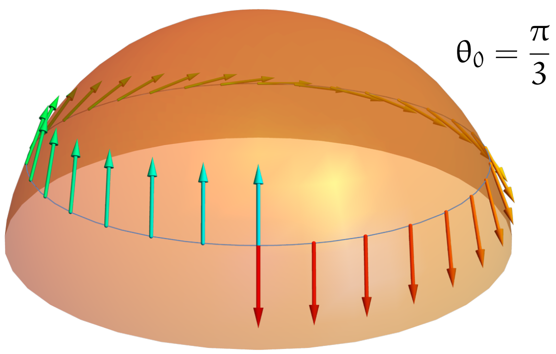
$$\vec{V}(\sigma) = V^\theta(\sigma)\,\partial_\theta + V^\varphi(\sigma)\,\partial_\varphi = V^\theta(\sigma)\,\vec{e}_\theta + \sin\theta_0 V^\varphi(\sigma)\vec{e}_\varphi. \tag{75}$$

Explícitamente,

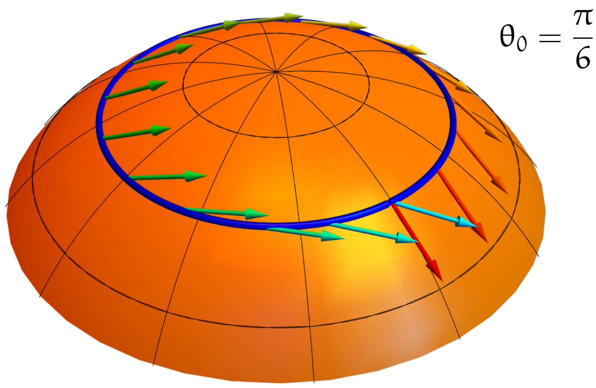
$$\vec{V}(\sigma) = \cos(\sigma\cos\theta_0)\,\vec{e}_\theta - \sin(\sigma\cos\theta_0)\,\vec{e}_\varphi. \tag{76}$$

Vemos entonces que si representamos $\vec{V}(\sigma)$ como un vector ordinario sobre la superficie de la esfera, su dirección va rotando respecto de la base de versores. En particular, su módulo es siempre igual a 1. La preservación del módulo por el transporte paralelo está relacionado con el hecho de que la métrica sea compatible con la conexión. La velocidad de rotación depende del ángulo θ_0. En los polos la velocidad de rotación es máxima respecto de la base de versores esféricos. Pero visto desde $\mathbf{R}^3$ su variación tiende a cero.

La siguiente figura muestra el campo vectorial para $\theta_0 = \pi/3$. En este caso $\cos\theta_0 = 1/2$. Al regresar a la posición inicial, el vector ha girado un ángulo π



Moviéndonos hacia el polo, para $\theta_0 = \pi/6$ es notable que, desde la perspectiva de $\mathbf{R}^3$ el vector tiende a mantener una dirección fija.



c) Este *item* pide demostrar que la conexión definida en el enunciado está asociada a la métrica usual sobre S^2,

$$d\ell^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2. \tag{77}$$

En estas coordenadas la métrica es diagonal y tiene componentes

$$g_{\theta\theta} = 1, \qquad g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta. \tag{78}$$

Su inversa también es diagonal y tiene componentes

$$g^{\theta\theta} = 1, \qquad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sin^2\theta}. \tag{79}$$

Una forma de demostrar que la conexión dada corresponde a esta métrica consiste verificar directamente las expresiones de los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(g_{\lambda\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\lambda} - g_{\lambda\nu,\rho} \right). \tag{80}$$

Pero es más fácil seguir otro camino, que consiste en escribir la ecuación de las curvas geodésicas. Sabemos que estas curvas, parametrizadas como $x^{\mu}(\sigma)$ satisfacen la ecuación geodésica,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\sigma^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} \frac{dx^{\lambda}}{d\sigma} \frac{dx^{\nu}}{d\sigma} = 0. \tag{81}$$

De modo que las componentes de la conexión pueden leerse de este conjunto de ecuaciones. La ecuación geodésica, por otra parte, se obtiene del principio variacional

$$\delta \int_a^b d\sigma \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2}. \tag{82}$$

Lo que hace las veces de Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2}. \tag{83}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para θ es

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{d\theta}{d\sigma}\right) - \frac{1}{\mathcal{L}} \sin\theta \, \cos\theta \, \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0. \tag{84}$$

Notemos que

$$\mathcal{L} = \frac{d\ell}{d\sigma}. \tag{85}$$

Esto permite hacer un cambio de variables y escribir

$$\frac{d^2\theta}{d\ell^2} - \sin\theta\,\cos\theta\,\left(\frac{d\varphi}{d\ell}\right)^2 = 0. \tag{86}$$

El parámetro es la propia longitud de arco. La expresión anterior debe compararse con la componente θ de la ecuación de la geodésica

$$\frac{d\theta^2}{d\ell^2} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 + \left(\Gamma^\theta{}_{\theta\varphi} + \Gamma^\theta{}_{\varphi\theta}\right)\frac{d\theta}{d\ell}\frac{d\varphi}{d\ell} + \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\ell}\right)^2 = 0. \tag{87}$$

Asumiendo que la conexión es simétrica, de la comparación de ambas expresiones resulta

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\,\cos\theta, \qquad \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\theta{}_{\varphi\theta} = 0. \tag{88}$$

De manera análoga, la ecuación de Euler-Lagrange para φ es

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\sin^2\theta\frac{d\varphi}{d\sigma}\right) = 0. \tag{89}$$

Usando el mismo cambio de variables,

$$\frac{d}{d\ell}\left(\sin^2\theta\frac{d\varphi}{d\ell}\right) = 0. \tag{90}$$

Luego,

$$\frac{d^2\varphi}{d\ell^2} + 2\cot\theta\,\frac{d\theta}{d\ell}\frac{d\varphi}{d\ell} = 0. \tag{91}$$

De la comparación con la componente φ de la ecuación geodésica

$$\frac{d^2\varphi}{d\ell^2} + \Gamma^\varphi{}_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\ell}\right)^2 + \left(\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\right)\frac{d\theta}{d\ell}\frac{d\varphi}{d\ell} + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\ell}\right)^2 = 0, \tag{92}$$

otra vez asumiendo que la conexión es simétrica, resulta

$$\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cot\theta, \qquad \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\theta\theta} = 0. \tag{93}$$

Obtuvimos todas las componentes de la conexión dadas al comienzo del problema.

A modo de ejemplo calculemos alguno de los coeficientes mediante la evaluación directa de la expresión (80),

$$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\lambda\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\lambda} - g_{\lambda\nu,\rho}\right). \tag{94}$$

Por caso, calculemos $\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}$. Gracias a que la métrica es diagonal, sólo sobrevive un término,

$$\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi,\theta} = \frac{1}{2\sin^2\theta}(2\sin\theta\,\cos\theta) = \cot\theta. \tag{95}$$

La desventaja de este método es que tenemos que calcular coeficiente por coeficiente. En cambio, al escribir la ecuación geodésica todos los coeficientes de la conexión quedan a la vista.

d) Ahora se nos pide calcular las derivadas covariantes de los vectores de la base anholónoma $\vec{e}_\theta = \partial_\theta$ y $\vec{e}_\varphi = (\sin\theta)^{-1}\partial_\varphi$. Como es fácil verificar estos son versores respecto de la métrica dada.

En primer lugar tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{e}_\varphi}\vec{e}_\theta = \nabla_{(\sin\theta)^{-1}\partial_\varphi}\partial_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta \\ = \frac{1}{\sin\theta}\left(\Gamma^\theta{}_{\theta\varphi}\,\partial_\theta + \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}\,\partial_\varphi\right) = \frac{\cot\theta}{\sin\theta}\,\partial_\varphi = \cot\theta\;\vec{e}_\varphi.\end{aligned} \tag{96}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{e}_\theta}\vec{e}_\varphi = \nabla_{\partial_\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\right) &= -\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\,\partial_\varphi + \frac{1}{\sin\theta}\nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi \\ &= -\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\,\partial_\varphi + \frac{1}{\sin\theta}\left(\Gamma^\theta{}_{\varphi\theta}\,\partial_\theta + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\,\partial_\varphi\right) \\ &= -\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\partial_\varphi + \frac{\cot\theta}{\sin\theta}\,\partial_\varphi = 0.\end{aligned} \tag{97}$$

Compárese con el resultado

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi = \cot\theta\;\partial_\varphi. \tag{98}$$

A diferencia de ∂_φ, el versor $\vec{e}_\varphi$ es transportado paralelamente a lo largo de las curvas de θ constante. La razón de que eso no valiera para ∂_φ es que su módulo va cambiando con la latitud. Por el contrario, $\vec{e}_\varphi$ tiene módulo constante.

Las otras dos derivadas covariantes que podemos calcular en la base anholónoma son:

$$\nabla_{\vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta = \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = 0, \tag{99}$$

(que ya calculamos antes) y

$$\nabla_{\vec{e}_\varphi}\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\nabla_{\partial_\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\varphi\right) = \frac{1}{\sin^2\theta}\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi. \tag{100}$$

La última derivada figura en la ec. (55),

$$\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi = -\sin\theta\,\cos\theta\;\partial_\theta, \tag{101}$$

de manera que

$$\nabla_{\vec{e}_\varphi}\vec{e}_\varphi = -\cot\theta\;\partial_\theta = -\cot\theta\;\vec{e}_\theta. \tag{102}$$

Resumiendo, las cuatro derivadas covariantes en la base anholónoma son

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{e}_\varphi}\vec{e}_\theta = \cot\theta\ \vec{e}_\varphi, \\ \nabla_{\vec{e}_\varphi}\vec{e}_\varphi = -\cot\theta\ \vec{e}_\theta, \\ \nabla_{\vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta = 0, \\ \nabla_{\vec{e}_\theta}\vec{e}_\varphi = 0. \end{cases} \tag{103}$$

e) Las componentes no nulas de la conexión en esta base son, por lo tanto,

$$\tilde{\Gamma}^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \cot\theta, \qquad \tilde{\Gamma}^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\cot\theta. \tag{104}$$

Nótese que no es simétrica, puesto que $\tilde{\Gamma}^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = 0$.

f) Ahora tenemos un campo

$$\vec{V} = V^{\theta}(\theta)\ \partial_\theta + V^{\varphi}(\theta)\ \partial_\varphi \tag{105}$$

y nos piden calcular las componentes del tensor $\nabla\vec{V}$. Hemos visto que

$$(\nabla\vec{V})^{\mu}{}_{\nu} = V^{\mu}{}_{;\nu} \tag{106}$$

con

$$V^{\mu}{}_{;\nu} = V^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}V^{\lambda}. \tag{107}$$

Teniendo en cuenta que las componentes de $\vec{V}$ sólo dependen de θ y que las únicas componentes no nulas de la conexión son $\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}$ y $\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}$, resulta

$$V^{\theta}{}_{;\theta} = V^{\theta}{}_{,\theta}, \tag{108}$$

$$V^{\theta}{}_{;\varphi} = \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}V^{\varphi}, \tag{109}$$

$$V^{\varphi}{}_{;\theta} = V^{\varphi}{}_{,\theta} + \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}V^{\varphi}, \tag{110}$$

$$V^{\varphi}{}_{;\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}V^{\theta}. \tag{111}$$

Además se nos pide calcular $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ para cierto campo $\vec{U} = U^{\varphi}(\theta)\partial_\varphi$. En general teníamos la expresión (19),

$$(\nabla_{\vec{U}}\vec{V})^{\mu} = U^{\nu}V^{\mu}{}_{;\nu}. \tag{112}$$

Luego,

$$(\nabla_{\vec{u}}\vec{V})^{\theta} = U^{\varphi}V^{\theta}{}_{;\varphi} = \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}U^{\varphi}V^{\varphi}, \tag{113}$$

$$(\nabla_{\vec{u}}\vec{V})^{\varphi} = U^{\varphi}V^{\varphi}{}_{;\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}U^{\varphi}V^{\theta}. \tag{114}$$