**Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020**

**Primer Entrega:** *Guías 2 & 3 (coordenadas curvilíneas, principio de equivalente, geometría diferencial I)*

1. Sea $M$ una variedad diferenciable de dimensión $n$ dotada de una carta $\{x^\mu\}$. Una hipersuperficie $\Sigma$ de $(n-1)$ dimensiones es una subvariedad de codimensión 1 de $M$ y una forma posible de determinarla[1] es mediante una función escalar de las coordenadas $\{x^\mu\}$ de $M$ . Por ejemplo, en el caso particular en que $M = \mathbb{R}^3$ y $\Sigma = \mathbb{S}^2$ tendríamos que

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\right\} . \tag{1}$$

Si se tiene una parametrización $x^\mu(\lambda_{(i)})$ de $\Sigma$ con $(n-1)$ parámetros $\lambda_{(i)}$, los vectores tangentes a dicha hipersuperficie en la carta $\{x^\mu\}$ son

$$\vec{V}_{\lambda_{(i)}} = \frac{d}{d\lambda_{(i)}} . \tag{2}$$

Por otro lado, es posible definir una 1-forma normal[2] a $\Sigma$ utilizando la función escalar $f(x^\mu)$

$$\tilde{n} = \partial_\mu f(x^\mu)\, \tilde{d}x^\mu . \tag{3}$$

Esta 1-forma $\tilde{n}$ es normal a $\Sigma$ en el sentido de que cumple

$$\iota_{\vec{V}}\tilde{n} = \langle \tilde{n}\, , \vec{V}\rangle = \tilde{n}(\vec{V}) = 0\, , \tag{4}$$

para todo $\vec{V}$ tangente a $\Sigma$.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores se pide:

a) Hallar los vectores tangentes (2) y la 1-forma normal (3) en coordenadas cartesianas para la esfera $\mathbb{S}^2$ y el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ del Problema 4 de la Guía 2. Comprobar que $\tilde{n}$ y $\vec{V}$ son perpendiculares según (4).

b) El espacio Anti-de Sitter (AdS) de dos dimensiones se define como el hiperboloide

$$|X|^2 = g_{AB}X^A X^B = -\ell^2\, , \quad X^A = \{U\, , V\, , X\}\, , \tag{5}$$

inmerso en un espacio con dos coordenadas temporales, es decir, la métrica del espacio ambiente es $g_{AB} = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$. Hallar los vectores tangentes $\vec{V}$ y la 1-forma normal $\tilde{n}$ para $\mathrm{AdS}_2$. Comprobar que $\tilde{n}(\vec{V}) = 0$.

---

[1] Para más detalles ver [Car04] Apéndice D y [HE11] Sección 2.7 página 44.

[2] Ver [Mar91] Teorema 14 de la página 150 y la Definión siguiente. También refererirse a [Car04] Apéndice D y [HE11] Sección 2.7 página 44

2. Dado el siguiente cambio de coordenadas $\{t, x, y, z\} \mapsto \{t', x', y', z'\}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\sinh\left(\frac{gt'}{c}\right) , \\ x &= \frac{c^2}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\cosh\left(\frac{gt'}{c}\right) - \frac{c^2}{g} , \\ y &= y' , \quad z = z' , \end{aligned} \tag{6}$$

donde las constantes $c$ y $g$ tienen las siguientes unidades $[c] = m/s\,, [g] = m/s^2$ (notar que $g$ **no es el determinante** de la métrica). Se pide:

a) Hallar el intervalo de relatividad especial $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ y el diferencial de tiempo propio $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ en las coordenadas $\{t', x', y', z'\}$.

b) En la aproximación $\frac{gx'}{c^2} \ll 1$ compare el intervalo del ítem anterior con el intervalo de campo débil

$$ds^2 = -c^2\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \,. \tag{7}$$

¿Qué interpretación le puede asignar a $\Phi$?

c) Para $\frac{gt'}{c} \ll 1$ y $\frac{gx'}{c^2} \ll 1$ muestre que $(6)$ corresponde a una transformación a un sistema uniformemente acelerado dentro de la teoría de Newton.

d) Muestre que un reloj en reposo en $x' = h$ adelanta respecto de uno situado en $x' = 0$ (también en reposo). ¿Cómo se relaciona ésto con el principio de equivalencia?

3. Se tiene la siguiente expresión para la 2-forma intensidad de campo

$$\tilde{F} = -\frac{q}{r^2}\tilde{d}t \wedge \tilde{d}r\,, \tag{8}$$

donde $r$ es la coordenada radial de coordenadas esféricas.

Se pide:

a) Comprobar que $(8)$ corresponde al campo eléctrico de una carga puntual. Para ello calcular la 1-forma $\tilde{A}$ asociada al cuadri-potencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ ($\phi$ es potencial eléctrico y $\mathbf{A}$ es el potencial vector) y tomar su derivada exterior.

b) Obtener $\tilde{F}$ en coordenadas cartesianas.

# Bibliografía


[Car04] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison-Wesley, 2004.

[HE11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2011.

[Mar91] Marsden, J.E. y Tromba. *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.