Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020
Clase práctica del lunes 9/11.
Guía 6: solución de Schwarzschild.[*]

■ **Problema 5.**

a) Partiendo de $p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0$ y aprovechando que p_t es una constante de movimiento, obtenga una ecuación de conservación de la energía para una partícula que cae radialmente en la geometría de Schwarzschild. Muestre que la velocidad $dr/d\tau$ cumple la misma ecuación que la velocidad radial en la teoría de Newton.

b) Muestre que el tiempo propio de viaje entre un r finito y la singularidad $r = 0$ es finito.

c) Obtenga $r(t)$ para una partícula inicialmente en reposo en el infinito.

■ **Solución**. En estos problemas siempre hay dos fuentes de ecuaciones. Por un lado están las ecuaciones de la geodésicas

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \tag{1}$$

donde λ es el parámetro afín. En el caso de partículas masivas, lo más cómodo es tomar $\lambda = \tau$. Por otro lado, tenemos la ecuación de conservación

$$p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0. \tag{2}$$

En el caso de partículas masivas, esto es equivalente a

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2, \tag{3}$$

mientras que en el caso de partículas sin masa es

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{4}$$

El parámetro afín en este caso se elige, por lo común, de modo tal que $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$.

Todas estas ecuaciones provienen del principio variacional

$$\delta\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} d\lambda\, \mathcal{L}(x,\dot{x}) = 0, \tag{5}$$

a través del lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \tag{6}$$

El punto indica derivación respecto del parámetro afín. En particular, la no dependencia explícita de $\mathcal{L}$ respecto de λ implica las ecuaciones de conservación (3) y (4). En efecto, se

[*]zanellaj@df.uba.ar

conserva el "Hamiltoniano"

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{L}. \tag{7}$$

Si inicialmente se satisface la ecuación $p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0$, entonces se cumple a todo tiempo. En tanto que las ecuaciones de Euler-Lagrange proporcionan las ecuaciones de las geodésicas.

Debemos notar que, al disponer de un lagrangiano, no siempre será necesario escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange. Las simetrías de $\mathcal{L}$ permiten escribir ecuaciones de conservación que equivalen a integrales primeras de las ecuaciones de movimiento. Así, en el caso de la métrica de Schwarzschild sabemos que $\mathcal{L}$ es independiente de t y de φ, de modo que se conservan las cantidades

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\dot{x})}{\partial \dot{t}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}(x,\dot{x})}{\partial \dot{\varphi}}. \tag{8}$$

En las coordenadas de Schwarzschild la métrica viene expresada a través del siguiente intervalo

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2\right), \tag{9}$$

donde

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \tag{10}$$

Conviene definir variables adimensionales. Mediremos r y s en unidades de r_s, y a los tiempos t y τ en unidades de r_s/c. Así, el intervalo se escribe como

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2\right), \tag{11}$$

y el tiempo propio, tratándose de una partícula masiva,

$$d\tau^2 = -\left[-\left(1-\frac{1}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2\right)\right]. \tag{12}$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\left[-\left(1-\frac{1}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2\right)\right]. \tag{13}$$

Pensemos, para fijar ideas, en el movimiento de una partícula masiva. El parámetro afín es el tiempo propio. En el caso de un movimiento general, primero escribiríamos las tres ecuaciones de conservación asociadas a la independencia de $\mathcal{L}$ respecto del tiempo propio, del tiempo coordenado y del ángulo φ:

$$-\left(1-\frac{1}{r}\right)\dot{t}^2+\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2+r^2\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)=-1, \tag{14}$$

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)\dot{t}=\tilde{E}, \tag{15}$$

$$r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=\tilde{L}, \tag{16}$$

donde $\tilde{E}$ y $\tilde{L}$ son constantes de movimiento. Tenemos también una ecuación de Euler-Lagrange para r y otra para θ. Eso nos daría 5 ecuaciones. Debido a la primera ecuación de conservación podemos omitir la ecuación de movimiento para r, que es la que tiene el aspecto más complicado. Así, el sistema de ecuaciones se completa con la ecuación de Euler-Lagrange para θ

$$\ddot{\theta}+\frac{2}{\dot{r}}\dot{\theta}-\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2=0. \tag{17}$$

En el caso de una partícula no masiva, lo único que hay que modificar es la ec. (14), igualando el miembro de la izquierda a cero en lugar de uno, y teniendo presente que las derivadas no son respecto al tiempo propio sino respecto al parámetro afín.

El movimiento más simple es el que tiene lugar radialmente, con θ y φ constantes. Para una partícula masiva las ecuaciones de movimiento son

$$-\left(1-\frac{1}{r}\right)\dot{t}^2+\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2=-1, \tag{18}$$

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)\dot{t}=\tilde{E}. \tag{19}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos una expresión que nos permite integrar τ como función de r,

$$-\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}\tilde{E}^2+\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2=-1. \tag{20}$$

Reordenando términos queda

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-\frac{1}{r}=-(1-\tilde{E}^2). \tag{21}$$

Esta es una ecuación de movimiento unidimensional para una partícula de masa 2 en un potencial $V(r)=-1/r$ con una energía total igual a $-(1-\tilde{E}^2)$. Volviendo a las variables dimensionales resulta

$$\frac{r_s^2/c^2}{r_s^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-\frac{r_s}{r}=-(1-\tilde{E}^2), \tag{22}$$

esto es

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{2GM}{c^2 r} = -(1-\tilde{E}^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{1}{2}c^2(1-\tilde{E}^2). \tag{23}$$

En definitiva, la ecuación de movimiento para r como función de τ es la misma que la de una partícula no relativista en un potencial newtoniano. Éste era uno de los puntos que pedía demostrar el ejercicio.

Supongamos que la partícula cae a la singularidad desde un radio inicial r_0 en $t = \tau = 0$, donde tiene velocidad nula. Eso fija el valor de $\tilde{E}$. Reemplazando $\dot{r} = 0$ en la ec. (21), obtenemos

$$\frac{1}{r_0} = 1 - \tilde{E}^2, \tag{24}$$

o bien

$$\tilde{E} = \sqrt{1 - \frac{1}{r_0}}. \tag{25}$$

Notar que para que la partícula empiece a caer desde el reposo desde un radio finito debe ser $\tilde{E}^2 < 1$. Además, notar que r_0 tiende a infinito a medida que $\tilde{E}$ se acerca a 1.

Puesto que la partícula cae a la singularidad, al despejar dr en términos de $d\tau$ en la ec. (21), debemos quedarnos con el signo negativo de la raíz; es decir,

$$\int_0^{\tau(r)} d\tau = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - (1-\tilde{E}^2)}}. \tag{26}$$

La integral es elemental,

$$\tau(r) = r_0^{3/2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}\right]. \tag{27}$$

Hasta aquí buscamos relacionar τ con r. Podemos obtener una ecuación diferencial que relacione t con r a partir de las ecs. (19) y (21),

$$\left(1 - r^{-1}\right)\dot{t} = \tilde{E}, \tag{28}$$

$$\dot{r}^2 - \frac{1}{r} = -(1-\tilde{E}^2). \tag{29}$$

Usando la primera para escribir

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{E}}{1-r^{-1}}\frac{dr}{dt}, \tag{30}$$

y reemplazando en la segunda queda

$$\frac{\tilde{E}^2}{(1-r^{-1})^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{r} = -(1-\tilde{E}^2). \tag{31}$$

El problema no pide integrar esta ecuación en el caso general sino sólo cuando la partícula parte desde el reposo para r infinito. En ese caso es $\tilde{E} = 1$, y resulta la ecuación

$$dt^2 = \frac{r}{(1-r^{-1})^2} dr^2. \tag{32}$$

Es seguro que en el tramo en que la partícula va desde r igual a infinito hasta $r = 1$, t aumenta y r disminuye. Además el factor $1 - r^{-1}$ es mayor o igual que cero. Por lo tanto, en ese tramo debemos tomar el signo menos de la raíz cuadrada y escribir

$$dt = -\frac{\sqrt{r}\,dr}{1-r^{-1}}. \tag{33}$$

La integral que necesitamos es

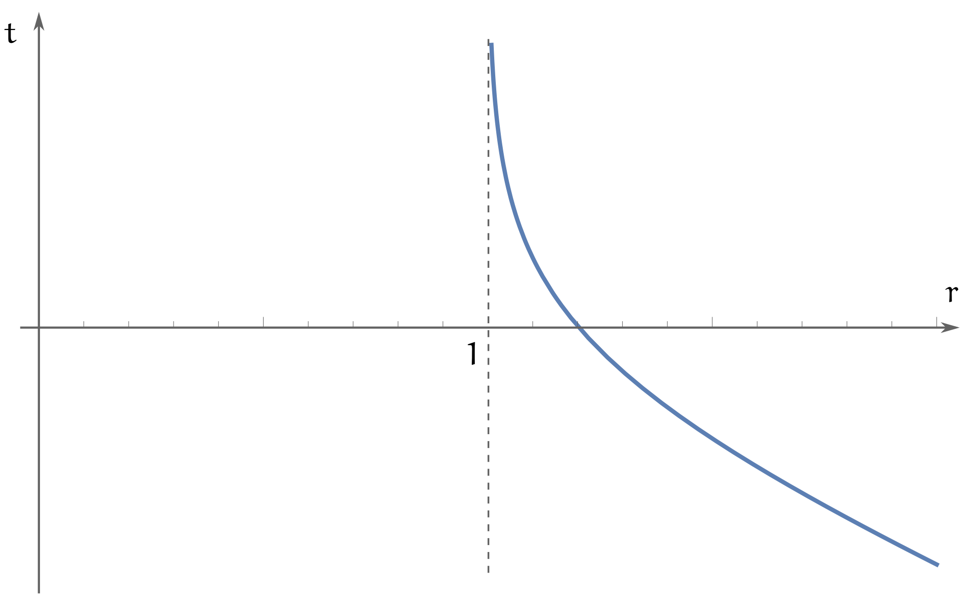
$$I = \int dr\,\frac{\sqrt{r}}{1-r^{-1}} = \frac{2}{3}\sqrt{r}(r+3) + \log\left(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right). \tag{34}$$

Entonces,

$$t = -\frac{2}{3}r^{3/2} - 2\sqrt{r} + \log\left(\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}\right). \tag{35}$$

La constante de integración está fijada arbitrariamente. Para $r \to 1$, t diverge hacia infinito. Para $r \to \infty$, t diverge hacia menos infinito. Queda como ejercicio demostrar que el comportamiento asintótico cuando r se acerca a 1 tiene la siguiente forma

$$r(t) \sim 1 + 4e^{-8/3}e^{-t}. \tag{36}$$



■ **Problema 6**. Una partícula de masa m cae radialmente hacia el horizonte de un agujero negro de Schwarzschild de masa M siguiendo una geodésica con $p_0 = -0{,}95\,mc$. [En la versión original de la guía había un error en el signo de p_0. Debe ser negativo].

a) Encuentre el tiempo propio para viajar desde $r = 3GM/c^2$ hasta $r = 2GM/c^2$.

b) Encuentre el tiempo propio para viajar desde $r = 2GM/c^2$ hasta $r = 0$.

c) Cuando pasa por $r = 2{,}001GM/c^2$ la partícula envía un fotón radialmente a un observador distante estacionario ($r_{\rm obs}$ = constante). Calcule el corrimiento al rojo de la frecuencia del fotón. No olvide tener en cuenta la contribución proveniente del efecto Doppler debido a la velocidad de la partícula.

■ **Solución**. a)–b) Recordemos que, dada una métrica, las ecuaciones de movimiento se deducen del lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}. \tag{37}$$

Si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de la coordenada x^0, se conserva la cantidad

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} = g_{0\nu} \dot{x}^{\nu}. \tag{38}$$

En el caso de una partícula masiva, cuando el parámetro afín es el tiempo propio, esta magnitud coincide con p_0/m.

Para la métrica de Schwarzschild, el lagrangiano del cual se deducen las ecuaciones de movimiento es

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left[-c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2) \right]. \tag{39}$$

De modo que la cantidad conservada asociada a la simetría de traslación temporal es (recordar que la derivada respecto de x^0 es respecto de ct)

$$\frac{p_0}{m} = -c\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} \ \ \Rightarrow \ \ \frac{p_0}{mc} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = -\tilde{E}. \tag{40}$$

Aquí hemos vuelto a introducir la constante de movimiento $\tilde{E}$. En conclusión, el dato del problema es que $\tilde{E} = 0{,}95$. Recordar que la partícula cae desde el reposo a partir de la posición

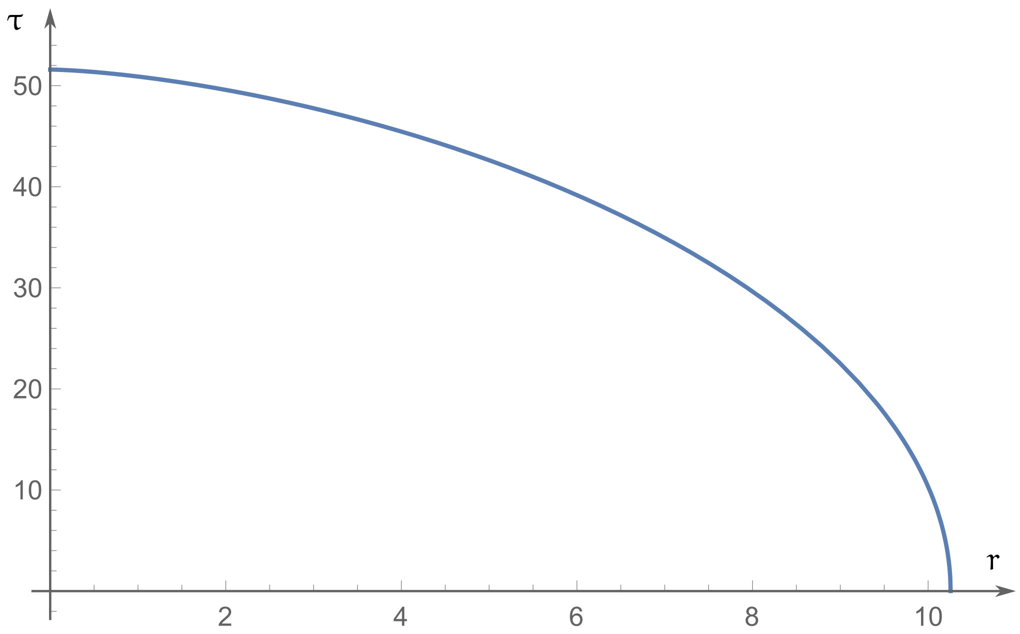
$$r_0 = \frac{1}{1 - \tilde{E}^2}, \tag{41}$$

de manera que r_0 tiende a infinito a medida que $\tilde{E}$ tiende a 1.

En el problema anterior encontramos el tiempo propio como función del radio. El resultado, en términos de las variables adimensionalizadas, quedó escrito en la ec. (27),

$$\tau(r) = r_0^{3/2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}\right]. \tag{42}$$

Este es el tiempo propio de una partícula que parte de $r = r_0$ en $\tau = 0$. Para $\tilde{E} = 0{,}95$, la ec. (41) implica $r_0 \approx 10{,}26$. El gráfico del tiempo propio es como lo muestra la figura.



En el enunciado de la guía figuran como datos un par de radios medidos en unidades de M. Nosotros estamos usando unidades tales que $2M = 1$. Así, cuando en la guía figura un radio de $3M$, nosotros debemos emplear $r = 3/2$, y cuando en la guía figura un radio de $2M$ nosotros debemos emplear $r = 1$. El tiempo propio total que le toma a la partícula caer desde $r_0 \approx 10{,}26$ hasta $r = 0$ es

$$\tau(0) \approx 51{,}60. \tag{43}$$

Dividamos este período en tres tramos. Para ir desde r_0 hasta $r = 3/2$ tarda

$$\tau(3/2) \approx 50{,}31. \tag{44}$$

Para caer desde $r = 3/2$ hasta el radio de Schwarzschild tarda

$$\tau(1) - \tau(3/2) \approx 0{,}60. \tag{45}$$

Finalmente, para caer desde el radio de Schwarzschild hasta la singularidad tarda

$$\tau(0) - \tau(1) \approx 0{,}69. \tag{46}$$

c) En este punto del ejercicio debemos seguir la trayectoria de rayos de luz que se mueven radialmente. En esta situación tan simple necesitamos una sola ecuación, la que dice que los fotones se mueven de tal forma que $ds^2 = 0$,

$$-\left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0. \tag{47}$$

Estamos interesados en la trayectoria de fotones en la región $r > 1$ y que se alejan de la singularidad, de modo que dt y dr tienen el mismo signo. Entonces,

$$dt = \frac{dr}{1 - r^{-1}} = \frac{r dr}{r - 1}. \tag{48}$$

Luego, para un fotón emitido en t_e desde la posición r_e, resulta

$$t(r) = t_e + r - r_e + \log\left(\frac{r - 1}{r_e - 1}\right). \tag{49}$$

Podemos leer esta fórmula como el tiempo coordenado al que es recibido en la posición r un fotón emitido radialmente desde la posición r_e a tiempo t_e.

Ahora imaginamos la siguiente situación: una partícula masiva está cayendo hacia el radio de Schwarzschild y emite, en su sistema propio, fotones de frecuencia ω. Alternativamente podemos pensar que emite pulsos de luz a intervalos $\delta\tau \propto \omega^{-1}$. Supongamos que la trayectoria de la partícula que cae está parametrizada según su tiempo propio como

$$\begin{cases} r_e(\tau), \\ \\ t_e(\tau). \end{cases} \tag{50}$$

De modo que podemos construir una función que nos dé el tiempo de recepción en la posición r del pulso de luz emitido por la partícula cuando su tiempo propio vale τ. Es, simplemente,

$$t(r, \tau) = t_e(\tau) + r - r_e(\tau) + \log\left[\frac{r - 1}{r_e(\tau) - 1}\right]. \tag{51}$$

El pulso emitido en $\tau + \delta\tau$ llega a la posición r en $t(r, \tau + \delta\tau)$. Desarrollando hasta primer orden en $\delta\tau$ resulta

$$t(r, \tau + \delta\tau) = t(\tau, r) + \left[\dot{t}_e(\tau) - \frac{\dot{r}_e(\tau)}{1 - r_e(\tau)^{-1}}\right] \delta\tau. \tag{52}$$

Esto significa que el intervalo de tiempo coordenado entre la llegada de los dos pulsos a la posición r es

$$\delta t_{\text{obs}} = \left[\dot{t}_e(\tau) - \frac{\dot{r}_e(\tau)}{1 - r_e(\tau)^{-1}}\right] \delta\tau. \tag{53}$$

Como el observador está fijo, el intervalo de su tiempo propio que transcurre entre la llegada de dos pulsos consecutivos es

$$\delta\tau_{\text{obs}} = \sqrt{g_{00}}\,\delta t = \sqrt{1-\frac{1}{r}}\,\delta t_{\text{obs}}. \tag{54}$$

Por lo tanto

$$\delta\tau_{\text{obs}} = \sqrt{1-\frac{1}{r}}\left[\dot{t}_e(\tau) - \frac{\dot{r}_e(\tau)}{1-r_e(\tau)^{-1}}\right]\delta\tau. \tag{55}$$

De esta manera la relación entre las frecuencias de emisión y de recepción viene dada por la siguiente fórmula, que se obtiene tomando el recíproco de la ecuación anterior,

$$\omega_{\text{obs}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^{-1}}}\left[\dot{t}_e(\tau) - \frac{\dot{r}_e(\tau)}{1-r_e(\tau)^{-1}}\right]^{-1}\omega_{\text{em}}. \tag{56}$$

Si la partícula que emite los pulsos de luz es la partícula que del *item* anterior, entonces r_e y t_e satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{r_e}\right)\dot{t}_e = \tilde{E}, \\[2ex] \dot{r}_e = -\sqrt{\dfrac{1}{r_e} - (1-\tilde{E}^2)}. \end{cases} \tag{57}$$

Escribiendo $\tilde{E}$ en términos de r_0 resulta

$$\begin{cases} \dot{t}_e = \left(1-\dfrac{1}{r_e}\right)^{-1}\sqrt{1-\dfrac{1}{r_0}}, \\[2ex] \dot{r}_e = -\sqrt{\dfrac{1}{r_e} - \dfrac{1}{r_0}}. \end{cases} \tag{58}$$

Basta reemplazar estas expresiones en la ec. (56). Así se obtiene una fórmula que sólo involucra el radio de emisión,

$$\omega_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1-r_e^{-1}}}{\sqrt{1-r^{-1}}}\;\frac{\sqrt{1-r_e^{-1}}}{\sqrt{1-r_0^{-1}} + \sqrt{r_e^{-1}-r_0^{-1}}}\,\omega_{\text{em}}. \tag{59}$$

Al escribir esta expresión hemos separado intencionalmente el factor de corrimiento al rojo gravitatorio para un emisor estático en la posición r_e. El factor restante debe atribuirse al corrimiento Doppler de la relatividad especial, debido a la velocidad con que se mueve la partícula respecto a los observadores estáticos en la posición r_e. Antes de verificar esta afirmación, comprobemos que para $r_e = r_0$, cuando la partícula está en reposo, obtenemos la fórmula de corrimiento al rojo gravitatorio ya conocida. En efecto, si $r_e = r_0$ resulta

$$\omega_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1 - r_e^{-1}}}{\sqrt{1 - r^{-1}}}\, \omega_{\text{em}}. \tag{60}$$

Verifiquemos ahora que el factor extra en la ec. (59) es el factor Doppler de la relatividad especial,

$$f = \sqrt{\frac{1 - |v|}{1 + |v|}}. \tag{61}$$

Para calcular la velocidad de la partícula debemos hacer el cociente entre intervalos de longitudes y tiempos propios para un observador estático ubicado en la posición por la que pasa la partícula. Como la métrica es diagonal, si la partícula recorre un intervalo dr_e de la coordenada radial, eso implica una distancia propia

$$d\ell = \sqrt{g_{rr}}\, dr_e = \frac{1}{\sqrt{1 - r_e^{-1}}}\, dr_e. \tag{62}$$

A su vez, el tiempo propio registrado por los observadores ubicados en r_e para el tránsito de la partícula a través de dr_e es

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt_e = \sqrt{1 - r_e^{-1}}\, dt_e. \tag{63}$$

La velocidad física de la partícula es entonces

$$v = \frac{d\ell}{d\tau} = \frac{1}{1 - r_e^{-1}} \frac{dr_e}{dt_e} = \frac{1}{1 - r_e^{-1}} \frac{\dot{r}_e}{\dot{t}_e}. \tag{64}$$

Por otro lado, a partir de las ecs. (58), es

$$\frac{\dot{r}_e}{\dot{t}_e} = -\frac{1 - r_e^{-1}}{\sqrt{1 - r_0^{-1}}} \sqrt{r_e^{-1} - r_0^{-1}}. \tag{65}$$

Luego,

$$|v| = \frac{\sqrt{r_e^{-1} - r_0^{-1}}}{\sqrt{1 - r_0^{-1}}}. \tag{66}$$

Queda como ejercicio comprobar que el factor extra en la ec. (59) es justamente el factor Doppler de la relatividad especial. Lo más sencillo es verificar que

$$\frac{1 - |v|}{1 + |v|} = \left[\frac{\sqrt{1 - r_e^{-1}}}{\sqrt{1 - r_0^{-1}} + \sqrt{r_e^{-1} - r_0^{-1}}} \right]^2. \tag{67}$$

De todas formas, se aconseja hacerlo con algún programa de cálculo.

La siguiente figura muestra en línea llena la relación entre las frecuencias de emisión y recepción para la partícula que cae con $\tilde{E} = 0.95$. El eje horizontal es el radio de emisión r_e. En línea de trazos se muestra sólo el efecto del factor de corrimiento al rojo gravitatorio. El observador está ubicado en el infinito.