Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020
Cátedra Ferraro
Segunda Entrega de Ejercicios

1. Una forma posible de modelar la geometría hiperbólica es mediante el semi-espacio superior de $\mathbb{R}^2$, es decir, $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, equipado con la métrica[1]

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \,. \tag{1}$$

A estas coordenadas se las conoce como coordenadas de Poincaré.

Se pide:

a) Hallar los símbolos de Christoffel en la carta $\{\partial_x, \partial_y\}$ (ayuda: los únicos símbolos no nulos son $\Gamma^x_{xy}\,, \Gamma^y_{xx}$ y Γ^y_{yy}) y calcular el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

b) La métrica (1) es claramente invariante ante traslaciones rígidas en la coordenada x, es decir, $x \to x' = x + a$. Comprobar que también es invariante ante dilataciones $(x\,, y) \to (x'\,, y') \to (e^\lambda x\,, e^\lambda y)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Comprobar que los campos vectoriales[2]

$$\left\{\vec{P} = \partial_x\,, \vec{D} = x\partial_x + y\partial_y\,, K = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y\right\} \tag{2}$$

son vectores de Killing de la métrica (1) y satisfacen las siguientes relaciones de conmutación[3]

$$[D\,, P] = -P\,, [D\,, K] = K\,, [P\,, K] = 2D\,. \tag{3}$$

Extra: Para ganar un poco de intuición puede ser útil identificar $\vec{P} = \partial_x$ y $\vec{D} = x\partial_x + y\partial_y$ con los generadores de las traslaciones y dilataciones infinitesimales respectivamente. Dada una transformación de coordenadas $x^i \to x'^i$

$$x'^i = \phi^i(x^j\,, a^k)\,, \tag{4}$$

donde ϕ^i son funciones de la coordenadas "viejas" y $\{a^k\}$ son los parámetros de la transformación, los generadores de dicha transformación se definen[4]

$$\vec{X}_k = \frac{\partial \phi^i}{\partial a^k}\Big|_{a^k=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{5}$$

d) Extra: Las geodésicas de $\mathbb{H}^2$ en las coordenadas de Poincaré (1) son rectas verticales (cortan al eje x perpendicularmente) y círculos centrados en puntos x_0 sobre el eje x (también lo cortan perpendicularmente).

---

[1]Se puede chequear que es posible parametrizar el hiperboloide $-T^2 + X^2 + Y^2 = -1$ mediante el mapa $\{T(x, y) = (1 + x^2 + y^2)/(2y)\,, X(x, y) = x/y\,, Y(x, y) = (1 - x^2 - y^2)/(2y)\}$. En esta parametrización la métrica inducida sobre la superficie del hiperboloide es justamente (1).

[2]Nota de "color": Los campos vectoriales (2) pueden interpretarse del siguiente modo: P como el generador de traslaciones en el semi-plano superior; D como el generador de dilataciones; y K como el generador de las llamadas transformaciones conformes especiales.

[3]Nota de "color": El álgebra (3) es el álgebra de Lie del grupo $SO(2, 1)$ de transformaciones conformes globales en dos dimensiones. Para aquellos que también estén cursando Teoría de Cuerdas, pueden ver que es isomorfa al subálgebra del álgebra de Witt formada por los generadores $\{L_{-1}\,, L_0\,, L_1\}$.

[4]Ver Sec. 8.6 de [Ham62], en especial las ecuaciones 8.38, 8.39, 8.46 y el ejemplo de la pág. 297.

Una manera relativamente sencilla de chequear esto es utilizar las cantidades conservadas asociadas a $\vec{P}$ y $\vec{D}$. Para ello

- Comprobar que $\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} = 0$ resuelve las ecuaciones de la geodésica. ¿Qué expresión tiene $y(\lambda)$? Notar que estas curvas son rectas verticales.
- Utilizando las cantidades conservadas

$$g\left(\vec{P}, \frac{d}{d\lambda}\right) \equiv \frac{1}{b} = \text{const}\,,\ g\left(\vec{D}, \frac{d}{d\lambda}\right) \equiv \frac{1}{c} = \text{const}\,,\ \{b\,, c\} \in \mathbb{R} \tag{6}$$

comprobar que $(x(\lambda)\,, y(\lambda))$ satisfacen la relación

$$\left(x(\lambda)^2 - \frac{b}{c}\right)^2 + y(\lambda)^2 = r^2 = \text{const}\ . \tag{7}$$

Comentario 1: no es necesario hallar $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ explícitamente (aunque si está muy aburrida/o o muy entusiasmada/o puede hacerlo). Comentario 2: derivando $g\left(\vec{P}, \frac{d}{d\lambda}\right)$ y $g\left(\vec{D}, \frac{d}{d\lambda}\right)$ y jugando un poco (multiplicando adecuadamente por $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$) es posible obtener las ecuaciones de la geodésica.

2. La geometría de un agujero de gusano está descripta por el siguiente intervalo

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + \left(b^2 + r^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{8}$$

con b una constante.

a) Encuentre las ecuaciones de las geodésicas temporales y a partir de ahí calcule las componentes de la conexión $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$.

b) Verifique que las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$\mathrm{G}^t{}_t = -\mathrm{G}^r{}_r = \mathrm{G}^\theta{}_\theta = \mathrm{G}^\varphi{}_\varphi = \frac{b^2}{\left(b^2 + r^2\right)^2}. \tag{9}$$

c) Utilizando las ecuaciones de Einstein

$$\mathrm{G}^\mu{}_\nu = \frac{8\pi G}{c^4}\,\mathrm{T}^\mu{}_\nu, \tag{10}$$

obtenga la densidad de energía ρ, la presión radial p_r y la presión tangencial $p_\parallel$, suponiendo un fluido cuyo tensor de energía-momento en la base ortonormal asociada a las coordenadas $\{t, r, \theta, \varphi\}$ es

$$\mathrm{T}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} = \mathrm{diag}\,\{-\rho, p_r, p_\parallel, p_\parallel\}. \tag{11}$$

¿Qué sucede con los signos de la densidad de energía y de las presiones?

Bibliografía

[Ham62] Morton Hamermesh. *Group theory and its application to physical problems*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.