Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020

Segunda entrega de ejercicios: *Problema 2 resuelto.*

■ **Problema 2**. La geometría de un agujero de gusano está descripta por el siguiente intervalo

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + \left(b^2 + r^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{1}$$

a) Encuentre las ecuaciones de las geodésicas temporales y a partir de ahí calcule las componentes de la conexión $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$.

b) Verifique que las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$G^t{}_t = -G^r{}_r = G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi = \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}. \tag{2}$$

c) Utilizando las ecuaciones de Einstein

$$G^\mu{}_\nu = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^\mu{}_\nu, \tag{3}$$

obtenga la densidad de energía ρ, la presión radial p_r y la presión tangencial $p_\parallel$, suponiendo un fluido cuyo tensor de energía-momento es

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}\{-\rho, p_r, p_\parallel, p_\parallel\}. \tag{4}$$

¿Qué sucede con los signos de la densidad de energía y de las presiones?

■ **Solución**. a) Para encontrar las ecuaciones de las geodésicas lo más sencillo es usar las ecuaciones de Euler-Lagrange que se deducen del principio variacional

$$\delta \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} d\tau\ \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\ \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \tag{5}$$

donde el punto indica derivación respecto al tiempo propio. Lo que hace las veces de lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}\Big[-c^2\dot{t}^2 + \dot{r}^2 + \left(b^2 + r^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2\right)\Big]. \tag{6}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada t es simplemente

$$\ddot{t} = 0. \tag{7}$$

De aquí leemos que todos los coeficientes $\Gamma^0{}_{\mu\nu}$ son nulos. Por otro lado, para r es

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2) = 0. \tag{8}$$

Esto implica que los únicos coeficientes ${\Gamma^r}_{\mu\nu}$ distintos de cero son

$$ {\Gamma^r}_{\theta\theta} = -r, \qquad {\Gamma^r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta. \tag{9} $$

Las ecuación de Euler-Lagrange para θ es

$$ \ddot{\theta} + \frac{2r}{b^2+r^2}\,\dot{\theta}\dot{r} - \sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{10} $$

Por comparación con la forma de la ecuación geodésica, deducimos que los únicos coeficientes no nulos de la forma ${\Gamma^\theta}_{\mu\nu}$ son

$$ {\Gamma^\theta}_{\theta r} = {\Gamma^\theta}_{r\theta} = \frac{r}{b^2+r^2}, \qquad {\Gamma^\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\,\cos\theta. \tag{11} $$

Finalmente, la ecuación de Euler-Lagrange para φ es

$$ \ddot{\varphi} + \frac{2r}{b^2+r^2}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{12} $$

Entonces, los únicos coeficientes distintos de cero de la forma ${\Gamma^\varphi}_{\mu\nu}$ son

$$ {\Gamma^\varphi}_{r\varphi} = {\Gamma^\varphi}_{\varphi r} = \frac{r}{b^2+r^2}, \qquad {\Gamma^\varphi}_{\theta\varphi} = {\Gamma^\varphi}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{13} $$

b) Para escribir el tensor de Einstein, calcularemos primero el tensor de Ricci,

$$ R_{\mu\nu} = {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - {\Gamma^\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + {\Gamma^\lambda}_{\eta\lambda}{\Gamma^\eta}_{\mu\nu} - {\Gamma^\lambda}_{\eta\nu}{\Gamma^\eta}_{\mu\lambda}. \tag{14} $$

Es un ejercicio de paciencia que requiere que tener bien a la vista qué coeficientes de la conexión son distintos de cero. Una propiedad útil a tener en cuenta es que, pese a las apariencias, el término

$$ {\Gamma^\lambda}_{\mu\lambda,\nu} \tag{15} $$

es simétrico en μ y en ν. Así, si μ y ν toman ciertos valores, y sabemos que los símbolos de Christoffel no dependen de uno de ellos, podemos permutar μ y ν de manera que la derivación se haga respecto de la coordenada de la cual no depende el símbolo de Christoffel.

Puesto que todos los símbolos de la forma ${\Gamma^\lambda}_{\mu 0}$ son cero y además ningún símbolo de Christoffel depende del tiempo, resulta de manera inmediata

$$ R_{0\mu} = 0. \tag{16} $$

Sin reemplazar todavía los valores de los coeficientes de la conexión, para R_{rr} encontramos

$$ R_{rr} = -{\Gamma^\theta}_{r\theta,r} - {\Gamma^\varphi}_{r\varphi,r} - {\Gamma^\varphi}_{\varphi r}{\Gamma^\varphi}_{\varphi r} - {\Gamma^\theta}_{\theta r}{\Gamma^\theta}_{\theta r}. \tag{17} $$

Para $R_{r\varphi}$ descubrimos que en su expresión figuran sólo coeficientes nulos. Aquí resulta útil usar la propiedad de simetría antes mencionada. Por ejemplo, si nos encontramos con

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\varphi\lambda,r}\,, \tag{18}$$

podemos escribirlo como

$$\Gamma^{\lambda}{}_{r\lambda,\varphi}\,. \tag{19}$$

Pero ya sabemos que ningún coeficiente depende de φ, de modo que es automáticamente nulo.

Para $R_{r\theta}$ resulta

$$R_{r\theta} = \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} - \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi}\,. \tag{20}$$

Debido a que $\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} = \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}$, es $R_{r\theta} = 0$. En tanto, luego de un par de cancelaciones, para $R_{\varphi\varphi}$ encontramos

$$R_{\varphi\varphi} = \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi,\theta} + \Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi,r} + \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r} - \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}\,. \tag{21}$$

Al calcular $R_{\varphi\theta}$ se ve que todos los coeficientes que participan en su expresión son nulos. Finalmente, para $R_{\theta\theta}$ se encuentra

$$R_{\theta\theta} = \Gamma^{r}{}_{\theta\theta,r} - \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi,\theta} + \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} - \Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} - \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}\,. \tag{22}$$

El resultado preliminar es que la matriz de coeficientes $R_{\mu\nu}$ será diagonal. Reemplazando en las expresiones anteriores las formas explícitas de los coeficientes de la conexión resulta

$$R_{rr} = -\frac{2b^2}{(b^2+r^2)^2}, \qquad R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = R_{tt} = 0. \tag{23}$$

Definamos

$$C = \frac{b^2}{(b^2+r^2)^2}. \tag{24}$$

Ordenando las coordenadas como $\{t, r, \theta, \varphi\}$, en forma matricial obtenemos

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Para escribir el escalar de curvatura, antes de hacer la contracción $R^{\mu}{}_{\mu}$, necesitamos calcular $R^{\mu}{}_{\nu}$. El cuidado que hay que tener es que la métrica, si bien es diagonal, no es la de Minkowski. De todas maneras, como el único elemento no nulo es R_{rr} y, por otro lado,

$g_{rr} = 1$, resulta la misma matriz de antes:

$$R^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

de modo que

$$R = -2C. \tag{27}$$

Ya podemos escribir el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{28}$$

En forma matricial, resulta

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi}C \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Notar el signo menos en la componente G_{tt}. Ahora se verá el sentido de no escribir explícitamente los valores de $g_{\theta\theta}$ y de $g_{\varphi\varphi}$. En efecto, cuando subamos el primer índice del tensor para calcular $G^{\mu}{}_{\nu}$, deberemos multiplicar esos elementos por $g^{\theta\theta}$ y $g^{\varphi\varphi}$. Pero, debido a que la métrica es diagonal, estas cantidades no son otra cosa que los recíprocos de $g_{\theta\theta}$ y $g_{\varphi\varphi}$, respectivamente. En definitiva,

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{30}$$

c) Convendrá que escribamos las ecuaciones de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \tag{31}$$

donde

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{32}$$

Comparando con las expresiones obtenidas antes, encontramos

$$\begin{cases} T_{tt} = -k^{-1}C, \\ T_{rr} = -k^{-1}C, \\ T_{\theta\theta} = k^{-1}g_{\theta\theta}C, \\ T_{\varphi\varphi} = k^{-1}g_{\varphi\varphi}\,C. \end{cases} \tag{33}$$

Las componentes contravariantes son

$$\begin{cases} T^{tt} = -k^{-1}C, \\ T^{rr} = -k^{-1}C, \\ T^{\theta\theta} = \dfrac{k^{-1}C}{g_{\theta\theta}}, \\ T^{\varphi\varphi} = \dfrac{k^{-1}C}{g_{\varphi\varphi}}. \end{cases} \tag{34}$$

Para interpretar estos resultados en términos de una densidad de energía y de las componentes de la presión, debemos escribir las componentes del tensor T en una base ortonormal. Como en este caso la métrica es diagonal, eso es muy sencillo. Escrito por extenso, el tensor de energía-momento es

$$T = T^{tt}\,\vec{e}_t \otimes \vec{e}_t + T^{rr}\,\vec{e}_r \otimes \vec{e}_r + T^{\theta\theta}\,\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + T^{\varphi\varphi}\,\vec{e}_\varphi \otimes \vec{e}_\varphi. \tag{35}$$

La base ortonormal más evidente es

$$\hat{e}_t = \vec{e}_t, \qquad \hat{e}_r = \vec{e}_r, \qquad \hat{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \qquad \hat{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}. \tag{36}$$

Luego,

$$T = T^{tt}\,\hat{e}_t \otimes \hat{e}_t + T^{rr}\,\hat{e}_r \otimes \hat{e}_r + g_{\theta\theta}T^{\theta\theta}\,\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + g_{\varphi\varphi}T^{\varphi\varphi}\,\hat{e}_\varphi \otimes \hat{e}_\varphi. \tag{37}$$

En la base ortogonal resulta entonces

$$\begin{cases} T^{\hat{t}\hat{t}} = -k^{-1}C, \\ T^{\hat{r}\hat{r}} = -k^{-1}C, \\ T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = k^{-1}C, \\ T^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = k^{-1}C. \end{cases} \tag{38}$$

Recordando que

$$C = \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}, \tag{39}$$

vemos que tanto la densidad de energía como la presión radial son cantidades negativas. Esto hace que la creación de un agujero de gusano de este tipo requiera para su formación materia con propiedades exóticas.