Ejercicio. Considere un universo descripto por la métrica de Friedman-Robertson-Walker con $k = -1$ y sin constante cosmológica.

1. Obtener la densidad de energía ρ en función de a, considerando una ecuación de estado $p = \omega\ \rho$.
2. Obtenga el tiempo t en función de a para un universo en el que predomina la materia.
3. Suponga ahora que en el universo ya no predomina solo la materia, pero que $p = \omega\ \rho$ con $\omega \ll 1$. Escriba la ecuación de movimiento de a a primer orden en ω y luego proponga como solución $a(t) = a^{(0)}(t) + \omega\ a^{(1)}(t)$. Obtenga las ecuaciones que deben satisfacer $a^{(0)}$ y $a^{(1)}$ (siempre despreciando los términos de orden 2 en ω).

Solución. En el ítem 1, hay que usar la ecuación de conservación

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\ a^3\right) = -p\ \frac{d}{dt}a^3.$$

Si $p = \omega\ \rho$ entonces la solución está dada por

$$\rho\ a^{3\ (1+\omega)} = \rho_0\ a_0^{3\ (1+\omega)}.$$

En cuanto al ítem 2, conviene usar la ecuación de valores iniciales, que para $k = -1$ y sin constante cosmológica está dada por

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\ \pi\ G}{3\ c^2}\ \rho.$$

Despejando ρ en función de a de la ecuación de conservación se llega entonces a

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\ \pi\ G\ \rho_0}{3\ c^2}\ \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\ (1+\omega)},$$

o bien,

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} - 1 = \frac{a^2}{l^2}\ \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\ (1+\omega)},$$

donde

$$l = \sqrt{\frac{3\ c^4}{8\ \pi\ G\ \rho_0}}.$$

Conviene adimensionalizar el problema llamando

$$u = \frac{a}{a_0^3}\ l^2.$$

Queda entonces

$$\left(\frac{a_0^3\ \dot{u}}{c\ l^2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{a_0^3\ u}{l^2}\right)^2\ \frac{1}{l^2}\ \left(\frac{a_0\ l^2}{a_0^3\ u}\right)^{3\ (1+\omega)},$$

o bien

$$\left(\frac{a_0\ \dot{u}}{c\ u_0}\right)^2 - 1 = \left(\frac{u_0}{u}\right)^{3\ \omega}\ \frac{1}{u},$$

donde

$$u_0 = u(t_0) = \frac{a(t_0)}{a_0^3}\ l^2 = \frac{l^2}{a_0^2}.$$

Como predomina la materia, $\omega = 0$ y por ende

$$\frac{a_0\ \dot{u}}{c\ u_0} = \pm\sqrt{\frac{1}{u} + 1}.$$

Esto implica que

$$\frac{c\ u_0}{a_0}\ dt = \pm\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u} + 1}}$$

y por lo tanto

$$\frac{c\ u_0}{a_0}\ (t - t_0) = \left[\sqrt{\frac{1}{u} + 1}\ u - \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{1}{u} + 1}\right)\right] - \left[\sqrt{\frac{1}{u_0} + 1}\ u_0 - \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{1}{u_0} + 1}\right)\right].$$

Finalmente, en el ítem 3, en pimer lugar se tiene que

$$\left(\frac{u_0}{u}\right)^{3\ \omega} \simeq 1 - \ln\frac{u}{u_0}\ 3\ \omega$$

y por ende

$$\left(\frac{a_0\ \dot{u}}{c\ u_0}\right)^2 - 1 = \left(1 - 3\ \ln\frac{u}{u_0}\ \omega\right)\ \frac{1}{u}.$$

Como

$$a = a^{(0)} + \omega\ a^{(1)},$$

entonces

$$u = u^{(0)} + \omega\ u^{(1)}.$$

Luego,

$$\dot{u}^2 = \left(\dot{u}^{(0)} + \omega\ \dot{u}^{(1)}\right)^2 \simeq \left(\dot{u}^{(0)}\right)^2 + 2\ \omega\ \dot{u}^{(0)}\ \dot{u}^{(1)},$$

$$\ln\frac{u}{u_0} \simeq \ln\left(\frac{u^{(0)}}{u_0}\right),$$

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{1}{u^{(0)}}\ \left(1 - \omega\ \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}}\right),$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{a_0\ \dot{u}^{(0)}}{c\ u_0}\right)^2 + 2\ \left(\frac{a_0}{c\ u_0}\right)^2\ \omega\ \dot{u}^{(0)}\ \dot{u}^{(1)} - 1 \simeq \frac{1}{u^{(0)}}\ \left(1 - 3\ \ln\left(\frac{u^{(0)}}{u_0}\right)\ \omega\right)\ \left(1 - \omega\ \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}}\right)$$

y entonces

$$\left(\frac{a_0\ \dot{u}^{(0)}}{c\ u_0}\right)^2 - 1 + 2\ \left(\frac{a_0}{c\ u_0}\right)^2\ \omega\ \dot{u}^{(0)}\ \dot{u}^{(1)} \simeq \frac{1}{u^{(0)}}\ \left[1 - \omega\ \left(\frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} + 3\ \ln\left(\frac{u^{(0)}}{u_0}\right)\right)\right].$$

Esto implica que

$$\left(\frac{a_0\ \dot{u}^{(0)}}{c\ u_0}\right)^2 - 1 = \frac{1}{u^{(0)}}$$

como es de esperar y

$$2\ \left(\frac{a_0}{c\ u_0}\right)^2\ \dot{u}^{(0)}\ \dot{u}^{(1)} = -\frac{1}{u^{(0)}}\ \left(\frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} + 3\ \ln\left(\frac{u^{(0)}}{u_0}\right)\right).$$

De la primera de las ecuaciones se puede entonces obtener $u^{(0)}\,(t)$ (es la misma ecuación que antes pero con otra condición inicial ya que ahora $u^{(0)}\,(t_0) \neq u_0$) y reemplazando en la segunda se podría obtener $u^{(1)}\,(t)$. Esto se podría hacer analiticamente ya que la segunda ecuación es lineal y de orden 1, pero el hecho de no poder despejar $u^{(0)}$ en función de t de la ecuación de orden cero impide hacerlo.