Problema de formas

Consideremos una métrica FLRW espacialmente plana $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ en 4 dimensiones, y una 2-forma $F = -E(x)\ dt \wedge dx$ (expresada en el lenguaje de formas), donde $E(x)$ es una función suave de la coordenada espacial x. También se tomó $c = 1$.

(a) Calcule el dual de Hodge $*F$ expresado en el lenguaje de formas, y calcule sus componentes $(*F)_{\mu\nu}$. Calcule $F \wedge (*F)$ y escríbalo en términos del volumen métrico.

(b) Usando la ecuación de Maxwell en espacios curvos $d(*F) = 4\pi\ (*J)$, escriba cual es la forma $*J$ (dual de Hodge de la 1-forma corriente) que junto con F verifica dicha ecuación de Maxwell. ¿Puede que hayan componentes espaciales de la corriente no nulas? Discuta

Sugerencia: Para la última pregunta, no necesita calcular explícitamente un segundo dual de Hodge. Fíjese sólo si sobrevive una componente espacial usando que la métrica FLRW es diagonal.

Nota: Como $F_{ij} = 0 \iff \mathbf{B} = \mathbf{0}$ y $\partial_t E = 0$ en este problema, en *espacio plano* la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}$ nos dice que en dicha situación debe ocurrir que las componentes espaciales de la corriente sean nulas: $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

(c) Muestre que $dF = 0$. Para $E(x) = -C\ x^2$ (con C constante) en particular, encuentre dos 1-formas distintas $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$ tales que $F = d\tilde{A} = d\tilde{A}'$ (o sea que sirvan como cuadri-potencial), y la segunda debe ser tal que $A'_y \neq 0$. Finalmente, responda: ¿Existe una 1-forma $\tilde{\alpha}$ tal que $d\tilde{\alpha} = *F$?

Solución

Inciso a

Notar: $F_{01} = -F_{10} = -E(x)$ son las únicas componentes no nulas de F. Luego:

$$
\begin{aligned}
(*F)_{\mu_3\mu_4} &= \frac{1}{2}\ \sqrt{|g|}\ \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\ g^{\mu_1\nu_1}g^{\mu_2\nu_2}F_{\nu_1\nu_2} \\
&= \frac{1}{2}\ \sqrt{|g|}\ \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\ (g^{\mu_1 0}g^{\mu_2 1}F_{01} + g^{\mu_1 1}g^{\mu_2 0}F_{10}) \\
&= \frac{1}{2}\ \sqrt{|g|}\ \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\ (g^{\mu_1 0}g^{\mu_2 1} - g^{\mu_1 1}g^{\mu_2 0})\ F_{01} \\
&= \frac{1}{2}\ \sqrt{|g|}\ (\epsilon_{01\mu_3\mu_4}g^{00}g^{11} - \epsilon_{10\mu_3\mu_4}g^{11}g^{00})\ F_{01} \\
&= \frac{1}{2}\ \sqrt{|g|}\ 2\ \epsilon_{01\mu_3\mu_4}g^{00}g^{11}\ F_{01} \\
&= \epsilon_{01\mu_3\mu_4}\ \sqrt{|g|}\ g^{00}g^{11}\ F_{01} \\
&= \epsilon_{01\mu_3\mu_4}\ a^3(t)\ (-1)a^{-2}(t)\ (-E(x)) \\
&= +\epsilon_{01\mu_3\mu_4}\ a(t)\ E(x)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Luego, las únicas componentes no nulas son: $(*F)_{23} = -(*F)_{32} = a(t)\ E(x)$, y la 2-forma $*F$ es igual a:

$$
*\,F = a(t)\ E(x)\ dy \wedge dz \tag{2}
$$

Calculemos:

$$
F \wedge (*F) = -a(t)\ (E(x))^2\ dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \tag{3}
$$

Como el volumen métrico es $\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\ dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = a^3(t)\ dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$, entonces podemos expresar:

$$
F \wedge (*F) = -a^{-2}(t)\ (E(x))^2\ \tilde{\Omega} \tag{4}
$$

Inciso b

Ahora, calculemos el diferencial de $*F$, que es igual a:

$$
\begin{aligned}
d(*F) &= d(a(t)\ E(x)) \wedge dy \wedge dz \\
&= a(t)H(t)\ E(x)\ dt \wedge dy \wedge dz + a(t)\ \partial_x E(x) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Entonces, usando las ecuaciones de Maxwell $d(*F) = 4\pi\ *J$, se tiene:

$$
*\,J = \frac{1}{4\pi}a(t)H(t)\ E(x)\ dt \wedge dy \wedge dz + \frac{1}{4\pi}a(t)\ \partial_x E(x) dx \wedge dy \wedge dz \tag{6}
$$

Notemos que al hacer el dual de esta 3-forma, obtenemos (añadiendo también un cierto signo irrelevante por la propiedad de que $**$ es la identidad a menos de un cierto signo) una 1-forma $J = J_t dt + J_x dx$ que es la cuadricorriente (pues el dual de $dt \wedge dy \wedge dz$ es proporcional a dx y el dual de $dx \wedge dy \wedge dz$ es proporcional a dt, gracias a que la métrica es diagonal). En particular, J_x resulta proporcional a $H(t)$ y resulta en principio no nulo. El hecho de que el espacio no sea plano, no sea Minkowski (o sea que $H(t) \neq 0$) hace que pueda haber una componente espacial de la corriente J_x no nula aunque no haya campo magnético y el campo eléctrico sea estático. Vemos entonces una posible consecuencia de considerar ecuaciones de Maxwell en espacios curvos, aunque obviamente si la métrica sería estática teníamos que $J_i = 0$.

Inciso c

Es trivial ver que $dF = -\partial_x E(x)\ dx \wedge dt \wedge dx = 0$.

Si queremos $\tilde{A}$ tal que $d\tilde{A} = F$, se tiene: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Como la única componente no nula es la 01, entonces: $F_{01} = -E(x) = Cx^2 = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$. Podemos hallar una solución proponiendo $A_0 = 0$ (y también $A_2 = A_3 = 0$), y luego $Cx^2 = \partial_0 A_1$, y $A_1 = Cx^2 t$. Entonces, tenemos $\tilde{A} = A_1 dx = Cx^2 t\ dx$. También podríamos elegir $\tilde{A}' = \tilde{A} + d(C' y^3) = Cx^2 t\ dx + 3C'\ y^2\ dy$ con C' constante y $A'_y \neq 0$, luego trivialmente vale $d\tilde{A}' = d\tilde{A} = F$ pues $d^2(C' y^3) = 0$.

Como $d(*F) \neq 0$ (la calculamos en el anterior inciso), $*F$ no es cerrada, entonces no puede ser exacta: No existe una 1-forma $\tilde{\alpha}$ tal que $*F = d\tilde{\alpha}$.

Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020
Cátedra Ferraro
Parcial

1. Considere el espacio-tiempo tridimensional determinado por el siguiente intervalo[1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\varphi^2\,,\ f(r) = \frac{r^2}{\alpha^2} + b\,r - \mu\,, \tag{1}$$

donde α, b y μ son constantes con unidades de longitud, longitud^{-1} y longitud^0 respectivamente ($c = 1$) todas positivas. La coordenada radial cumple $r > r_+$ donde $r_\pm$ son las raíces de $f(r)$.

Se pide:

a) Hallar las constantes de integración asociadas a los vectores de Killing de la métrica.

b) Obtener la ecuación de movimiento de las geodésicas masivas y nulas y el potencial efectivo correspondiente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \text{const}\,, \tag{2}$$

donde el vector tangente cumple $\dfrac{dx_\mu}{d\lambda}\dfrac{dx^\mu}{d\lambda} = -\kappa$ con $\kappa = \{1, 0\}$ respectivamente. Diga en cada caso si es posible obtener órbitas no acotadas para valores arbitrarios de los parámetros α, b y μ.

c) En el caso de las geodésicas **nulas** diga si existen órbitas circulares y si son estables o no.

d) Para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ diga si existen geodésicas circulares **masivas** y si son estables o no.

e) Suponga que en $r = r_0$ está ubicado un observador **estacionario** y halle su cuadrivelocidad.

f) Si un observador **estacionario** ubicado en $r = r_{\rm em}$ le envía fotones a otro observador también **estacionario** ubicado en $r = r_{\rm rec}$, obtenga el cociente $\omega_{\rm rec}/\omega_{\rm em}$. ¿Cómo es el corrimiento de frecuencias según $r_{\rm rec} > r_{\rm em}$ ó $r_{\rm rec} > r_{\rm em}$?

Resultados

a) La métrica (1) no depende explícitamente de t ni de φ entonces ∂_t y ∂_φ son vectores de Killing. Las cantidades conservadas asociadas son

$$\begin{aligned} e &\equiv -g(\partial_t, \bar{U}) = f(r)\dot{t} = \text{const} \\ \ell &\equiv g(\partial_\varphi, \bar{U}) = r^2\dot{\varphi} = \text{const}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Esta métrica es solución de una teoría de gravedad modificada cuya acción tiene términos cuadráticos en la curvatura Oliva-Tempo-Troncoso 2009.

donde $\dot{x}^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$ con $\lambda = \tau$ para las geodésicas masivas y para las geodésicas nulas λ es tal que $\dfrac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu = (\omega, \vec{k})$ con $0 = k_\mu k^\mu = \omega^2 - |\vec{k}|^2$.

b) La ecuación de movimiento se obtiene de reemplazar (3) en

$$-\kappa = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 \,, \tag{4}$$

donde $\kappa = 1$ para partículas y $\kappa = 0$ para fotones.

Finalmente la ecuación de la geodésica es

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\kappa}{2}\left(\frac{r^2}{\alpha^2} + br\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b\ell^2}{r} - \frac{\mu\ell^2}{r^2}\right) = \frac{e^2 + \kappa\mu - \ell^2/\alpha^2}{2} \,. \tag{5}$$

Por lo tanto, el potencial efectivo es

$$2V(r) = \kappa\left(\frac{r^2}{\alpha^2} + br\right) + \left(\frac{b\ell^2}{r} - \frac{\mu\ell^2}{r^2}\right) \,. \tag{6}$$

Es fácil ver que para $r \to \infty$ tenemos que $V(r) \sim \kappa r^2/\alpha^2$, entonces las partículas masivas siempre tienen órbitas acotadas. Por otro lado, para las no-masivas tenemos que $V(r) \sim 1/r$ por cual tienen órbitas no-acotadas.

c) Para las geodésicas nulas el potencial efectivo se reduce a

$$2V(r) = \left(\frac{b\ell^2}{r} - \frac{\mu\ell^2}{r^2}\right) \,. \tag{7}$$

El gráfico cualitativo del potencial está en la figura (0.1).

Para hallar los puntos de equilibrio derivamos e igualamos a cero

$$V'(r) = -\frac{b\ell^2}{r^2} + \frac{2\mu\ell^2}{r^3} = 0 \,, \tag{8}$$

obteniendo que el radio de las órbitas circulares de fotones es

$$r_{\text{circ}} = \frac{2\mu}{b} \,. \tag{9}$$

Es fácil ver que $r_{\text{circ}} > r_+ = \frac{\alpha^2 b^2}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\mu/(\alpha^2 b^2)}\right) > 0$.

Derivando una segunda vez y evaluando en $r = r_{\text{circ}}$ vemos que

$$V''(r_{\text{circ}}) = \frac{2\ell^2}{r_{\text{circ}}^3}\left(b - \frac{3\mu}{r_{\text{circ}}}\right) = -\frac{b\ell^2}{r_{\text{circ}}^3} < 0 \,, \tag{10}$$

por lo cual la órbita es inestable. Esto también se ve fácil del gráfico del potencial efectivo (7).

d) Para las geodésicas masivas el potencial efectivo cuando $b = 0$ se reduce a

$$2V(r) = \frac{r^2}{\alpha^2} - \frac{\mu\ell^2}{r^2} \,. \tag{11}$$

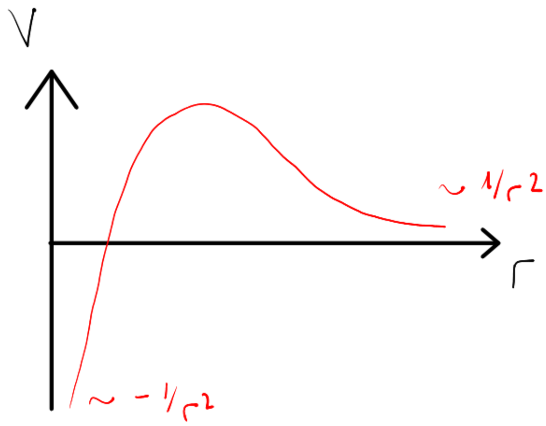

Figura 0.1: Potencial efectivo (7) de las geodésicas nulas ($\kappa = 0$).

El gráfico cualitativo del potencial está en la figura (0.2).

La derivada del potencial en este caso es

$$2V'(r) = \frac{2r}{\alpha} + \frac{2\mu\ell^2}{r^3}\,, \tag{12}$$

y no tiene solución para $r > r_+ > 0$ por lo tanto no hay órbitas circulares para partículas masivas cuando $b = 0$.

e) La cuadrivelocidad de un observador estacionario $x^i = \text{const}$ para $i = \{r, \varphi\}$ es

$$\bar{U} = U^t\,\partial_t = \dot{t}\,\partial_t\,. \tag{13}$$

Sabiendo que

$$\bar{U}\cdot\bar{U} = -1 \tag{14}$$

obtenemos que

$$\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{f(r_0)}} = \text{const}\,. \tag{15}$$

f) El tiempo propio de un observador estacionario en $r = r_0$ es

$$d\tau = \sqrt{f(r_0)}dt\,. \tag{16}$$

Si el emisor se encuentra en $r = r_{\text{em}}$ entonces

$$d\tau_{\text{em}} = \sqrt{f(r_{\text{em}})}dt\,. \tag{17}$$

Análogamente para el receptor ubicado en $r = r_{\text{em}}$

$$d\tau_{\text{rec}} = \sqrt{f(r_{\text{rec}})}dt\,. \tag{18}$$

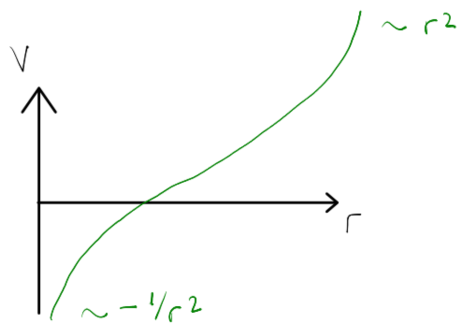

Figura 0.2: Potencial efectivo (7) de las geodésicas temporales (masivas) ($\kappa = 1$).

Como el espacio-tiempo es estático el dt entre los eventos de emisión de dos pulsos sucesivos y de recepción de dos pulsos sucesivos es el mismo.

Si $d\tau_{\text{em}}$ es el intervalo de tiempo propio entre dos pulsos sucesivos para el emisor y $d\tau_{\text{rec}}$ es el intervalo de tiempo propio entre dos pulsos sucesivos recibidos tenemos que

$$\frac{d\tau_{\text{em}}}{d\tau_{\text{rec}}} = \frac{\sqrt{f(r_{\text{em}})}}{\sqrt{f(r_{\text{rec}})}}\,, \tag{19}$$

y notando que $\omega = 2\pi/d\tau$ entonces

$$\frac{\omega_{\text{rec}}}{\omega_{\text{em}}} = \frac{\sqrt{f(r_{\text{em}})}}{\sqrt{f(r_{\text{rec}})}} \tag{20}$$

Si $r_{\text{em}} < r_{\text{rec}}$ entonces $\omega_{\text{rec}} < \omega_{\text{em}}$ y la frecuencia recibida está corrida al rojo ya que $f(r_{\text{em}}) < f(r_{\text{rec}})$. Por otro lado, si $r_{\text{em}} > r_{\text{rec}}$ entonces $\omega_{\text{rec}} > \omega_{\text{em}}$ y la frecuencia recibida está corrida al azul ya que $f(r_{\text{em}}) > f(r_{\text{rec}})$.

Otra forma de calcular esto es definiendo un sistema instantáneo localmente inercial para cada observador. La única componente relevante de tales SLI es la componente temporal $\bar{e}_{\hat{0}} = \bar{U}_{\text{obs}}$. Utilizando el resultado del inciso anterior tenemos que

$$\bar{e}_{\hat{0}} = \bar{U}_{\text{obs}} = \frac{1}{\sqrt{f(r_{\text{obs}})}}\,\partial_t\,,$$

y la frecuencia medida por cada observador es

$$\omega_{\text{med}} = -k_\mu(\bar{U}_{\text{obs}})^\mu\Big|_{r=r_{\text{obs}}}\,, \tag{21}$$

donde k^μ es el cuadrivector de onda del fotón.

Notando que el fotón se mueve a lo largo de una geodésica nula y que la cantidad conservada asociada el vector de Killing ∂_t es

$$e_{\text{fotón}} = -g_{t\nu}k^\nu = -k_0 = \text{const}\,, \tag{22}$$

entonces

$$\omega_{\text{med}} = -k_0 \frac{1}{\sqrt{f(r_{\text{obs}})}} \,. \tag{23}$$

Por lo tanto, el cociente de frecuencias $\omega_{\text{rec}} / \omega_{\text{em}}$ da el mismo resultado que antes (20).

■ Una partícula de prueba se mueve en una métrica de tipo FLRW:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \tag{1}$$

a) Introduzca la coordenada χ tal que

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2}. \tag{2}$$

Considere las geodésicas temporales de tipo radial. Encuentre las ecuaciones diferenciales de primer orden que satisfacen $t(\tau)$ y $\chi(\tau)$. *Ayuda*: use las leyes de conservación.

b) ¿Cuánto vale la magnitud de la velocidad física de la partícula medida por los observadores estáticos? El resultado debe quedar expresado en términos de su velocidad inicial v_0 y de la función $a(t)$, normalizada de modo tal que $a_0 = 1$ (las cantidades con subíndice cero indican los valores hoy). Esta velocidad se llama velocidad peculiar. Típicamente, las galaxias más cercanas (consideradas como partículas de prueba con velocidades iniciales distintas de cero) tienen velocidades peculiares del orden de los 100 km/s.

c) Suponiendo un universo espacialmente plano, cuya edad hoy es t_0, sin constante cosmológica, dominado en toda su historia por materia sin presión, y dada la normalización $a_0 = 1$, ¿cuál es la función $a(t)$? El resultado debe quedar expresado únicamente en función de t y t_0.

d) En este modelo del universo, dada una galaxia típica (partícula de prueba) que hoy tiene una velocidad peculiar de 100 km/s, ¿cuál era su velocidad peculiar cuando el universo tenía la mitad de su edad actual?

e) En este modelo, ¿qué ocurrirá con las velocidades peculiares de las galaxias cuando $t \to \infty$?

■ **Solución**. a) Para determinar las geodésicas radiales podemos omitir las variables angulares y trabajar con el intervalo

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2. \tag{3}$$

El lagrangiano correspondiente es

$$\mathcal{L}(t, \chi, \dot{t}, \dot{\chi}) = -\tfrac{1}{2}c^2 \dot{t}^2 + \tfrac{1}{2}a^2(t)\dot{\chi}^2. \tag{4}$$

El punto indica derivación respecto el tiempo propio τ. Tenemos dos constantes de movimiento. Puesto que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de χ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} = a^2(t)\dot{\chi} = A, \tag{5}$$

donde A es una constante. Esta es la ecuación diferencial de primer orden para χ. Por otro lado, debido a que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de τ, el mismo lagrangiano es una constante de movimiento, cuyo valor está fijado por la normalización de la cuadrivelocidad inicial

$$-c^2\dot{t}^2 + a^2(t)\dot{\chi}^2 = -c^2. \tag{6}$$

Combinando las dos ecuaciones de conservación encontramos una ecuación de primer orden para t,

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}\dot{\chi}^2} = \sqrt{1 + \frac{A^2}{a^2c^2}}. \tag{7}$$

b) Debido a que el tiempo coordenado coincide con el tiempo propio de los observadores estáticos, la velocidad física de una partícula en la métrica de FLRW es

$$v = \frac{d\ell}{dt} = a\frac{d\chi}{dt}. \tag{8}$$

Usando los resultados del *item* anterior encontramos

$$v = a\frac{d\chi}{dt} = a\frac{\dot{\chi}}{\dot{t}} = \frac{A/a}{\sqrt{1 + \dfrac{A^2}{a^2c^2}}}. \tag{9}$$

La constante A se encuentra fijando la condición $v(\text{hoy}) = v_0$. Un pequeño cálculo muestra entonces que

$$A = \gamma_0 v_0, \tag{10}$$

donde γ_0 es el factor relativista usual. Así resulta

$$v = \frac{\gamma_0 v_0}{\sqrt{a^2 + \gamma_0^2 v_0^2/c^2}}. \tag{11}$$

Dados los valores típicos de las velocidades peculiares, si a no es extremadamente pequeño, vale la aproximación no relativista

$$v \simeq \frac{v_0}{a}. \tag{12}$$

c) En un universo espacialmente plano dominado por materia, las dos ecuaciones de Friedmann son equivalentes a

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{13}$$

$$\rho a^3 = \text{constante}, \tag{14}$$

donde ρ es la densidad de masa. Fijando $a_0 = 1$ y definiendo ρ_0 como la densidad hoy, resulta

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}. \tag{15}$$

Entonces queda

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3a^3}. \tag{16}$$

Asumiendo que el universo se expande ($\dot{a} > 0$) debemos integrar la siguiente ecuación

$$\sqrt{a}\ \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}. \tag{17}$$

En $t = 0$ es $a = 0$. Luego,

$$a(t) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}\ t\right)^{2/3} \equiv (Ct)^{2/3}, \tag{18}$$

donde C es una constante que puede leerse fácilmente, aunque a los fines del problema no necesitamos escribirla, puesto que, como $a_0 = 1$, debe ser $C = 1/t_0$. Finalmente,

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \tag{19}$$

d) Cuando el universo tenía la mitad de su edad actual, el factor a valía

$$a\left(\tfrac{1}{2}t_0\right) = \frac{1}{2^{2/3}} \approx 0{,}63. \tag{20}$$

Luego, la velocidad peculiar de la galaxia era

$$v \approx 159 \text{ km/s}. \tag{21}$$

e) Debido a que en este modelo a aumenta monótonamente, las velocidades peculiares de las galaxias tienden a cero. Se entiende que este es un problema idealizado. La galaxia de la que estamos hablando no debe estar ligada a un grupo mayor de galaxias.