

Tercer Entrega - Problema 1 Resuelto

1. Orbitando alrededor de una estrella se encuentra una partícula en una geodésica órbita circular estable de radio $r_C > r_S = 2M$. En la misma coordenada radial r se encuentra un observador estacionario O_1 . Datos: M , r_C .

Se pide:

- a) Utilizando las cantidades conservadas $e \equiv -g(\partial_t, \bar{U}_C)$ y $\ell \equiv -g(\partial_\varphi, \bar{U}_C)$, donde \bar{U}_C es la 4-velocidad de la partícula en órbita circular, hallar su velocidad angular $\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ en función de r_S y r_C (Problema 4 de la Guía 6). Como resultado intermedio va a ser útil encontrar una expresión de ℓ en función de los datos M , r_C .
- b) Hallar la 3-velocidad de la partícula medida por el observador O_1 en función de datos. Para esto va a ser útil calcular la 4-velocidad del observador O_1 en términos de M , r_C y definir una base ortonormal asociada. ¿Es necesario hallar todos los elementos de la base?
- c) Hallar el período propio T de la órbita de la partícula, el período medido por un observador estacionario en infinito T_t y el período medido por el observador T_1 .

Resultados

- a) La ecuación de la geodésica para una partícula masiva en la geometría de Schwarzschild es

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} = \frac{e^2 - 1}{2}, \quad (1)$$

donde e y ℓ son las cantidades conservadas asociadas a los vectores de Killing ∂_t y ∂_φ respectivamente

$$\begin{aligned} e &\equiv -U_t = -g(\partial_t, \bar{U}) = -g_{tt} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \\ \ell &\equiv U_\varphi = g(\partial_\varphi, \bar{U}) = g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Donde se usó explícitamente que la órbita se da en el plano $\theta = \pi/2$. La ecuación (1) se obtiene de reemplazar las cantidades conservadas (2) en la condición $\bar{U} \cdot \bar{U} = -1$.

Sabiendo que $\dot{r} = 0$ para una órbita circular, la 4-velocidad de la partícula es

$$\bar{U}_C = \frac{e}{1 - 2M/r_C} \partial_t + \frac{\ell}{r_C^2} \partial_\varphi \quad (3)$$

Para hallar los radios de la órbitas circulares hay que hallar los extremos del potencial efectivo

$$V_{\text{eff}} = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3}, \quad (4)$$

derivando una vez respecto de r obtenemos

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{1}{r^4} (Mr^2 - \ell^2 r + 3M\ell^2). \quad (5)$$

En el caso de una órbita circular la expresión anterior se anula para $r = r_C$ y obtenemos una relación entre r_C , ℓ y M Si evaluamos

$$\ell^2 = \frac{Mr_C^2}{r_C - 3M} \quad (6)$$

donde $r_C = r_+$ es el radio de la órbita circular estable (hacer las suposiciones necesarias para que tal órbita exista).

Si bien no va a ser necesario para resolución de éste problema, es fácil obtener los radios de las órbitas circulares r_{\pm} resolviendo la ecuación (5)

$$r_{\pm} = \frac{\ell^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{\ell^2}} \right). \quad (7)$$

Como dijimos anteriormente, sabiendo que la órbita de la partícula es estable tenemos que $r_C = r_+$.

Por otro lado, evaluando $\ell = \ell(r_C, M)$ en la ecuación de la geodésica sabiendo que $\dot{r} = 0$ se tiene que

$$e^2 = \frac{(r_C - 2M)^2}{r_C(r_C - 3M)} \quad (8)$$

Definiendo la velocidad angular como

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{(1 - r_S/r_C) \ell}{r_C^2 e} \quad (9)$$

y reemplazando las expresiones $\ell = \ell(r_C, M)$ y $e = e(r_C, M)$ de (6) y (8) tenemos que

$$\Omega = \sqrt{\frac{M}{r_C^3}} \quad (10)$$

b) Un observador estacionario ubicado en $r = r_C$ tiene 4-velocidad

$$\bar{U}_1 = \left(1 - \frac{2M}{r_C} \right)^{-1/2} \partial_t, \quad (11)$$

esto se obtiene de la condición $\bar{U} \cdot \bar{U} = -1$ sabiendo que la única componente no-nula es la temporal.

Los elementos relevantes de base ortonormal asociada al observador son

$$\bar{e}_{\hat{0}} = \left(1 - \frac{2M}{r_C} \right)^{-1/2} \partial_t, \quad \bar{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \partial_{\varphi}, \quad (12)$$

y no vamos a necesitar los elementos $\bar{e}_{\hat{r}}$ y $\bar{e}_{\hat{\theta}}$.

Entonces, siguiendo la prescripción de mediciones realizadas por observadores del apunte Apunte SLI de Observadores la 3-velocidad medida por el observador O_1 es

$$v^{\hat{i}} = \frac{dx^{\hat{i}}}{dt} = \frac{\dot{x}^{\hat{i}}}{\dot{t}} \quad (13)$$

La componente relevante es la $\hat{\varphi}$

$$\begin{aligned} v_{\text{med}}^{\hat{\varphi}} &= \frac{\dot{x}^{\hat{\varphi}}}{\dot{t}} = \frac{r_C(\bar{U}_C \cdot \bar{e}_{\hat{\varphi}})}{-\bar{U}_C \cdot \bar{e}_{\hat{0}}} = \frac{r_C}{\sqrt{1 - r_S/r_C}} \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{r_C}{\sqrt{1 - r_S/r_C}} \frac{d\varphi}{dt} \\ v_{\text{med}}^{\hat{\varphi}} &= \sqrt{\frac{M}{(r_C - 2M)}}, \end{aligned} \quad (14)$$

donde se usó el resultado del ítem a).

También podemos pensar que el observador ubicado en $r = r_C$ mide intervalos temporales según

$$dt_1 = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_C}} dt, \quad (15)$$

y distancias a lo largo de la dirección angular φ según

$$d\varphi_1 = r_C d\varphi. \quad (16)$$

Entonces la velocidad que mide es

$$v_1 = \frac{d\varphi_1}{dt_1} = \frac{r_C}{\sqrt{1 - 2M/r_C}} \frac{d\varphi}{dt} \quad (17)$$

que es la misma expresión de antes. Notar que las expresiones (15) y (16) son equivalentes a definir los elementos de la base ortonormal $\partial_{t_1} = \bar{e}_{\hat{0}}$ y $\partial_{\varphi_1} = \bar{e}_{\hat{\varphi}}$ respectivamente.

Otra manera de obtener el mismo resultado es notar que la energía de una partícula con velocidad $|v|$ medida en el SLI instantáneamente en reposo junto al observador O_1 tiene la expresión que ya conocemos de Relatividad Especial

$$E_{\text{med SLI}} = m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - |v|^2}}. \quad (18)$$

Entonces la energía medida por un observador con 4-velocidad \bar{U}_1 es

$$E_{\text{med SLI}} = -\bar{p} \cdot \bar{U}_1 \quad (19)$$

donde $\bar{p} = m\bar{U}_C$. Entonces se tiene que

$$E_{\text{med SLI}} = \frac{me}{\sqrt{1 - 2M/r_C}} = \frac{m}{\sqrt{1 - |v|^2}}. \quad (20)$$

Reemplazando $e = e(r_C, r_S)$ se obtiene el mismo resultado.

- c) El período propio de la órbita de la partícula es el tiempo propio que le toma a la partícula completar una vuelta. Sabiendo que

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\ell}{r_C^2}, \quad (21)$$

integrando tenemos que

$$\Delta\tau = T = \frac{2\pi r_C^2}{\ell} = 2\pi r_C \sqrt{\frac{r_C - 3M}{M}}. \quad (22)$$

El período coordinado de la órbita se obtiene integrando el resultado del ítem a)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{M}{r_C^3}} \quad (23)$$

entonces

$$\Delta t = T_t = 2\pi \sqrt{\frac{r_C^3}{M}}. \quad (24)$$

Por último, el período medido por el observador O_1 se obtiene de integrar

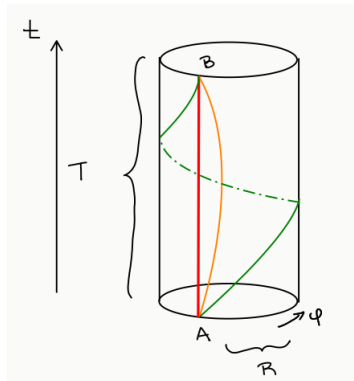
$$d\tau_1 = \sqrt{1 - 2M/r_C} dt \quad (25)$$

obteniendo

$$\Delta\tau_1 = T_1 = \sqrt{1 - 2M/r_C} T = 2\pi r_C \sqrt{\frac{r_C - 2M}{M}} \quad (26)$$

Notar que $T < T_t$ y $T_1 < T_t$ ya que el tiempo propio entre dos eventos es más corto cuando se está “más adentro” en el pozo de potencial.

Notemos que si bien **localmente** las geodésicas maximizan el tiempo propio, esto **puede no cumplirse globalmente**. Un ejemplo de ello es que $T < T_1$ donde el observador O_1 no está en una geodésica y la partícula sí. Otro ejemplo sencillo es el siguiente: consideremos un espacio cuyo intervalo es $ds^2 = -dt^2 + R^2d\varphi^2$ (similar a Minkowski con una coordenada compactificada a un círculo) como en la figura c). Consideremos dos eventos A y B cuya separación en la dirección t es $\Delta t_{AB} = T > 2\pi R$. Tenemos dos geodésicas temporales que unen dichos eventos: la curva roja a $\varphi = \text{const}$ y la curva verde que pega la vuelta alrededor del cilindro. El tiempo propio de la curva roja es $\Delta\tau_{\text{roja}} = T$. La curva verde tiene longitud temporal prácticamente nula ya que $\Delta t_{\text{verde}} = T$ y $\Delta\phi_{\text{verde}} = 2\pi$ entonces $\Delta\tau_{\text{verde}} = T - 2\pi R$. Si consideramos un pequeño apartamiento de la curva roja como por ejemplo la curva naranja ya no será una geodésica y tendrá menor tiempo propio que la curva roja pero perfectamente puede tener tiempo propio mayor a la curva verde¹.



¹Se agradece a Guillem por este simpático ejemplo.