Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020
Parcial (Cátedra Ferraro)

Resolver cada problema en hojas/documentos separadas/os justificando cada paso.

Enviar cada problema en un documento individual titulado **ApellidoProblema#** a **af.goya@gmail.com** con el asunto **RG Parcial**.

1. Considere una métrica FLRW espacialmente plana ($c = 1$)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) , \tag{1}$$

en 4 dimensiones, y una 2-forma

$$\tilde{F} = -E(x)\; dt \wedge dx \, , \tag{2}$$

donde $E(x)$ es una función suave de la coordenada espacial x.

a) Calcule el dual de Hodge $*\tilde{F}$ y diga cuales son sus componentes $(*F)_{\mu\nu}$. Exprese el resultado en el lenguaje de formas. Calcule $\tilde{F} \wedge (*\tilde{F})$ y escríbalo en términos del volumen métrico.

b) Usando la ecuación de Maxwell en espacios curvos $d(*\tilde{F}) = 4\pi\;(*\tilde{J})$, escriba cual es la forma $*\tilde{J}$ (dual de Hodge de la 1-forma corriente) que junto con $\tilde{F}$ verifica dicha ecuación de Maxwell. ¿Puede que hayan componentes espaciales de la corriente no nulas? Discuta.
Sugerencia: Para la última pregunta, no necesita calcular explícitamente un segundo dual de Hodge. Fíjese sólo si sobrevive una componente espacial usando que la métrica FLRW es diagonal.
Nota: Como $F_{ij} = 0 \iff \mathbf{B} = \mathbf{0}$ y $\partial_t E = 0$ en este problema, en Mikowski la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{J}$ nos dice que en dicha situación debe ocurrir que las componentes espaciales de la corriente sean nulas: $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

c) Muestre que $d\tilde{F} = 0$. Para $E(x) = -C\;x^2$ (con C constante) en particular, encuentre dos 1-formas distintas $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$ tales que $\tilde{F} = d\tilde{A} = d\tilde{A}'$ (o sea que sirvan como cuadri-potencial), y la segunda debe ser tal que $A'_y \neq 0$. Finalmente, responda: ¿Existe una 1-forma $\tilde{\alpha}$ tal que $d\tilde{\alpha} = *\tilde{F}$?

2. Considere el espacio-tiempo tridimensional determinado por el siguiente intervalo[1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\varphi^2\,,\ f(r) = \frac{r^2}{\alpha^2} + b\,r - \mu\,, \tag{3}$$

donde α, b y μ son constantes con unidades de longitud, longitud^{-1} y longitud^0 respectivamente ($c = 1$) todas positivas. La coordenada radial cumple $r > r_+$ donde $r_\pm$ son las raíces de $f(r)$.

Se pide:

a) Hallar las primeras integrales del movimiento libremente gravitante asociadas a los vectores de Killing de la métrica.

b) Obtener la ecuación de movimiento de las geodésicas masivas y nulas y el potencial efectivo correspondiente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \text{const}\,, \tag{4}$$

donde el vector tangente cumple $\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = -\kappa$ con $\kappa = \{1, 0\}$ respectivamente. Diga en cada caso si es posible obtener órbitas no acotadas para valores arbitrarios de los parámetros α, b y μ.

c) En el caso de las geodésicas **nulas** diga si existen órbitas circulares y si son estables o no.

d) Para $\mathbf{b = 0}$ diga si existen geodésicas circulares **masivas** y si son estables o no.

e) Suponga que en $r = r_0$ está ubicado un observador **estacionario** y halle su cuadrivelocidad.

f) Si un observador **estacionario** ubicado en $r = r_{\text{em}}$ le envía fotones a otro observador también **estacionario** ubicado en $r = r_{\text{rec}}$, obtenga el cociente $\omega_{\text{rec}}/\omega_{\text{em}}$. ¿Cómo es el corrimiento de frecuencias según $r_{\text{rec}} > r_{\text{em}}$ ó $r_{\text{rec}} > r_{\text{em}}$?

3. Una partícula de prueba se mueve en una métrica de tipo FLRW:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]. \tag{5}$$

a) Introduzca la coordenada χ tal que

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2}\,. \tag{6}$$

Considere las geodésicas temporales de tipo radial. Encuentre las ecuaciones diferenciales de primer orden que satisfacen $t(\tau)$ y $\chi(\tau)$. *Ayuda*: use las leyes de conservación.

[1] Esta métrica es solución de una teoría de gravedad modificada cuya acción tiene términos cuadráticos en la curvatura (Oliva-Tempo-Troncoso 2009).

b) ¿Cuánto vale la magnitud de la velocidad física de la partícula medida por los observadores estáticos? El resultado debe quedar expresado en términos de su velocidad inicial v_0 y de la función $a(t)$, normalizada de modo tal que $a_0 = 1$ (las cantidades con subíndice cero indican los valores hoy). Esta velocidad se llama velocidad peculiar. Típicamente, las galaxias (consideradas como partículas de prueba con velocidades iniciales dinstintas de cero) más cercanas tienen velocidades peculiares del orden de los 100 km/s.

c) Suponiendo un universo espacialmente plano, cuya edad hoy es t_0, sin constante cosmológica, dominado en toda su historia por materia sin presión, y dada la normalización $a_0 = 1$, ¿cuál es la función $a(t)$? El resultado debe quedar expresado únicamente en función de t y t_0.

d) En este modelo del universo, dada una galaxia típica (partícula de prueba) que hoy tiene una velocidad peculiar de 100 km/s, ¿cuál era su velocidad peculiar cuando el universo tenía la mitad de su edad actual?

e) En este modelo, ¿qué ocurrirá con las velocidades peculiares de las galaxias cuando $t \to \infty$?