Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020
Recuperatorio (Cátedra Ferraro)

Resolver cada problema en hojas/documentos separadas/os justificando cada paso.

Si no se inscribió previamente enviar mail a **af.goya@gmail.com** y **zanellaj@df.uba.ar** avisando que rinde el recuperatorio.

Enviar cada problema en un documento individual titulado **ApellidoProblema#** a **af.goya@gmail.com** y **zanellaj@df.uba.ar** con el asunto **RG Recuperatorio**.

1. Considere una superficie bidimensional Σ inmersa en el espacio-tiempo de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \,, \tag{1}$$

cuya parametrización es

$$\begin{aligned}
T(t,r) &= 2r_0 \left(\frac{r-r_0}{r}\right)^{1/2} \sinh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \,, \\
X(t,r) &= 2r_0 \left(\frac{r-r_0}{r}\right)^{1/2} \cosh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \,, \\
Y(t,r) &= \int^r \left(\frac{r_0}{r'} + \frac{r_0^2}{r'^2} + \frac{r_0^3}{r'^3}\right)^{1/2} dr' \,, \\
Z(t,r) &= r \,,
\end{aligned} \tag{2}$$

con r_0 una constante positiva.

Las coordenadas del espacio ambiente son $X^\mu = \{T\,, X\,, Y\,, Z\}$ y las coordenadas en la superficie Σ son $x^a = \{t\,, r\}$ con $r_0 < r < \infty$ y $-\infty < t < \infty$.

Se pide:

a) Obtener la métrica inducida g_{ab} en la superficie dada por la parametrización (2). *Ayuda*: el intervalo de la métrica inducida tiene la forma $ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2$.

b) Obtener los símbolos de Christoffel de la métrica inducida g_{ab}.

c) Considere la 1-forma

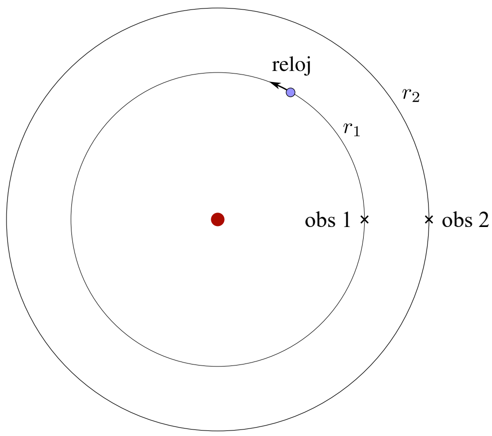
$$\tilde{A} = -\phi(r)\tilde{d}t + \alpha(t)\tilde{d}r \,, \tag{3}$$

en el espacio-tiempo de dos dimensiones de la métrica inducida del inciso a). Calcule la 2-forma $\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$ y su dual de Hodge $*\tilde{F}$. Escriba el producto exterior $\tilde{F} \wedge *\tilde{F}$ en términos de la forma de volumen $\tilde{\Omega}$. Exprese todos los resultados en lenguaje de formas diferenciales.

d) Calcule $\tilde{d}\tilde{F}$ y $\tilde{d}{*\tilde{F}}$. Exprese todos los resultados en lenguaje de formas diferenciales.

2. Un reloj de dimensiones despreciables (partícula de prueba) se mueve alrededor de un agujero negro. El movimiento tiene lugar sobre una geodésica circular de radio r_1 en la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) . \tag{4}$$



Nota: Todos los resultados deben quedar escritos en términos de los datos: r_1, r_2, r_S y ω_0. Si alguna de sus combinaciones se repite muchas veces, defínala con algún símbolo aparte. Por ejemplo, llame T al período de tiempo coordenado para la órbita del reloj, pero escriba al menos una vez cuánto vale T en términos de los datos del problema.

a) ¿Qué intervalo de tiempo $\Delta\tau$ mide el reloj luego de dar una órbita completa? (*Ayuda*: integre el tiempo propio. Será útil la generalización de la tercera ley de Kepler).

b) Según el reloj de un observador muy distante (no mostrado en la figura), ¿cuál es el período orbital del reloj?

c) Un observador estático ("obs 1" en la figura) se encuentra sobre la órbita del reloj orbitante. ¿Qué intervalo de tiempo $\Delta\tau_{\rm obs}$ mide el reloj de este observador entre dos pasos sucesivos del reloj orbitante?

d) Verificar que la relación entre $\Delta\tau$ y $\Delta\tau_{\rm obs}$ es la que predice la relatividad especial para observadores en movimiento relativo con una velocidad igual a la del reloj orbitante respecto de "obs 1".

e) El reloj orbitante emite luz de frecuencia ω_0 en su sistema propio. Hay un observador estático ("obs 2") en $r = r_2$, sobre el mismo plano en el que se mueve el reloj orbitante. El observador estático mide la frecuencia de la luz emitida por el reloj orbitante justo cuando **observa** que el centro del agujero negro, el reloj orbitante y él mismo están alineados. ¿Cuánto vale la frecuencia medida por "obs 2"? (*Ayuda*: recuerde el resultado general $\omega = -k^\mu U_\mu$).

f) ¿Puede descomponer el efecto neto del *item* anterior como una parte debida al *redshift* gravitatorio y otra debida al efecto Doppler de la relatividad especial?

3. Consideremos un universo descripto por una métrica FLRW plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dx^i dx^i\,, \tag{5}$$

(o sea $k = 0$; se suma en $i = 1, 2, 3$). La constante cosmológica es nula y la única fuente del tensor de energía-momento es un campo escalar ϕ, cuya dinámica está gobernada por un potencial $V(\phi)$. El tensor de energía-momento de dicho constituyente es igual a:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = (\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (\nabla_\rho\phi)(\nabla_\sigma\phi) - g_{\mu\nu} V(\phi)\,. \tag{6}$$

El campo escalar $\phi = \phi(t)$ sólo depende del tiempo (para respetar la simetría de homogeneidad espacial). Y consideramos $c = 1$.

a) Usando que $\phi = \phi(t)$ sólo depende de t, muestre que este constituyente se corresponde a un fluido ideal con densidad de energía y presión dadas por:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 + V(\phi)\,, \qquad p_\phi = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - V(\phi)\,, \tag{7}$$

respectivamente. *Sugerencia*: Recuerde cómo es U^μ en la carta comóvil (t, x^i) de FLRW.

b) Demuestre que la ecuación de conservación es equivalente a:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0\,, \tag{8}$$

donde $H \equiv \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble. Y muestre que las dos ecuaciones de Friedmann son equivalentes a:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)\,, \tag{9}$$

$$\dot{H} = -4\pi G\, \dot{\phi}^2\,. \tag{10}$$

c) Si queremos fabricarnos a partir de este modelo una expansión aproximadamente exponencial[1], el parámetro de Hubble debería ser aproximadamente constante, y en consecuencia necesitamos pedir

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1\,. \tag{11}$$

Al pedir esto ¿qué condición se impone sobre ϕ y $\dot{\phi}$? Luego muestre que pedir (11) implica

$$p_\phi \simeq -\rho_\phi\,, \tag{12}$$

y discuta con detalle por qué tiene sentido este resultado relacionándolo con un modelo cosmológico estudiado.

d) Muestre que las ecuaciones (8) y (9) siempre implican la ecuación (10). Luego, escriba una ecuación diferencial que involucre sólo a $\phi(t)$ y que determina toda la dinámica del problema.

[1] Esto se puede corresponder con un escenario de inflación.