Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2020
Cátedra Ferraro
Tercer Entrega de Ejercicios

1. Orbitando alrededor de una estrella se encuentra una partícula en una órbita circular estable de radio $r_C > r_S = 2M$. En la misma coordenada radial r se encuentra un observador estacionario O_1. Datos: M, r_C.

   Se pide:

   a) Utilizando las cantidades conservadas $e \equiv -g(\partial_t, \bar{U}_C)$ y $\ell \equiv -g(\partial_\varphi, \bar{U}_C)$, donde $\bar{U}_C$ es la 4-velocidad de la partícula en órbita circular, hallar su velocidad angular $\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ en función de r_S y r_C (Problema 4 de la Guía 6). Como resultado intermedio va a ser útil encontrar una expresión de ℓ en función de los datos M , r_C.

   b) Hallar la 3-velocidad de la partícula medida por el observador O_1 en función de datos. Para esto va a ser útil calcular la 4-velocidad del observador O_1 en términos de M, r_C y definir una base ortonormal asociada. ¿Es necesario hallar todos los elementos de la base?

   c) Hallar el período propio T de la órbita de la partícula, el período medido por un observador estacionario en infinito T_t y el período medido por el observador T_1.

2. Considere un universo descripto por la métrica de Friedman-Robertson-Walker con $k = -1$ y sin constante cosmológica.

   a) Obtener la densidad de energía ρ en función de a, considerando una ecuación de estado $p = \omega\rho$.

   b) Utilizando las ecuaciones de Friedman obtenga el tiempo t en función de a para un universo en el que predomina la materia.

   c) Suponga ahora que en el universo ya no predomina solo la materia, pero que $p = \omega\rho$ con $\omega \ll 1$. Escriba la ecuación de movimiento de a a primer orden en ω y luego proponga como solución $a(t) = a^{(0)}(t) + \omega a^{(1)}(t)$. Obtenga las ecuaciones que deben satisfacer $a^{(0)}$ y $a^{(1)}$ (siempre despreciando los términos de orden 2 en ω).