01/09 Guía 3 – Clase 1:
Vectores & 1-Formas.
Bases de Vectores & 1-Formas.

Vectores. Repaso

Un vector $\vec{V}$ tangente a una curva $\vec{\gamma}$ en un punto p, de una variedad M, es una derivada direccional en p (operador $\vec{V}$ actuando sobre funciones y escalares numéricos).

Por M:

$$\vec{V}: M \to \mathbb{R}$$
$$\vec{V}: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$\vec{V}: \{\vec{\gamma}(t)\} \to \mathbb{R}$$

Podemos escribir:

$$\vec{V}(f) = \frac{df}{dt}\Big|_p \quad \forall f \in C^\infty$$

Si la variedad está dotada de coordenadas $\{x^\mu\}$:

$$\forall \mu = 0 \dots n$$

$$\Rightarrow \vec{V}(f) = \frac{df}{dt}\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\Big|_p \quad \forall f$$

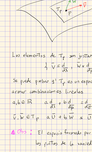
$$\Rightarrow \vec{V} = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\Big|_p}_{\text{componentes}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{\text{base de vectores (coordenadas / holonomas)}}$$

Un vector arbitrario sobre una variedad se puede descomponer:

Def 1.1: En general vamos a trabajar con campos vectoriales, es decir, si p pertenece a la variedad M, $\vec{V}(p)$ es un vector tangente a M en p.

Def 1.2: El espacio tangente T_pM es el conjunto de todos los vectores tangentes en un punto p de M. Forman un espacio vectorial. Acotamos:

Espacio tangente T_p



Los elementos de T_p son justamente los vectores tangentes.

$$\{\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}\} \in T_pM$$

Si pedí, pidan $\vec{U}$ y $\vec{W}$ son un espacio vectorial. El dominio es poder sumar combinaciones lineales.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \vec{V} + \vec{U} \in T_pM \\ \lambda\vec{V} \in T_pM \end{cases}$$

$$\forall \vec{V}, \vec{U}, \vec{W} \in T_pM, \quad \lambda, \theta \in \mathbb{R} \quad \vec{W} \in T_p$$

Def 1.3: El espacio cotangente T_p^*M es el espacio de formas que $\vec{V} \in T_pM$ $\{\vec{V}\}$ $\{\vec{U}\}$ $\{\vec{W}\}$ $\{\vec{\gamma}\}$ $\{\vec{\gamma}\}$ $\{\vec{\gamma