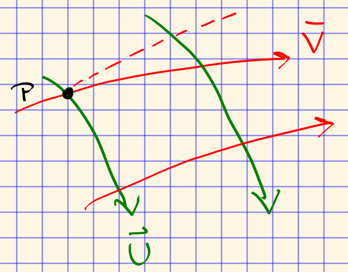
14/09/21 Guía 3 Clase 5 : Derivada de Lie

Repaso

Ya introdujimos la derivada exterior q' nos permite derivar p-formas y obtener como resultado una (p+1)-forma. Pero estamos restringidos a actuar sobre tensores completamente antisimétricos. Se puede definir una nueva derivada, llamada de Lie, q' actúa sobre tensores y nos devuelve tensores del mismo rango. Todo esto sin tener q' introducir nuevas estructuras sobre la variedad.

En la clase teórica fue presentado mediante el arrastre/transporte/dragueo de vectores a lo largo de las curvas integrales de otro campo vectorial.



$$\mathcal{L}_V U = [V, U] = -[U, V] = -\mathcal{L}_U V$$

(ver Carroll Apéndices A y B p/ otra forma de introducir $\mathcal{L}_V$ si están MUY manijas de geom. dif.)

Propiedades de la derivada de Lie

1) $\mathcal{L}_V$ preserva el rango del tensor, si $T \in T^r_s(M) \Rightarrow \mathcal{L}_V T \in T^r_s(M)$

2) $\mathcal{L}_V$ actúa linealmente sobre tensores

$$\mathcal{L}_V(aT + bS) = a\,\mathcal{L}_V T + b\,\mathcal{L}_V S \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

3) $\mathcal{L}_V$ preserva contracciones

$$\mathcal{L}_V(\alpha(U)) = (\mathcal{L}_V \alpha)(U) + \alpha(\mathcal{L}_V U)$$

4) $\mathcal{L}_V$ cumple la regla de Leibniz actuando sobre tensores

$$\mathcal{L}_V(T \otimes S) = \mathcal{L}_V T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_V S$$

5) p/ $f \in \Omega^0(M)$

$$\mathcal{L}_V f = V(f) \underset{\text{coords}}{=} V^i \partial_i f$$

6) p/ $U \in TM$

$$\mathcal{L}_V U = [V, U]$$

A partir de (3) podemos deducir cómo actúa $\mathcal{L}_V$ sobre una 1-forma

$$\underbrace{\mathcal{L}_V(\underbrace{\alpha(U)}_{\checkmark})}_{\checkmark} = \underbrace{(\mathcal{L}_V \alpha)}_{?}(U) + \underbrace{\alpha(\underbrace{\mathcal{L}_V U}_{\checkmark})}_{\checkmark}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathcal{L}_V \alpha)(U) = \mathcal{L}_V(\alpha(U)) - \alpha(\mathcal{L}_V U) = \mathcal{L}_V(\alpha(U)) + \alpha(\mathcal{L}_U V)$$

Utilizando una base coordenada y eligiendo $U = \partial_i$ tenemos q'

$$(\mathcal{L}_{\partial_i} V)^j = \partial_i V^j \quad , \quad \alpha(\partial_i) = \alpha_i \quad , \quad (\mathcal{L}_V \alpha)(\partial_i) = (\mathcal{L}_V \alpha)_i$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{(\pounds_V \alpha)_i = V^j \partial_j \alpha_i + \alpha_j \partial_i V^j}$$

Con un procedimiento análogo se puede obtener la expresión en componentes de la derivada de Lie de un tensor $\binom{r}{s}$

Problema (18)

Calcular el transporte de Lie del vector $V = \partial_x$ en el punto $p = (x=1, y=0)$ a lo largo de los campos vectoriales

a) $U = \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ b) $U = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$

Se dice q' un vector V es "Lie transportado" (Lie dragged) por otro vector $\vec{U}$ si se cumple q' $\pounds_U V = [V, U] = 0$. Si esto sucede, el transporte/arrastre/drageo es a lo largo de las mismas curvas integrales de los campos vectoriales

a) Queremos calcular $\pounds_U V = \pounds_{\partial_\theta} V$ con $V(p) = \partial_x$

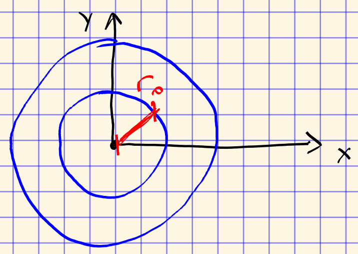
Curvas integrales de $U = \partial_\theta$

$$U = U^i \partial_i = \frac{dx^i}{d\lambda}\partial_i \Rightarrow \frac{dx^i}{d\lambda} = U^i \quad \text{ec diff p/ las curvas integrales}$$

en base coordenada polar $\{\partial_r, \partial_\theta\}$ tenemos q'

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0 \ , \ \frac{d\theta}{d\lambda} = 1 \Rightarrow r(\lambda) = r_0 = \text{const} \ , \ \theta(\lambda) = \lambda + \theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_\lambda : (r_0, \theta_0 + \lambda)}$$



Cuál es el V tal q' $[U, V] = 0$? $V = V^r \partial_r + V^\theta \partial_\theta$

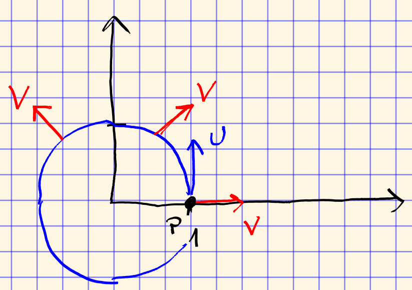
$$\Rightarrow \quad [\partial_\theta, V] = \partial_\theta V^r \partial_r + \partial_\theta V^\theta \partial_\theta = 0 \Rightarrow \partial_\theta V^r = 0 \ , \ \partial_\theta V^\theta = 0$$

notar q' $V(\partial_\theta) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V^r(\theta) = \text{const} \ , \ V^\theta(\theta) = \text{const}}$$

Recordemos q' tenemos una condición inicial: en $p = (1, 0)$ $V = \partial_x$

$$\Rightarrow \quad V^r(p) = 1 \ , \ V^\theta(p) = 0 \Rightarrow \boxed{V = \partial_r}$$



Notemos q' U y sus curvas integrales nos permiten definir una familia de difeomorfismos (cambios de coordenadas)

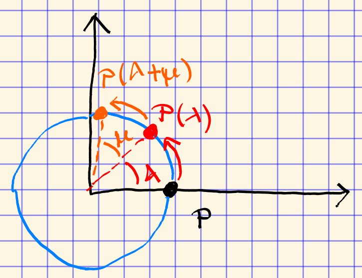
$$U = \partial_\theta \;\rightsquigarrow\; \frac{dx^i}{d\lambda} = U^i \;\rightsquigarrow\; \frac{dr}{d\lambda} = 0, \;\; \frac{d\theta}{d\lambda} = 1$$

Entonces, dado un punto $p = (r_0, \theta_0)$ podemos moverlo usando un mapa asociado a las curvas integrales de U

$$p \longrightarrow \phi_\lambda(p)$$

$$(r_0, \theta_0) \longmapsto (r(\lambda), \theta(\lambda)) = (r_0, \theta_0 + \lambda)$$

Notemos q' $\quad \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\mu+\lambda} \rightsquigarrow (r_0, \theta_0) \longmapsto (r_0, \theta_0 + \lambda + \mu)$



(ver Carroll Apéndices A y B)

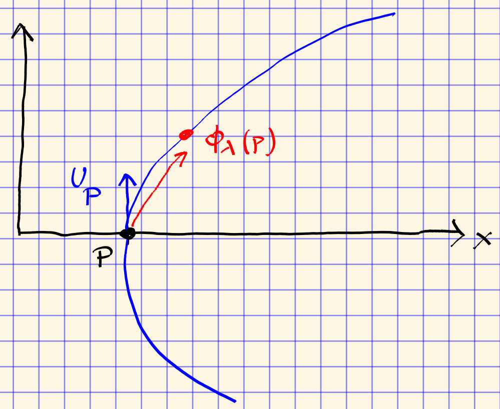
b) $U = y\,\partial_x + x\,\partial_y \;\rightsquigarrow\;$ curvas integrales q' pasen por $(1,0)$

$$U = \frac{d}{d\lambda} = U^i \partial_i = \frac{dx^i}{d\lambda}\partial_i \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = U^x = y \;,\; \frac{dy}{d\lambda} = U^y = x$$

$$\Rightarrow \frac{dx^2}{d\lambda^2} = x, \;\; \frac{d^2y}{d\lambda^2} = y \;\Rightarrow\; \boxed{x(\lambda) = A\,\mathrm{ch}(\lambda + \lambda_0) \;,\; y(\lambda) = A\,\mathrm{sh}(\lambda + \lambda_0)}$$

tiene q' pasar por $p = (1,0) \Rightarrow A = 1$

$$\boxed{\gamma_\lambda : (x(\lambda), y(\lambda)) = (\mathrm{ch}\,\lambda, \mathrm{sh}\,\lambda)}$$



Esto tmb se puede pensar como un difeomorfismo uniparamétrico

$$p \longrightarrow \phi_\lambda(p)$$

$$(1,0) \longmapsto (\mathrm{ch}(\lambda), \mathrm{sh}(\lambda))$$

Un poco más general, A_0 y λ_0 tal q' la curva integral pase por (x_0, y_0)

$$\Rightarrow (x_0, y_0) = (A_0\,\mathrm{ch}\,\lambda_0, A_0\,\mathrm{sh}\,\lambda_0) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 - y_0^2} \;,\; \lambda_0 = \mathrm{arctgh}(y_0/x_0)$$

si ahora "avanzamos" $\Delta\lambda$ desde λ_0

$$(x', y') = (A_0 \underbrace{\mathrm{ch}(\lambda_0 + \Delta\lambda)}_{\mathrm{ch}\,\lambda_0\,\mathrm{ch}\,\Delta\lambda + \mathrm{sh}\,\lambda_0\,\mathrm{sh}\,\Delta\lambda}, A_0 \underbrace{\mathrm{sh}(\lambda_0 + \Delta\lambda)}_{= \mathrm{sh}\,\lambda_0\,\mathrm{ch}\,\Delta\lambda + \mathrm{ch}\,\lambda_0\,\mathrm{sh}\,\Delta\lambda})$$

$$\Rightarrow (x', y') = (\mathrm{ch}\,\Delta\lambda\; x_0 + \mathrm{sh}\,\Delta\lambda\; y_0 \;,\; \mathrm{sh}\,\Delta\lambda\; x_0 + \mathrm{ch}\,\Delta\lambda\; y_0)$$

En forma matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\Delta\lambda & \mathrm{sh}\,\Delta\lambda \\ \mathrm{sh}\,\Delta\lambda & \mathrm{ch}\,\Delta\lambda \end{pmatrix}}_{\text{transf de Lorentz (boost)}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

Δ Les resta hallar V tal q: $\mathcal{L}_U V = [U, V] = 0$

$$[U,V]^i = U^j \partial_j V^i - V^j \partial_j U^i = \frac{d}{d\lambda} V^i - V^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} = 0 \rightsquigarrow \text{ec diff}$$

$U = \frac{d}{d\lambda}$