Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 10

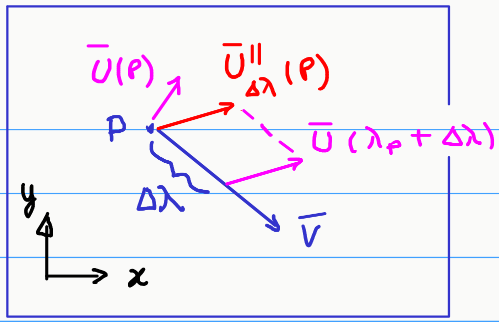
Derivada covariante. Conexión.
Autoparalelas. Coordenadas normales de Riemann

Derivada covariante

Aunque la derivada de Lie permite derivar todo tipo de tensores no es una buena derivada direccional, porque el vector $\bar{V}$ que da la dirección de derivación aparece también derivado. Esto es así porque el procedimiento del dragueo de Lie requiere del comportamiento de $\bar{V}$ no sólo en el punto P sino en un entorno del mismo. En particular, la derivada de Lie de un vector en la dirección de sí mismo se anula; es decir que la idea de cuadriaceleración como derivada de la cuadrivelocidad en la dirección de sí misma (a lo largo de la línea de universo de la partícula) no podría ser capturada con la derivada de Lie. Esto muestra que la variedad diferenciable tendrá que incorporar una estructura adicional para poder definir una buena derivada direccional de tensores.

Transporte paralelo. Conexión afín

El dragueo de Lie surge de la necesidad de definir un representante en el punto P del vector $\bar{U}$ en el punto desplazado, $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$, para resolver la cuestión de la imposibilidad de restar vectores pertenecientes a espacios tangentes diferentes. En los espacios euclidianos y pseudo-euclidianos esa cuestión se resuelve de otra manera, pues existe una estructura geométrica adicional que permite definir el transporte paralelo de vectores. Esos espacios admiten cartas cartesianas globales, en las que el tensor métrico es diagonal de componentes ± 1; el transporte paralelo consiste en definir el representante de $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$ en P como el vector $\bar{U}^{\parallel}_{\Delta\lambda}(P)$ que tiene las mismas componentes cartesianas que $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$. Pero en una variedad diferenciable no contamos con esa estructura geométrica; por lo tanto veremos qué se necesita para lograr una derivada donde $\bar{V}$ participe sólo para dar la dirección de derivación.
La estructura que introduciremos no es la métrica sino la conexión afín, y será equivalente a una regla para el transporte paralelo de vectores en la variedad.



Transporte paralelo en una geometría euclidiana

La derivada covariante que vamos a introducir es una derivada direccional de vectores indicada con el símbolo ∇. Como para toda derivada, se requiere que

i) $\nabla_{\bar V}(\bar U+\bar W) = \nabla_{\bar V}\bar U + \nabla_{\bar V}\bar W \in T_P$ linealidad

ii) $\nabla_{\bar V}(f\bar U) = (\nabla_{\bar V} f)\,\bar U + f\,\nabla_{\bar V}\bar U = \bar V(f)\,\bar U + f\,\nabla_{\bar V}\bar U$ Leibniz

Para que no aparezcan derivadas de $\bar V$ además requeriremos

iii) $\nabla_{f\bar V}\bar U = f\,\nabla_{\bar V}\bar U$

Sean $\bar V = V^a\bar E_a$, $\bar U = U^b\bar E_b$. Entonces:

$$\nabla_{\bar V}\bar U = \nabla_{\bar V}(U^b\bar E_b) \underset{(i)\ y\ (ii)}{=} \bar V(U^b)\,\bar E_b + U^b\,\nabla_{\bar V}\bar E_b =$$

$$\underset{(iii)}{=} \bar V(U^b)\,\bar E_b + U^b V^a\,\nabla_{\bar E_a}\bar E_b$$

Del resultado lo único desconocido, por falta de transporte paralelo, es $\nabla_{\bar E_a}\bar E_b$. El resultado debe ser un vector, y podrá expresarse como combinación de los vectores de la base. Entonces definimos

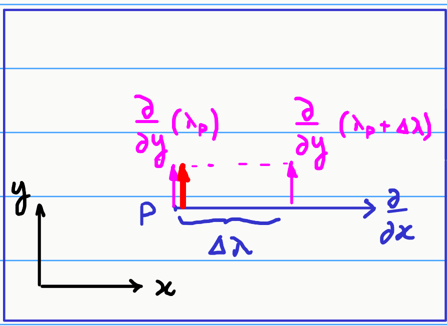
$$\boxed{\nabla_{\bar E_a}\bar E_b \doteq \Gamma^c_{ba}\,\bar E_c}$$

Las funciones Γ^c_{ab} son las componentes de un objeto geométrico que no es un tensor sino que es una conexión afín. En efecto, no puede tratarse de un tensor porque el primer término en $\nabla_{\bar V}\bar U$ no tiene carácter vectorial; así la conexión compensa el mal comportamiento de ese primer término para que el resultado sea un vector.

Ahora que tenemos una derivada covariante podemos decir que el vector paralelo-transportado que representa a $\bar U(\lambda_P + \Delta\lambda)$ en $\mathbb{T}_P$ es (despejando del cociente incremental):

$$\bar U^{\parallel}_{\Delta\lambda}(P) = \bar U(P) + \Delta\lambda\, \nabla_{\bar V}\bar U(P) + \mathcal{O}(\Delta\lambda^2)$$

Si $\nabla_{\bar V}\bar U = 0$, $\bar U$ se dice transportado paralelamente en la dirección de $\bar V$ (del mismo modo que decimos que $\bar U$ es Lie-dragueado por $\bar V$ si $\pounds_{\bar V}\bar U = 0$).



En un espacio euclidiano los Γ^k_{ij} se anulan en la carta cartesiana. La noción natural de paralelismo en ese espacio es tal que los vectores de la base cartesiana se transportan paralelamente unos en la dirección de los otros.

Mientras que la anulación de un tensor en un punto P es un hecho absoluto, independiente de la base (si las componentes de un tensor se anulan en una base entonces se anulan en cualquier base), no sucede lo mismo con las componentes de una conexión que, como dijimos, es un objeto geométrico de otra naturaleza. Veamos cómo se transforman los Γ^c_{ab} ante cambio de base.

De la definición de la conexión, $\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b \doteq \Gamma^c_{ba}\, \bar{E}_c$, tenemos que $\Gamma^c_{ab} = \langle \tilde{E}^c, \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a \rangle$. Entonces, reemplazando en términos de otra base

$$\Gamma^c_{ab} = \langle \tilde{E}^c, \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a \rangle = \langle \Lambda^c{}_{c'} \tilde{E}^{c'}, \nabla_{\Lambda^{b'}{}_b \bar{E}_{b'}} (\Lambda^{a'}{}_a \bar{E}_{a'}) \rangle$$

$$= \Lambda^c{}_{c'} \langle \tilde{E}^{c'}, \Lambda^{b'}{}_b \nabla_{\bar{E}_{b'}} (\Lambda^{a'}{}_a \bar{E}_{a'}) \rangle$$

$$= \Lambda^c{}_{c'} \langle \tilde{E}^{c'}, \Lambda^{b'}{}_b \left(\bar{E}_{b'}(\Lambda^{a'}{}_a)\, \bar{E}_{a'} + \Lambda^{a'}{}_a \nabla_{\bar{E}_{b'}} \bar{E}_{a'} \right) \rangle$$

$$= \Lambda^c{}_{c'} \langle \tilde{E}^{c'}, \bar{E}_b(\Lambda^{a'}{}_a)\, \bar{E}_{a'} + \Lambda^{b'}{}_b \Lambda^{a'}{}_a \Gamma^{d'}_{a'b'} \bar{E}_{d'} \rangle$$

$$\boxed{\Gamma^c_{ab} = \Lambda^c{}_{c'} \left(\bar{E}_b(\Lambda^{c'}{}_a) + \Lambda^{a'}{}_a \Lambda^{b'}{}_b \Gamma^{c'}_{a'b'} \right)}$$

El segundo término es tensorial, pero el primer término no lo es. Aunque la conexión se anule en una base, no se anula en la otra.

▷ En bases coordenadas resulta:

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \Gamma^{k'}_{i'j'} \right)}$$

▷ Las componentes de la conexión en base coordenada se llaman símbolos de Christoffel.

▷ Nótese que $\Gamma^k_{[ij]}$ transforma como las componentes de un tensor. Esto significa que existe un tensor, que veremos luego y se llama torsión, cuyas componentes en una base coordenada son

$$\boxed{T^i{}_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}}$$

Como Γ^i_{jk} no es tensorial, las componentes de la torsión en base anholónoma no se ven como $2\,\Gamma^a_{[bc]}$. Por otro lado, la transformación de la conexión también muestra que la diferencia de dos conexiones tiene carácter tensorial.

Usamos la expresión $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ para el vector que corresponde a derivar $\bar{U}$ en la dirección de $\bar{V}$. Hemos escrito ese vector como

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{U} = \underbrace{\bar{V}(U^b)\,\bar{E}_b} + U^b\, V^a \, \nabla_{\bar{E}_a}\bar{E}_b \longrightarrow \Gamma^c_{ba}\,\bar{E}_c$$

$$\bar{V}(U^c)\,\bar{E}_c = V^a\,\bar{E}_a(U^c)\,\bar{E}_c$$

$$\boxed{\nabla_{\bar{V}}\bar{U} = V^a\left(\bar{E}_a(U^c) + \Gamma^c_{ba}\,U^b\right)\bar{E}_c}$$

Vemos que el vector $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ puede verse como la contracción de $\bar{V}$ con un tensor de tipo $\binom{1}{1}$ que llamaremos derivada covariante (a secas) ∇U cuyas componentes son

$$\boxed{(\nabla\bar{U})^c{}_a \doteq \bar{E}_a(U^c) + \Gamma^c{}_{ba}\,U^b}$$

En base coordenada es

$$(\nabla\bar{U})^i{}_j \doteq \frac{\partial U^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{kj}\,U^k = U^i{}_{,j} + \Gamma^i{}_{kj}\,U^k \underset{\text{notación}}{\equiv} U^i{}_{;j}$$

que es la notación utilizada para la derivada covariante en los textos clásicos.

La derivada covariante puede extenderse a tensores de cualquier tipo. Ya hemos usado que $\nabla_{\bar{V}} f = \bar{V}(f) = \langle \tilde{d}f, \bar{V}\rangle$; es decir que la derivada covariante a secas de una 0-forma f es

$$i) \quad \nabla f \doteq \tilde{d}f$$

Definiremos la derivada covariante de una 1-forma valiéndonos de la regla de Leibniz:

ii) $\nabla_{\bar{V}}(A \otimes B) = (\nabla_{\bar{V}} A) \otimes B + A \otimes (\nabla_{\bar{V}} B)$, A, B tensores de cualquier tipo

iii) pediremos que la derivada covariante conmute con contracciones:

$$\nabla_{\bar{V}} \langle \tilde{\alpha}, \bar{U} \rangle = \langle \nabla_{\bar{V}} \tilde{\alpha}, \bar{U} \rangle + \langle \tilde{\alpha}, \nabla_{\bar{V}} \bar{U} \rangle$$

Así, para la contracción $\langle \tilde{E}^c, \bar{E}_a \rangle = \delta^c_a$ tenemos

$$0 = \langle \nabla_{\bar{E}_b} \tilde{E}^c, \bar{E}_a \rangle + \langle \tilde{E}^c, \underbrace{\nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a}_{\Gamma^d_{ab} \bar{E}_d} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_{\bar{E}_b} \tilde{E}^c, \bar{E}_a \rangle = -\Gamma^c_{ab} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla_{\bar{E}_b} \tilde{E}^c = -\Gamma^c_{ab} \tilde{E}^a}$$

Conociendo las derivadas covariantes de la base dual, es inmediato calcular la derivada covariante de cualquier tensor usando la regla de Leibniz.
En una base coordenada, la derivada covariante de una 1-forma es

$$\boxed{(\nabla \tilde{\alpha})_{ij} = \alpha_{i,j} - \Gamma^k_{ij} \alpha_k \equiv \alpha_{i;j}}$$

La derivada covariante en la dirección de $\bar{V}$ es $(\nabla_{\bar{V}} \tilde{\alpha})_i = V^j \alpha_{i;j}$

Para un tensor de tipo arbitrario derivaremos cada $\bar{E}_a$ y cada $\tilde{E}_b$:

$$\boxed{\begin{aligned} T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l;m} = {} & T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l,m} + \Gamma^{i}_{nm} T^{n\cdots j}{}_{k\cdots l} + \{\text{todos los índices contravariantes}\} \\ & - \Gamma^{n}_{km} T^{i\cdots j}{}_{n\cdots l} - \{\text{todos los índices covariantes}\} \end{aligned}}$$

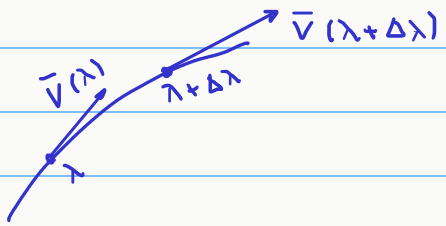
Un tensor T se dice transportado paralelamente en la dirección de $\bar{V}$ si $\nabla_{\bar{V}} T = 0$.

Ejercicio: mostrar que $T_{[ij];k} = (T_{[ij]})_{;k}$ (la derivada covariante conmuta con la simetrización y la antisimetrización).

Curvas autoparalelas

En un espacio euclidiano existen curvas privilegiadas, las rectas, que poseen dos propiedades: realizan la distancia más corta entre dos puntos y son "autoparalelas" en el sentido que su vector tangente se transporta paralelamente a lo largo de la recta. No estamos aún en condiciones de reproducir la primera propiedad, porque no tenemos una noción de distancia en la variedad. Pero podemos reproducir la segunda propiedad, pues ya tenemos una noción de paralelismo.

Llamaremos autoparalela a una curva tal que el transporte paralelo de su vector tangente a lo largo de la curva resulta en un vector tangente a la curva:



$$\bar{V}^{\parallel}_{\Delta\lambda} = \bar{V}(\lambda) + \Delta\lambda\, \nabla_{\bar{V}} \bar{V}(\lambda) + \dots \propto \bar{V}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_{\bar{V}} \bar{V} = f(\lambda)\, \bar{V} \qquad \text{para alguna } f(\lambda)$$

Notablemente cualquier curva que cumpla esta ecuación puede ser reparametrizada,

$$\lambda \to \mu(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \to \bar{U} = \frac{d}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu}\, \bar{V}$$

para obtener que $\bar{U}$ es paralelo-transportado a lo largo de la curva:

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$$

En efecto: $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = \nabla_{\bar{U}}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\bar{V}\right) = \bar{U}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\bar{V} + \frac{d\lambda}{d\mu}\underbrace{\nabla_{\bar{U}}}_{\frac{d\lambda}{d\mu}\nabla_{\bar{V}}}\bar{V}$

$$= \frac{d^2\lambda}{d\mu^2}\bar{V} + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2 \underbrace{\nabla_{\bar{V}}\bar{V}}_{f\bar{V}}$$

Entonces se obtiene $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$ resolviendo la ecuación:

$$\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} + f(\lambda)\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2 = 0$$

cuya solución es $\mu(\lambda) = a\int e^{\int f\,d\lambda}\,d\lambda + b$

En efecto: $d\mu = a\,e^{\int f d\lambda}\,d\lambda \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\mu} = a^{-1}e^{-\int f d\lambda} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2\lambda}{d\mu^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\frac{d\lambda}{d\mu} = -f\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2 \checkmark$$

El parámetro μ de la autoparalela $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$ se llama 'parámetro afín'.

La ecuación $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden para las funciones $x^i(\mu)$ que definen las ecuaciones paramétricas de la curva:

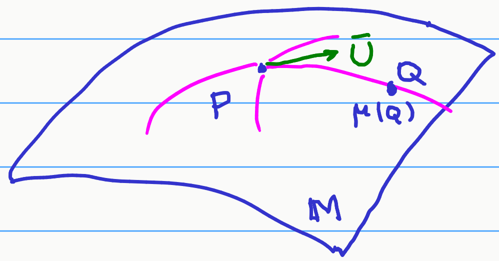
$\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0 \Rightarrow U^j\left(U^i{}_{,j} + \Gamma^i_{kj}U^k\right) = 0$ donde $U^i = \frac{dx^i(\mu)}{d\mu}$

Entonces
$$\boxed{\frac{d^2x^i}{d\mu^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu} = 0}$$

Coordenadas normales de Riemann

La torsión no participa en la ecuación de la autoparalela, porque Γ^i_{kj} está contraído con un tensor simétrico. Sería interesante encontrar una carta donde se anule $\Gamma^i_{(kj)}$ (que es la parte no tensorial de la conexión). En general eso no se puede realizar globalmente, pero es posible hacerlo localmente. Vamos a construir una carta en la vecindad de un punto P tal que $\Gamma^i_{(kj)}$ se anula en P.

El procedimiento que utilizaremos trata de reproducir lo que sería la construcción de una carta de tipo "cartesiano" con los elementos geométricos disponibles hasta aquí. Sea $\{\bar{E}_m\}$ una base en T_P, y tracemos todas las autoparalelas que pasan por P. Cada autoparalela está identificada por su vector tangente $\bar{U}(P)$ en el punto P. Para dar coordenadas a un punto Q del entorno de P, tomaremos el vector $\bar{U}(P)$ que corresponde a la autoparalela que pasa por Q, y el valor de su parámetro afín en el punto Q. Entonces definimos las coordenadas normales de Riemann del punto Q como



$$\boxed{X^m(Q) \doteq \mu(Q)\, U^m(P)}$$

donde $\mu(P) = 0$; P es el origen de coordenadas.

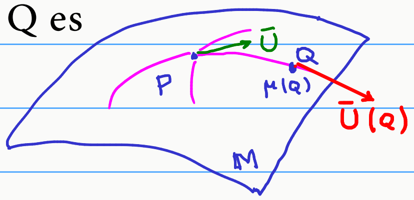
El parámetro afín está definido a menos de una constante multiplicativa (una escala), y una constante aditiva (una elección del origen). La constante multiplicativa no influye en la definición de las coordenadas de Riemann porque no afecta a $\mu\bar{U} = \mu\ d/d\mu$.

En la geometría euclidiana esta construcción utiliza las rectas que pasan por P, cuyo parámetro afín μ es la distancia al origen (lo veremos más adelante). El vector $\bar{U}$ resulta unitario, pues $\bar{U}\cdot\bar{U} = (g_{ij}dx^i dx^j)/d\mu^2 = (d\mu/d\mu)^2 = 1$. Si $\{\bar{E}_m\}$ es ortonormal, entonces la construcción conduce a las coordenadas cartesianas.

En coordenadas normales de Riemann, cada una de las autoparalelas que pasan por P se recorre manteniendo fijo $\bar{U}^m(P)$ y cambiando μ. Así, las ecuaciones parámetricas de las autoparalelas resultan lineales en μ:

$$X^m(\mu) = \mu\, U^m(P)$$

En este sentido podemos decir que, en esta carta, las autoparalelas se ven como "rectas": $d^2X^m(\mu)/d\mu^2 = 0$. El vector tangente a la autoparalela que va de P a Q es



$$\bar{U} = \frac{dX^m(\mu)}{d\mu}\frac{\partial}{\partial X^m} = U^m(P)\frac{\partial}{\partial X^m}$$

es decir que tiene componentes constantes en la base $\{\partial/\partial X^m\}$.

Por otro lado, en P vale que

$$\bar{U} = U^m(P)\,\bar{E}_m$$

entonces concluímos que en P coinciden las bases $\{\bar{E}_m\}$ y $\{\partial/\partial X^m\}$ (esto no significa que $\{\bar{E}_m\}$ sea una base coordenada porque para establecer tal propiedad deberíamos conocer el comportamiento de $\{\bar{E}_m\}$ en la vecindad de P).

Como se anula la derivada segunda de sus ecuaciones paramétricas, la ecuación de las autoparalelas en coordenadas normales de Riemann es

$$\Gamma^m_{np}(Q)\,\underbrace{U^n(P)}_{dX^n(\mu)/d\mu}\,U^p(P) = 0$$

Es decir, $\Gamma^m_{(np)}(Q)\,U^n(P)\,U^p(P) = 0$

En cada punto Q las funciones $\Gamma^m_{(np)}$(x) satisfacen estas cuatro ecuaciones para los valores de $U^m(P)$ correspondientes a la autoparalela que une Q con P. Pero en el origen P los valores de $U^m(P)$ son arbitrarios (son tantos como autoparalelas que pasan por P). Por lo tanto en P debe suceder que

$$\boxed{\Gamma^m_{(np)}(P) = 0}$$

Ejercicio: buscar cambios de coordenadas que retengan esta propiedad.

Hay $n^2(n+1)/2$ $\Gamma^m_{(np)}$'s que deben adaptarse con continuidad también a los valores de vector tangente de puntos vecinos a Q.