

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 15

Campo gravitatorio débil.

Ondas gravitatorias planas. Detectores de ondas gravitatorias

► Aproximación de campo gravitatorio-inercial débil

Como fue dicho en la clase anterior, en regiones donde el campo gravitatorio-inercial es débil existen cartas donde las componentes de la métrica se desvían poco de las de la métrica minkowskiana en la carta cartesiana:

$$g_{ij} = \text{diag} (+ - - -) + h_{ij}, \quad |h_{ij}| \ll 1.$$

Nótese que esta forma se preserva ante transformaciones de Lorentz de las coordenadas, pues éstas dejan invariante el símbolo de Minkowski η_{ij} .

En la aproximación lineal en la perturbación h_{ij} el Ricci resulta igual a

$$R_{ij} = R^{\ell}{}_{i\ell j} \approx \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (h_{kj, i\ell} + h_{i\ell, kj} - h_{k\ell, ij} - h_{ij, k\ell})$$

(usamos el símbolo de Minkowski para subir y bajar índices de magnitudes que son de primer orden en la perturbación).

► Libertad de gauge

Podría ocurrir que dos configuraciones "distintas" de métrica y campos de materia y radiación sean en realidad la misma configuración en dos cartas distintas (los mismos objetos geométricos descompuestos en bases diferentes). Esto significa que las componentes de la métrica no pueden ser en sí mismas genuinos grados de libertad, pues están sujetas a la ambigüedad que resulta de la libre elección de la carta. Aunque las ecuaciones de Einstein son tantas como componentes independientes tiene la métrica (10 componentes para un tensor $\binom{0}{2}$ simétrico), no deberían ser todas ellas independientes; si lo fueran determinarían las 10 componentes del tensor métrico sin dejar lugar a la libre elección de la carta. Ese es precisamente el significado de la "conservación automática" contenida en la identidad $G^i{}_{j;i} \equiv 0$ que expresa una relación entre las ecuaciones de Einstein (en el sentido del 2do. teorema de Noether).

Una situación similar se da en las ecuaciones dinámicas electromagnéticas. La ecuación $d \star \tilde{F} = -\mu_0 \star \tilde{j}$ es una ecuación diferencial de segundo orden para el potencial $\tilde{A}$. Pero esa ecuación dinámica es invariante ante la transformación de gauge del potencial: si $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A} + d\tilde{\chi}$ entonces $\tilde{F}$ no cambia. Por lo tanto las cuatro ecuaciones implicadas en $d \star \tilde{F} = -\mu_0 \star \tilde{j}$ no deberían determinar las cuatro componentes de $\tilde{A}$; deben estar ligadas entre sí. Dicho de otro modo, en la variación de la acción electromagnética respecto del potencial hay una variación que es inocua (la acción es invariante de gauge) y no juega en el principio variacional; por lo tanto las ecuaciones dinámicas que resultan no pueden ser independientes. En efecto no lo son, porque tienen conservación automática: $d(d \star \tilde{F}) \equiv 0$.

Así podemos concluir que las componentes de la métrica deben poseer una libertad de gauge que no afecta las ecuaciones de Einstein. En efecto en la aproximación lineal, el Ricci es invariante ante la transformación de gauge

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \quad |\xi_{i,j}| \ll 1$$

La invariancia es fácilmente verificable reemplazando en la forma linealizada del Ricci. La expresión no es más que la linealización de la transformación de gauge para el caso no lineal, que veremos al final del curso cuando probaremos que la acción de la gravedad es invariante ante un cambio infinitesimal del tensor métrico de la forma

$$g \longrightarrow g + \mathcal{L}_{\xi} g$$

En efecto es $(\mathcal{L}_{\xi} g)_{ij} = \xi^k g_{ij,k} + g_{kj} \xi^k{}_{,i} + g_{ik} \xi^k{}_{,j}$. Como ξ^k y sus derivadas deben ser infinitesimales se tiene que

$$(\mathcal{L}_{\xi} (\eta + h))_{ij} \simeq \eta_{kj} \xi^k{}_{,i} + \eta_{ik} \xi^k{}_{,j} \simeq \xi_{j,i} + \xi_{i,j}$$

La transformación de gauge se puede interpretar también en términos de la transformación de las componentes de la métrica ante un cambio infinitesimal de coordenadas del tipo

$$x^i \longrightarrow x^i + \xi^i$$

Entonces

$$g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j \longrightarrow g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j + g_{ij} d\xi^i \otimes d\tilde{x}^j + g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\xi^j + \dots$$

$$(g_{ij} + g_{kj} \xi^k{}_{,i} + g_{ik} \xi^k{}_{,j}) d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j$$

$\nearrow \eta_{ij} + h_{ij}$ $\nwarrow \approx \eta_{kj}$ $\nwarrow \approx \eta_{ik}$ $\Rightarrow h_{ij} \rightarrow h_{ij} + \xi_{j,i} + \xi_{i,j}$

► Gauge de Lorenz

Podemos explotar la libertad de gauge para fixar el gauge de manera tal que el Ricci linealizado resulte lo más sencillo posible. Como hay cuatro generadores ξ_i podremos fijar cuatro condiciones. El gauge de Lorenz es una elección del gauge que permite eliminar tres de los cuatro términos que constituyen el Ricci linealizado:

$$\boxed{\eta^{kl} h_{kj,e} = \frac{1}{2} \eta^{kl} h_{kl,e}} \quad j=0,1,2,3$$

gauge de Lorenz

Dado que subimos y bajamos índices con el símbolo de Minkowski, podemos escribir

$$h^l{}_{j,e} = \frac{1}{2} h_{,j}$$

donde h es la traza de la perturbación: $h \equiv h^k{}_k$.

Entonces

$$R_{ij} = R^k{}_{i\ell}{}^{\ell}{}_j \approx \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (h_{kj,\ell} + h_{\ell\ell,kj} - h_{k\ell,ij} - h_{ij,\ell k})$$

Diagrama de anotaciones: Se agregan términos $\frac{1}{2} h_{,ji}$ en verde y $h_{,ij}$ en magenta a la expresión anterior.

Por lo tanto es

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \square h_{ij}$$

Ricci linealizado
en el gauge de Lorenz

donde $\square$ es el d'Alembertiano en la métrica de Minkowski. De esta manera el tensor de Einstein queda

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \approx -\frac{1}{2} (\square h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \square h)$$

Como se ve, conviene definir

$$\bar{h}_{ij} \doteq h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} h$$

Nótese que $\bar{h} = -h$ (pues $\eta^i{}_i = \delta^i{}_i = 4$), entonces

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h}$$

Con la definición de $\bar{h}_{ij}$, el tensor de Einstein queda

$$G_{ij} \approx -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{ij}$$

tensor de Einstein linealizado
en el gauge de Lorenz

y el gauge de Lorenz queda

$$\bar{h}^{\ell}{}_{j,\ell} = 0$$

, y las ecuaciones de Einstein

linealizadas en el gauge de Lorenz son

$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij}$$

▶ Campo estático débil en el gauge de Lorenz

Para un fluido de materia no relativista en reposo es (se desprecia la presión)

$$T_{ij} \simeq \text{diag}(\rho, 0, 0, 0)$$

Como el tensor de energía-momento debe verse como una perturbación, sus índices se bajan con el símbolo de Minkowski. Reemplazando en las ecuaciones de Einstein

$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} \text{diag}(\rho, 0, 0, 0)$$

signatura (+---): $-\nabla^2$ (estático) $\nwarrow$ $\nearrow \rho c^2$

$$\Rightarrow \bar{h}_{ij} = \text{diag}\left(\frac{4\Phi}{c^2}, 0, 0, 0\right)$$

es solución y cumple el gauge de Lorenz porque Φ no depende de t

$$\Rightarrow h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h} = \text{diag}\left(\frac{2\Phi}{c^2}, \frac{2\Phi}{c^2}, \frac{2\Phi}{c^2}, \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

$\nwarrow \nearrow$
signatura (+---)

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

campo estático (Φ no depende de t) débil en el gauge de Lorenz

▶ Propagación de perturbaciones: ondas gravitatorias

Las ecuaciones de Einstein en vacío son $R_{ij} = 0$. Entonces tenemos la ecuación de onda para la perturbación, que se propaga a la velocidad c :

$$\square h_{ij} = 0 \quad (\text{junto con el gauge de Lorenz})$$

Proponemos como solución una onda monocromática plana

$$h_{ij} = H_{ij} e^{i k_e x^e}$$

↑
cte (tensor de polarización)

donde $\tilde{k}$ es un vector nulo para satisfacer la ecuación de onda.

Para cumplir el gauge de Lorenz $h^e{}_{j,e} = \frac{1}{2} h_{,j}$ tenemos que

$$k^e H_{e,j} - \frac{1}{2} k_j H = 0$$

Como sucede en electromagnetismo, el gauge de Lorenz no fija completamente el gauge. Existen transformaciones de gauge que preservan el gauge de Lorenz; en efecto, aplicando la transformación de gauge

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i}, \quad h^e{}_{j,e} - \frac{1}{2} h_{,j} \text{ cambia a}$$

$$h^e{}_{j,e} - \frac{1}{2} h_{,j} + \eta^{kl} (\xi_{k,j} + \xi_{j,k})_{,e} - \frac{1}{2} \eta^{kl} (\xi_{k,e} + \xi_{e,k})_{,j}$$

↙ ↘
se cancelan cambio $\ell \leftrightarrow k$

$$= h^e{}_{j,e} - \frac{1}{2} h_{,j} + \square \xi_j$$

Entonces en el gauge de Lorenz todavía podemos utilizar las transformaciones tales que

$$\square \xi_j = 0$$

Vamos a considerar una propagación en la dirección x :

$$h_{ij} = H_{ij} e^{ik(x-ct)} \quad k_j = (-k, k, 0, 0)$$

y aprovecharemos la libertad de gauge remanente eligiendo

$$\xi_j = \frac{\Xi_j}{ik} e^{ik(x-ct)}$$

que satisface que $\square \xi_j = 0$. Esto significa que el tensor de polarización H_{ij} está sometido a cuatro condiciones que provienen del gauge de Lorenz, más cuatro libertades remanentes que se expresan a través de las constantes Ξ_j que pueden usarse para fijar otras cuatro condiciones sobre el tensor de polarización. De esta forma, habrá ocho condiciones sobre las diez componentes del tensor de polarización. Así sólo dos componentes son genuinos grados de libertad del campo gravitatorio-inercial asociado a la onda.

Veremos que la libertad de gauge remanente se puede usar para eliminar el sector temporal de la perturbación h_{ij} . En efecto, la transformación de gauge para h_{i0} conduce a

$$\begin{aligned} H_{00} &\rightarrow H_{00} + 2\Xi_0 \\ H_{10} &\rightarrow H_{10} + \Xi_1 - \Xi_0 \\ H_{20} &\rightarrow H_{20} + \Xi_2 \\ H_{30} &\rightarrow H_{30} + \Xi_3 \end{aligned}$$

Una vez elegidas las Ξ_i para anular las H_{i0} , volvemos a las cuatro ecuaciones para el gauge de Lorenz, que ahora quedan

$$0 = k^l H_{lj} - \frac{1}{2} k_j H = -k \underbrace{H_{0j}}_{=0 \text{ (H}_{ij} \text{ es simétrico)}} - k H_{1j} - \frac{1}{2} k_j H$$

$$j=0) \quad 0 = \frac{1}{2} k H \quad \Rightarrow \quad \boxed{H=0} \quad l_2 + r_2 + s_2 \text{ se anula}$$

$$j=\alpha) \quad 0 = k H_{1\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{1\alpha} = 0} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

En este gauge, el tensor de polarización tiene traza nula, y sus únicas componentes no nulas están en el sector espacial transversal a la dirección de propagación:

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_\times \\ 0 & H_\times & -H_+ \end{pmatrix} = H_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + H_\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Este es el denominado gauge TT (transverse-traceless). Los términos de amplitudes $H_+, H_\times$ representan dos estados de polarización independientes. Entre ambos hay una rotación de 45° :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

► Movimiento de partículas libremente gravitantes

Veamos la consecuencia del paso de una onda gravitatoria sobre el comportamiento de partículas de prueba libres. Puede resultar sorprendente que la cuadrivelocidad $U^i = (c, 0, 0, 0)$ resuelve la ecuación de las geodésicas

$$\frac{dU^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i U^j U^k = 0$$

Esto es así porque en el gauge considerado resulta $\Gamma_{00}^i = 0$:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\underset{\uparrow 0}{h_{0l,0}} + \underset{\uparrow 0}{h_{l0,0}} - \underset{\uparrow 0}{h_{00,l}} \right) = 0$$

Entonces, las partículas que están inicialmente en reposo en las coordenadas utilizadas en este gauge, permanecerán en reposo. Pero esto no quiere decir que el paso de la onda no tenga consecuencias detectables. La onda altera la geometría del espacio-tiempo, y por lo tanto altera las distancias entre las partículas "en reposo".

Para ver el efecto sobre las distancias, consideremos dos partículas cuyas respectivas líneas de universo son $(ct, 0, \epsilon, 0)$ y $(ct, 0, 0, 0)$. Las partículas tienen una separación infinitesimal ϵ en la dirección y . El intervalo entre eventos simultáneos ($dt = 0$) es una distancia, y resulta

$$ds = \sqrt{|g_{ij} dx^i dx^j|} = \epsilon \sqrt{|g_{22}|} = \epsilon \sqrt{|-1 + h_{22}|} \simeq \epsilon \left(1 - \frac{1}{2} h_{22}\right)$$

Tomando, por ejemplo, la polarización $+$:

$$ds = \epsilon \left(1 - \frac{1}{2} H_+ \sin k(x - ct)\right)$$

$\uparrow$
 $x=0$

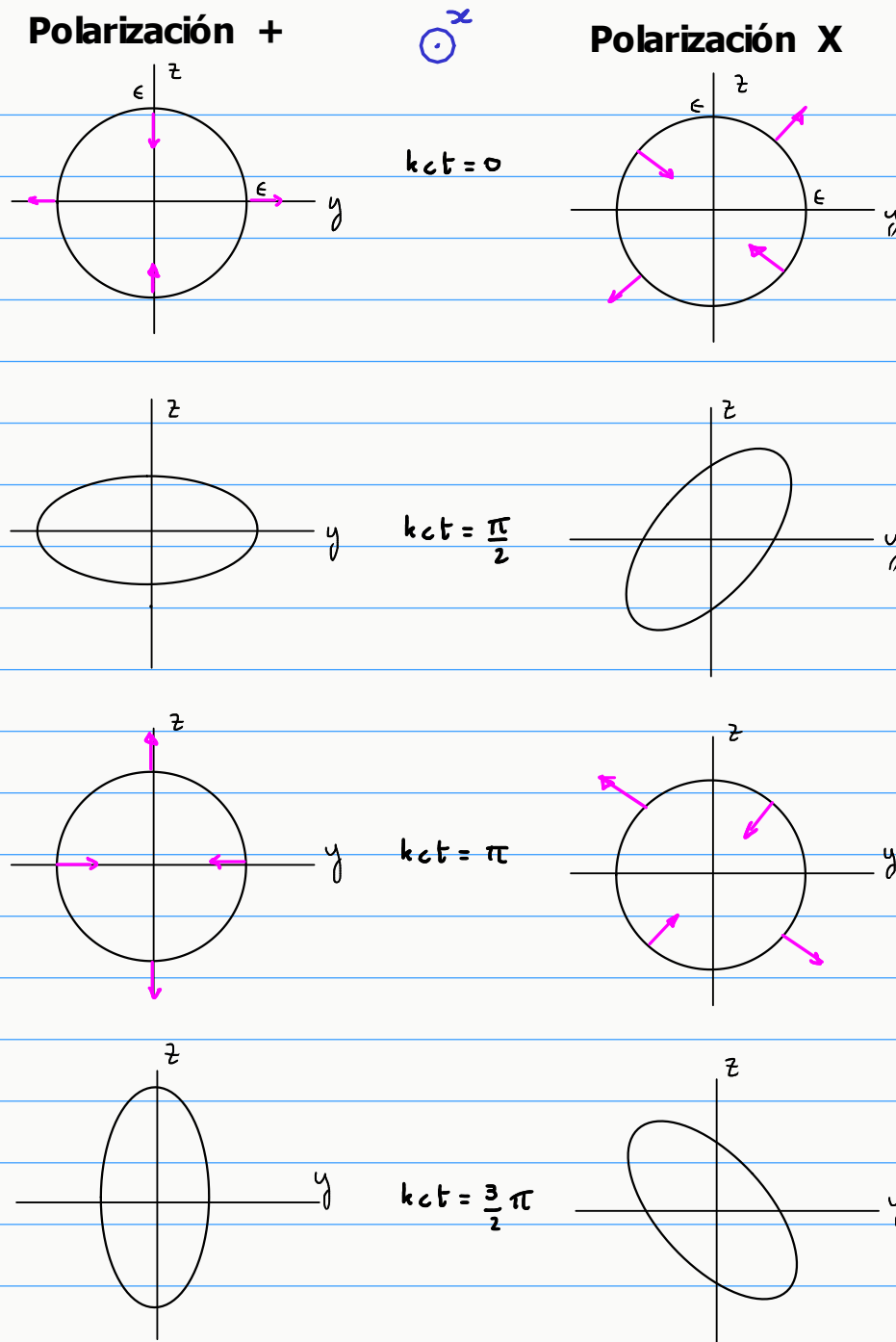
Podríamos hacer lo mismo con una partícula con una separación ϵ del origen en la dirección z ; en ese caso el cálculo se realiza con $h_{33} = -h_{22}$:

$$ds = \epsilon \left(1 + \frac{1}{2} H_+ \sin k(x - ct)\right)$$

$\uparrow$
 $x=0$

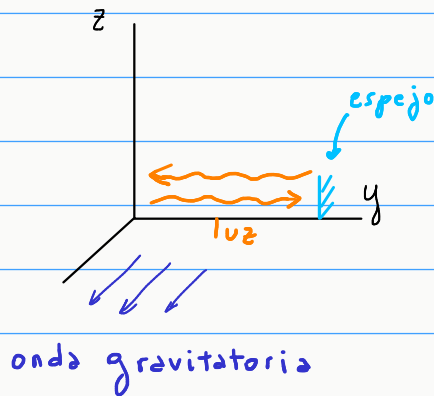
De modo que cuando aumenta la distancia al origen de la partícula desplazada en la dirección y , disminuye la distancia al origen de la partícula desplazada en la dirección z . Ambas distancias oscilan a contrafase.

Si imaginamos un círculo de partículas de prueba centrado en el origen del plano $y-z$ que es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, tendremos el siguiente comportamiento de las distancias al origen para cada una de las dos polarizaciones independientes:



Los estados de polarización son simétricos ante rotaciones de 180° . En las representaciones del grupo de rotaciones esta característica corresponde a la representación de spin 2. Del mismo modo el campo electromagnético posee simetría de 360° lo que corresponde a la representación de spin 1, mientras que los espinores de la representación de spin $1/2$ manifiestan simetría ante rotación de 720° (ante rotación de 360° cambian de signo).

▶ Detectores interferométricos. Consideremos una onda gravitatoria, digamos con polarización +, propagándose en la



dirección x , y un rayo de luz propagándose sobre el eje y .

En $y=L$ hay un espejo, que permanecerá en $y=L$ como ya fue dicho, donde la luz se refleja para retornar al origen donde se ubica un emisor-detector que también mantiene sus coordenadas espaciales fijas.

Sobre la línea de universo de un rayo de luz el intervalo es nulo:

$$0 = ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{22} dy^2 = c^2 dt^2 + (-1 + h_{22}) dy^2$$

$$\Rightarrow c dt \approx \pm \sqrt{1 - h_{+}} dy$$

Ejercicio: Discuta si la línea de universo nula propuesta para el rayo de luz es una geodésica para la geometría de la onda gravitatoria. Analice la necesidad de una componente x en el vector tangente a la geodésica nula. Muestre que el desplazamiento en x del rayo de luz sólo afecta la relación entre dt y dy ya obtenida al orden siguiente en el desarrollo perturbativo.

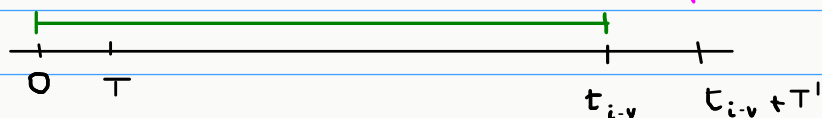
Queremos mostrar que el paso de la onda gravitatoria produce una diferencia entre la frecuencia de emisión de la luz y la frecuencia de recepción cuando la luz regresa al origen. Notemos que para un reloj fijo el tiempo propio coincide con el tiempo coordinado porque $g_{00} = 1$. Integremos el viaje de ida y vuelta de un pulso de luz:

$$\int_0^{t_{i-v}} \frac{c dt}{\sqrt{1 - h_{+}(t, x=0)}} = 2L$$

Un segundo pulso parte un tiempo T después que el anterior (período de emisión) y regresa al origen un tiempo T' después del regreso del primero (período de recepción). Entonces para el segundo pulso la integral es

$$\int_T^{T' + t_{i-v}} \frac{c dt}{\sqrt{1 - h_+(t, x=0)}} = 2L$$

Restando ambas integrales tendremos que sólo sobreviven los intervalos de integración $(0, T)$ y (t_{i-v}, T') :



$$\int_0^T \frac{c dt}{\sqrt{1 - h_+(t, x=0)}} = \int_{t_{i-v}}^{T' + t_{i-v}} \frac{c dt}{\sqrt{1 - h_+(t, x=0)}}$$

Si el período de la luz es mucho menor que el período de la onda gravitatoria podremos aproximar:

$$\frac{T}{\sqrt{1 - h_+(0, x=0)}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - h_+(t_{i-v}, x=0)}}$$

Es decir $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - h_+(0, 0)}}{\sqrt{1 - h_+(t_{i-v}, 0)}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left[h_+(0, 0) - h_+(\frac{2L}{c}, 0) \right]$

$\nearrow$
 t_{i-v}

Este resultado puede compararse con el que se obtiene para rayos que viajen sobre el eje z . Como $h_{33} = -h_{22}$ es suficiente cambiar el signo de la perturbación en el resultado anterior. Así tendremos que

$$\frac{\nu'_y - \nu'_z}{\nu} = -h_+(0, 0) + h_+(\frac{2L}{c}, 0) \quad \text{para longitudes recorridas iguales}$$

Para la onda plana monocromática es $h_+(t, x) = H_+ \sin k(x - ct)$

$\nearrow$
 $\frac{2\pi}{\lambda_{\text{grav}}}$

$$\frac{\nu'_y - \nu'_z}{\nu} = H_+ \sin 4\pi \frac{L}{\lambda_{\text{grav}}}$$

Si la luz no viajara en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda gravitatoria, el resultado se modifica un poco.

La diferencia de frecuencia se mide mediante detectores interferométricos que se basan en la idea del interferómetro de Michelson (LIGO, VIRGO, GEO600). LIGO puede detectar una amplitud $H \sim 10^{-22}$ ("strain") en la banda de 100 Hz a 1 kHz. Es una banda adecuada para ondas gravitatorias que provengan de la coalescencia de agujeros negros de masa estelar o estrellas de neutrones. Estas frecuencias de emisión corresponden a longitudes de onda λ_{grav} en un rango de cientos a algunos miles de kilómetros. Esto requiere que los brazos del interferómetro tengan una longitud comparable. Los observatorios de LIGO (Hanford y Livingston) tienen brazos de 4 km, pero la longitud efectiva es de 1200 km.

La primera detección ocurrió en 2015 (GW150914), y correspondió a la coalescencia de dos agujeros negros de 29 y 36 masas solares hace $1,3 \times 10^9$ años; 3 masas solares se convirtieron en energía radiada. GW170817 fue la primera detección de la coalescencia de dos estrellas de neutrones, lo que permitió su confirmación en ondas electromagnéticas (un GRB fue observado 1,7 s después). Actualmente se detecta más o menos un evento por semana.

Está programada la construcción de un observatorio en el espacio con brazos de millones de kilómetros (LISA), para poder observar en frecuencias más bajas ($\sim 10^{-2}$ Hz) y abarcar otro tipo de fenómenos como la coalescencia de los mega-agujeros negros ubicados en los centros de las galaxias, sistemas estelares binarios en nuestra galaxia, ondas gravitatorias primordiales, etc.

<https://www.ligo.caltech.edu/>

<https://www.youtube.com/watch?v=aEPIwEJmZyE>