

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 16

Geometría de Schwarzschild. Estructura causal. Horizonte de eventos

► Solución de Schwarzschild. Agujero negro

Las ecuaciones de Einstein son ecuaciones no lineales de segundo orden para la métrica. No existe entonces la "solución general de la ecuación homogénea". Aquellas geometrías cuyo tensor de Ricci se anula son soluciones "de vacío" (corresponden a $T_{ij} = 0$). Para obtener soluciones es útil proponer alguna simetría particular que ayude a buscar la solución; de otra forma deberíamos tratar con diez ecuaciones y diez incógnitas. Buscaremos entonces una solución de $R_{ij} = 0$ que sea estática y esféricamente simétrica. Esto nos permite anticipar algunos aspectos que la métrica debería tener en una carta apropiada; así podemos proponer que el intervalo tenga la forma

$$ds^2 = f(r) g(r) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{g(r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Las funciones $f(r)$ y $g(r)$ son incógnitas. No dependen de t porque buscamos una solución estática; no dependen de θ, φ porque deseamos una simetría esférica. La parte angular de la métrica propuesta implica la existencia de una carta tal que el elemento de arco sobre las esferas $r = \text{cte}$ se escribe en la forma habitual; esto significa que el área de esas esferas es $4\pi r^2$. Sin embargo la coordenada radial no es una distancia, pues la distancia radial está afectada por la función $g(r)$; el área de la esfera no tiene la relación usual con su radio porque el espacio está curvado. También hay un efecto de curvatura en la dimensión asociada a la coordenada temporal, como se espera que suceda en presencia de gravedad.

En 1916 Karl Schwarzschild obtuvo la solución:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

La constante M es una constante de integración. Por nuestro conocimiento de la relación entre g_{00} y el potencial newtoniano en el régimen de campo débil, vemos que M juega el papel de la masa del objeto que genera el campo gravitatorio. Puede tratarse de una masa distribuida en forma esféricamente simétrica en alguna región del espacio; por ejemplo, una estrella o planeta esférico, ignorando su rotación (que daría a una simetría axial en lugar de esférica). Como la solución obtenida es una solución de vacío, entonces corresponderá a la geometría exterior al objeto que produce el campo gravitatorio. Si $M=0$ obtenemos el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas; por lo tanto, en las regiones donde $r \gg GM/c^2$ la geometría de Schwarzschild es una perturbación de la geometría plana (nótese que esta carta no es la que corresponde a la forma del campo débil en el gauge de Lorenz).

► **Teorema de Birkhoff (1923):** la geometría de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein. Esto significa que la solución esféricamente simétrica es necesariamente estática. Esto es, si el objeto que genera el campo gravitatorio "latiera" sin perder su simetría esférica, el latido no generaría una onda gravitatoria (no hay radiación monopolar en Relatividad General, como no la hay en electromagnetismo). Si a las funciones incógnitas f y g le hubiéramos dado una dependencia en la coordenada t , entonces las ecuaciones de Einstein habrían impedido que g dependiera de t , y habrían dicho que f es una función arbitraria de t (que se absorbería redefiniendo la coordenada t).

El teorema es aplicable también al interior de una cáscara hueca. En ese caso no hay razón para que la métrica sea singular en $r=0$; entonces la constante de integración M debe elegirse igual a cero, y tendremos la geometría de Minkowski.

Estudiaremos la solución de Schwarzschild en todo el rango de la coordenada r , como si el objeto que origina el campo gravitatorio fuese puntual.

Vemos que las componentes del tensor métrico en esta carta tienen un mal comportamiento en dos valores de r : en $r=0$, y en el llamado **radio de Schwarzschild**

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

donde se anula g_{00} y g_{rr} diverge. Además, en la región $r < r_s$ la coordenada temporal no es t sino r , debido a los cambios de signo de g_{00} y g_{rr} .

La singularidad en $r=0$ es genuinamente geométrica; en $r=0$ no sólo divergen g_{00} y g_{rr} , sino también invariantes como el escalar de Kretschmann $R_{tjkl} R^{lijk}$ que vale $12 r_s^2 r^{-6}$. En cambio, el comportamiento de g_{00} y g_{rr} en torno a $r = r_s$ puede mejorarse mediante un cambio de carta.

► Estructura causal

Para conocer cómo es la estructura causal de la geometría de Schwarzschild debemos conocer el cono de luz en cada evento. Comencemos averiguando cómo se ven los conos de luz en el plano de las coordenadas ct, r . Las líneas de universo radiales ($d\theta = 0 = d\varphi$) nulas satisfacen que

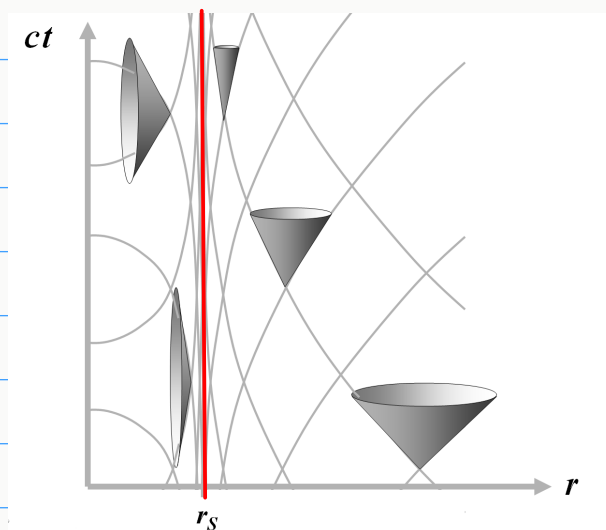
$$ds^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} = 0$$

No es necesario verificar la ecuación de las geodésicas en este caso, porque la simetría esférica indica que deben existir geodésicas radiales nulas.

Entonces las geodésicas radiales nulas satisfacen que

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

$\frac{dt}{dr}$ diverge cuando $r \rightarrow r_s$. La Figura muestra el comportamiento de estas curvas, y los conos de luz futuros:



Nótese que la elección del futuro es meramente convencional en la región $r > r_s$, pues hay invariancia ante cambio de t por $-t$. En cambio, en la región $r < r_s$ la coordenada temporal es r (debido al cambio de signo de g_{tt} y g_{rr}); la métrica no es invariante ante cambio de r por $-r$. En la región $r < r_s$ las dos posibles elecciones de futuro conducen a dos estructuras causales diferentes. Hemos elegido el futuro considerando partículas de prueba que caen hacia la singularidad $r=0$. El aspecto más notable de esta estructura causal es que la línea de universo de cualquier partícula, libre o no, o rayo de luz en la región $r < r_s$ inevitablemente finaliza en la singularidad $r=0$.

► **Horizonte de eventos:** la superficie $r = r_s$ se denomina horizonte de eventos pues oculta los eventos que están en su interior. Los eventos que están en el

interior no pueden ser causa de eventos externos pues nada, ni siquiera la luz, puede escapar de la región interior. La superficie del horizonte de eventos es negra a los ojos de un observador exterior. Esto motiva la denominación de "agujero negro" para las soluciones que poseen horizonte de eventos.

Recordemos que estamos trabajando con la solución de vacío. De modo que para que el horizonte de eventos quede expuesto, el objeto que es la fuente del campo gravitatorio debería compactarse "detrás" de su horizonte. El valor de r_s para un objeto de masa igual a la masa solar es de 2,95 km.

La Figura también muestra que un objeto que cae hacia el agujero negro desde la región exterior alcanza el horizonte de eventos cuando t tiende a infinito. Pero no debemos pensar que esto indica que el horizonte no puede alcanzarse. Recordemos que t no es más que una coordenada de una carta que es "defectuosa" en la vecindad del horizonte. Luego demostraremos que la partícula libremente gravitante no sólo alcanza el horizonte en un tiempo propio finito, sino que también alcanza la singularidad en un tiempo propio finito.

▶ Corrimiento al rojo gravitatorio

Supongamos que una fuente emite con frecuencia ν_f desde una línea de universo r_f, θ, φ constantes. La frecuencia medida en un receptor fijo en otra posición r_{obs}, θ, φ es (ver Clase 3)

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_f} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_f)}{g_{00}(r_{obs})}} = \left[\frac{1 - \frac{r_s}{r_f}}{1 - \frac{r_s}{r_{obs}}} \right]^{1/2}$$

La frecuencia observada se corre al rojo hasta tender a cero cuando la posición de la fuente tiende al horizonte de eventos.

En el interior del horizonte toda partícula se encamina irreversiblemente hacia la singularidad; ninguna fuerza puede desviarla de este destino, porque la estructura de conos de luz lo impide. Aunque el tensor de Ricci es cero, las fuerzas de marea, que son proporcionales al Riemann, divergen hacia la singularidad.

► Representación pictórica

La geometría espacial de la región exterior admite una representación pictórica en términos de la geometría de una superficie embebida en un espacio euclidiano. Para ello tomemos una hipersuperficie $t=\text{constante}$ de la solución de Schwarzschild, cuyo elemento de longitud es

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Todavía hay aquí 3 dimensiones; no podemos embeber esta geometría como una superficie de un espacio euclidiano de 3 dimensiones, como es nuestro objetivo. Para ello restringiremos la coordenada θ a su valor "ecuatorial" $\theta = \pi/2$. Ahora tenemos

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 dy^2$$

Queremos ver qué forma debería tener una superficie embebida en un espacio euclidiano de 3 dimensiones para que su elemento de longitud (inducido por la métrica euclidiana) tenga la forma de arriba.

Vamos a mostrar que la superficie debe ser el paraboloide de revolución generado por la parábola

$$r = r_s + \frac{z^2}{4r_s}$$

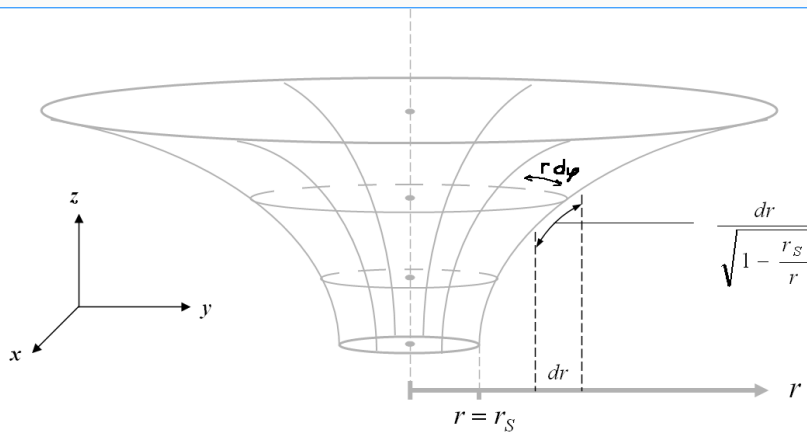
del espacio euclidiano (r, φ, z son coordenadas cilíndricas). En efecto, resulta

$$dr = \frac{z}{2r_s} dz$$

Entonces, en la distancia euclidiana medida sobre la parábola se tiene que

$$dr^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{4r_s^2}{z^2}\right) dr^2 = \left(1 + \frac{1}{\frac{r}{r_s} - 1}\right) dr^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

que es la parte radial de dl^2 .



► Movimiento de partícula libremente gravitante

En lugar de resolver la ecuación de las geodésicas, nos valdremos de las primeras integrales de movimiento que de ella emanan:

- i) las componentes de la métrica no dependen de t : se conserva p_t
- ii) las componentes de la métrica no dependen de φ : se conserva p_φ

donde $p_t = g_{tt} p^t = g_{tt} m \frac{dt}{dz} = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) m \frac{dt}{dz} \equiv E$

signatura (+ - - -)

$$p_\varphi = g_{\varphi\varphi} p^\varphi = g_{\varphi\varphi} m \frac{d\varphi}{dz} = -r^2 \sin^2\theta m \frac{d\varphi}{dz} \equiv -L$$

Además podemos apelar a la simetría esférica para afirmar que el movimiento se realiza sobre un "plano" de simetría, definido por las condiciones iniciales, que puede tomarse como la superficie ecuatorial si elegimos las coordenadas para que Θ sea igual a $\pi/2$ sobre la misma. De esa forma también tendremos que $p^\theta = m d\theta/dz = 0$.

Por otro lado es $\bar{p} \cdot \bar{p} = m^2 c^2$, entonces

signatura (+ - - -)

$$m^2 c^2 = g_{ij} p^i p^j = \underbrace{g_{tt}^{-1}}_{\frac{c^{-2}}{1 - \frac{r_s}{r}}} E^2 + \underbrace{g_{rr}}_{-\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}} m^2 \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \underbrace{g_{\varphi\varphi}^{-1}}_{-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}} L^2$$

Reordenando términos:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{G m M}{r} - \frac{G M L^2}{m r^3 c^2} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2 m c^2} \equiv e$$

tiempo propio
término relativista

Esta sería la ecuación de conservación de la energía newtoniana si no fuera por la presencia de un término relativista, y del tiempo propio en lugar del tiempo absoluto newtoniano.

► Movimiento radial: si el movimiento es radial entonces es $L=0$,

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{2\bar{e} + \frac{2GM}{r}} \quad \bar{e} = \frac{e}{m}$$

$L=0$ elimina el término relativista. El único vestigio de relatividad es el tiempo propio. Esto significa que el tiempo propio que demanda el recorrido entre un r inicial y un r final es igual al tiempo absoluto newtoniano para esa distancia. Como el tiempo newtoniano para llegar a $r=0$ es finito para cualquier r inicial finito compatible con el valor dado de "energía mecánica newtoniana" e , concluimos que la partícula alcanza tanto el horizonte de eventos como la singularidad en un tiempo propio finito,

$$\Delta\tau = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2\bar{e} + \frac{2GM}{r}}} \quad , \quad r_1 > r_2$$

En particular, para condiciones iniciales tales que $\bar{e}=0$, el tiempo propio para alcanzar la singularidad es

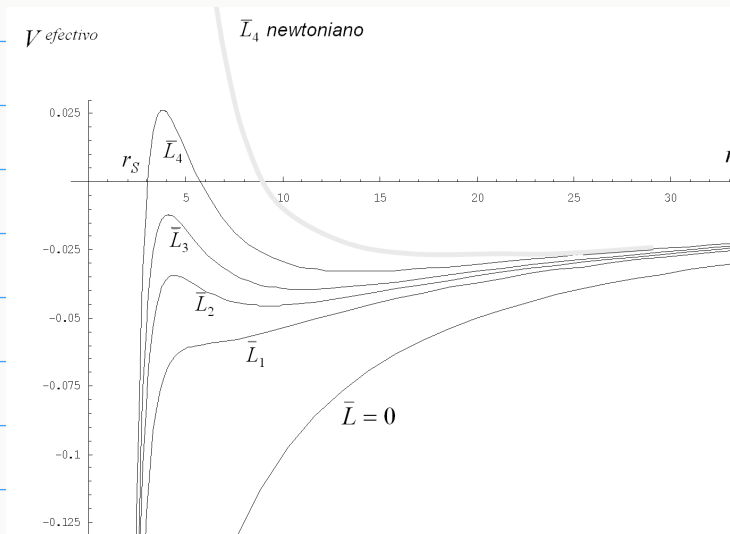
$$\Delta\tau = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{r}}} = \left(\frac{2r_1^3}{9GM} \right)^{1/2}$$

► Movimiento orbital: en la ecuación de conservación de la energía vemos un potencial efectivo por unidad de masa para el movimiento radial,

$$V^{\text{efectivo}} = \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\bar{L}^2}{r^3c^2} \quad \leftarrow \text{término relativista}$$

donde $\bar{L} = L/m$ es el momento angular por unidad de masa.

La Figura muestra el potencial efectivo por unidad de masa para diferentes valores del momento angular por unidad de masa:



Para $r \gg r_s$ el potencial es esencialmente newtoniano. Pero a medida que r se acerca a r_s empieza a prevalecer el término relativista. Eso produce que el potencial efectivo no sólo tenga el esperable mínimo (órbita circular estable), sino que también posea un máximo (órbita circular inestable), ambos para valores suficientemente grandes de \bar{L} .

Calculando la derivada del potencial se encuentra que el potencial posee extremos si $\bar{L}^2 c^2 > 12 G^2 M^2$. Los extremos del potencial corresponden a los siguientes valores de la coordenada radial:

$$r \Big|_{\substack{V_{\min} \\ V_{\max}}} = \frac{\bar{L}^2}{2GM} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{12 G^2 M^2}{\bar{L}^2 c^2}} \right]$$

El signo positivo corresponde al radio de la órbita circular estable. El valor newtoniano se obtiene en el límite $c \rightarrow \infty$:

$$r_{\substack{\text{órbita circular} \\ \text{newtoniana}}} = \frac{\bar{L}^2}{GM}$$

Mientras que la órbita circular newtoniana existe para cualquier valor de \bar{L} distinto de cero, en Relatividad las órbitas circulares, estable e inestable, existen en tanto que $\bar{L}^2 c^2 \geq 12 G^2 M^2$. La órbita circular de menor radio ocurre para el valor crítico $\bar{L}^2 c^2 = 12 G^2 M^2$ y vale

$$r_{\text{órbita circular mínimo}} = \frac{\bar{L}^2}{2GM} = \frac{6GM}{c^2} = 3 r_s$$

► Ecuación para la trayectoria $r = r(\varphi)$

En la ecuación de conservación de la energía, que es una ecuación para $r = r(z)$, podemos reemplazar dz en términos de $d\varphi$ usando la conservación del momento angular:

$$r^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_1 \frac{d\varphi}{dz} = \bar{L} \Rightarrow dz = \frac{r^2}{\bar{L}} d\varphi$$

$$\frac{\bar{L}^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\bar{L}^2}{r^3 c^2} = \bar{e}$$