

# **Relatividad General**

2do cuatrimestre de 2021

**Profesor: Rafael Ferraro**

## **Clase 17**

**Corrimiento del perihelio y deflexión de rayos de luz en la geometría de Schwarzschild.**

**Coordenadas de Kruskal-Szekeres**

► Ecuación para la trayectoria de la partícula libremente gravitante

Habíamos llegado a la ecuación para la órbita  $r(\varphi)$  de la partícula libremente gravitante:

$$\frac{\bar{L}^2}{2r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\bar{L}^2}{r^3 c^2} = \bar{e}$$

Para resolver la ecuación es conveniente el cambio de variable

$$u \equiv r^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = -u^{-2} \frac{du}{d\varphi}$$

Entonces obtenemos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \underbrace{\frac{u^2}{2} - \frac{GM}{\bar{L}^2} u - \frac{GM}{c^2} u^3}_{V^{\text{efec}}(u)} = \frac{\bar{e}}{\bar{L}^2}$$

Vamos a desarrollar este potencial efectivo alrededor de su mínimo, que corresponde al valor de la coordenada  $u$  para la órbita circular relativista:

$$u_E = \frac{1}{r_E} = 2 u_N \left( 1 + \sqrt{1 - 12 \frac{G^2 M^2}{\bar{L}^2 c^2}} \right)^{-1}$$

↑ "Einstein"
↑ "Newton"

donde  $u_N = \frac{1}{r_N} = \frac{GM}{\bar{L}^2}$

La idea es hacer una aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$V^{\text{efec}}(u) \approx V^{\text{efec}}(u_E) + \frac{1}{2} V^{\text{efec}''}(u_E) (u - u_E)^2$$

El valor de  $V^{\text{efec}''}(u_E)$  corresponderá al valor del cuadrado de la frecuencia angular  $\omega$  para la oscilación del radio a medida que avanza el ángulo  $\varphi$  en una órbita cuasi-circular ("pequeñas oscilaciones").

$$V^{\text{efec}''}(u) = 1 - 6 \frac{GM}{c^2} u = 1 - 3 \frac{r_s}{r_N} u$$

Si  $GM \ll \bar{L}c$  entonces podemos aproximar  $u_E$  por  $u_N$ . Entonces

$$\omega^2 = V^{\text{efec}''}(u_E) \approx 1 - 3 \frac{r_s}{r_N} \quad r_N = \frac{\bar{L}^2}{GM}$$

$$\omega \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{r_s}{r_N}$$

La oscilación armónica de  $u$  alrededor de  $u_E$  queda:

$$u(\varphi) \approx u_E + A \cos \omega \varphi \approx u_N + A \cos \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{r_s}{r_N} \right) \varphi \right]$$

donde  $A$  depende de la "energía"  $\bar{E}/\tau^2$ . Para que la coordenada radial realice una oscilación completa, el avance del ángulo  $\varphi$  debe ser tal que

$$\omega \Delta\varphi = 2\pi$$

Como  $\omega < 1$  entonces  $\Delta\varphi > 2\pi$ . La órbita no se cierra, pues cuando el radio completa su oscilación y regresa a su valor mínimo (perihelio) el ángulo barrido superó el valor de  $2\pi$ :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{r_s}{r_N} \right)$$

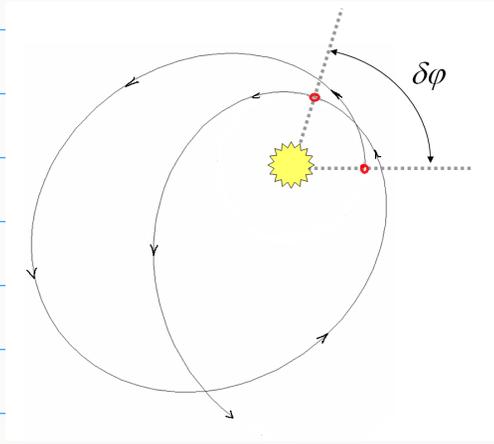
El avance del perihelio es

$$\delta\varphi = 3\pi \frac{r_s}{r_N}$$

El radio de la órbita de Mercurio es de unos 58 millones de kilómetros, mientras que el radio de Schwarzschild es de unos 3 km. Entonces

$$\delta\varphi_{\text{Mercurio}} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ radianes}$$

lo que lleva a una acumulación de 43 segundos de arco por siglo.



► **Deflexión de la luz en la geometría de Schwarzschild**

Las geodésicas nulas también tienen dos constantes de movimiento E y L. Para hallar la trayectoria del rayo podemos usar la ecuación para la partícula, restaurando la masa y reemplazándola por cero. Entonces la ecuación

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{GM}{L^2} u - \frac{GM}{c^2} u^3 = \frac{\bar{e}}{L^2}, \quad \bar{e} \equiv \frac{E^2 - m^2 c^4}{2 m^2 c^2}$$

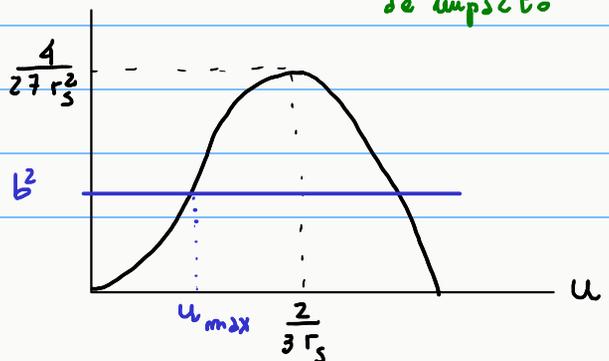
se reduce a

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - r_s u^3 = b^2$$

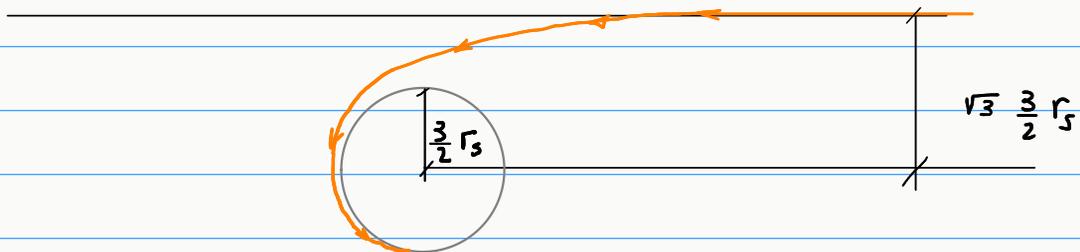
$$b \equiv \frac{E}{Lc} = \frac{pc}{pdc} = \frac{1}{d}$$

parámetro de impacto ↑

El "potencial"  $u^2 - r_s u^3$  tiene la forma:



Como se puede ver, si la constante de movimiento  $b^2$  coincide con  $4/(27 r_s^2)$  (es decir, si el parámetro de impacto es  $d = 3\sqrt{3} r_s/2$ ) entonces el rayo de luz va asintóticamente a una órbita circular de radio  $\frac{3}{2} r_s$ . Esta circunstancia es inestable porque si el parámetro de impacto aumenta un poco entonces el rayo de luz se aleja indefinidamente luego de acercarse al centro del campo, mientras que si el parámetro de impacto se reduce un poco entonces el rayo de luz termina en la singularidad.



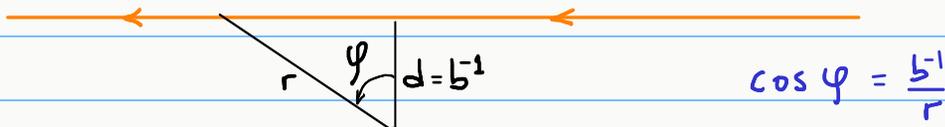
Estudiaremos la deflexión de la luz en un campo gravitatorio. Utilizaremos parámetros de impacto mayores que el valor crítico, de modo que el rayo de luz viene del infinito y va hacia el infinito. El máximo acercamiento ocurre cuando se anula  $du/d\varphi$ , esto es para

$$u_{\max}^2 - r_s u_{\max}^3 = b^2$$

La solución no relativista ( $r_s = 0$ ) de la ecuación para la trayectoria del rayo es

$$u_{nr} = b \cos(\varphi + \alpha_0)$$

Escogiendo  $\alpha_0 = 0$ , estaremos midiendo  $\varphi$  desde el punto de la órbita donde  $u$  es máximo (es decir,  $r$  es mínimo). La solución no relativista es nada más que una línea recta (no hay deflexión de la luz):



Para la solución relativista propondremos una corrección a la solución no relativista y desarrollaremos al orden más bajo en  $r_s$ ; la aproximación será válida si  $b r_s \ll 1$  (si el parámetro de impacto es mucho mayor que  $r_s$ ). Sea

$$u(\varphi) = b \cos \varphi + b^2 r_s f(\varphi)$$

Entonces

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(-b \sin \varphi + b^2 r_s f'(\varphi)\right)^2$$

$$\simeq b^2 \sin^2 \varphi - 2 b^3 r_s \sin \varphi f'(\varphi)$$

Reemplazando en la ecuación  $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - r_s u^3 = b^2$  el orden  $r_s$  es

$$\underbrace{-2 b^3 r_s \sin \varphi f'(\varphi)}_{\text{viene de } \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} + \underbrace{2 b^3 r_s \cos \varphi f(\varphi)}_{\text{viene de } u^2} - \underbrace{r_s b^3 \cos^3 \varphi}_{\text{viene de } u^3} \simeq 0$$

La solución es

$$f(\varphi) = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi$$

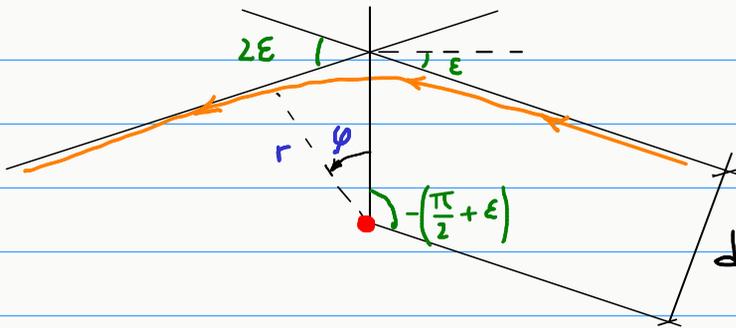
(eligiendo la constante de integración para maximizar  $u$  en  $\varphi = 0$ )

$$u(\varphi) \simeq b \cos \varphi + b^2 r_s - \frac{b^2 r_s}{2} \cos^2 \varphi$$

Vemos que  $\varphi = 0$  corresponde a  $u_{\max}$  pues se anula  $du/d\varphi$ ; entonces

$$u_{\max} \simeq b + \frac{b^2 r_s}{2}$$

que, al orden  $r_s$ , satisface la relación  $u_{\max}^2 - r_s u_{\max}^3 = b^2$  para la anulación de  $du/d\varphi$  en la ecuación exacta.



Cuando  $u \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) el ángulo  $\psi$  tiende a  $\pm (\frac{\pi}{2} + \epsilon)$ . Si reemplazamos en la solución:

$$0 \approx b \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}_{\approx -\epsilon} + b^2 r_s - \frac{b^2 r_s}{2} \underbrace{\cos^2(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}_{\approx \epsilon^2}$$

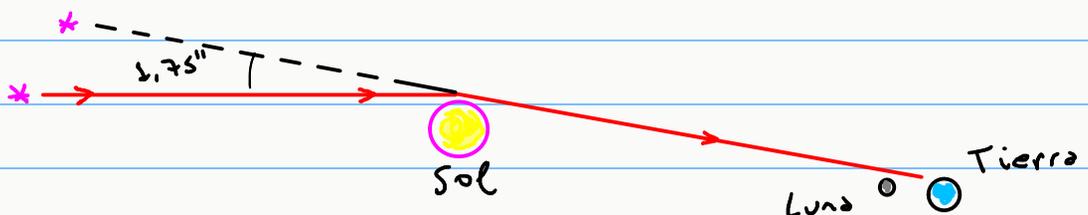
$$\Rightarrow \epsilon \approx b r_s = \frac{r_s}{d}$$

La deflexión del rayo es

$$\delta = 2\epsilon \approx 2r_s b = \frac{2r_s}{d}$$

En el caso de un rayo de luz que roza el disco solar podemos aproximar el parámetro de impacto por el radio solar (696.000 km). Como el radio de Schwarzschild es de 3 km, resulta una desviación de 1,75 segundos de arco. La deflexión de la luz debido al campo gravitatorio del Sol fue observada por primera vez en 1919, aprovechando un eclipse total de Sol (Eddington).

La deflexión gravitatoria de la luz es la base del fenómeno de "lente gravitatoria" que veremos más adelante.



## ► Coordenadas de Kruskal-Szekeres

La carta utilizada hasta aquí es cómoda para trabajar en la región de campo débil, pero no posee un buen comportamiento en la región vecina al horizonte de eventos. En particular los roles de coordenada espacial y temporal se intercambian al atravesar el horizonte. En 1960 Kruskal y Szekeres propusieron una carta libre de esos problemas. El cambio de coordenadas concierne a las coordenadas  $t, r$  exclusivamente, sin afectar las coordenadas angulares. La idea es que las nuevas coordenadas  $u, v$  permitan escribir el sector  $t-r$  de la geometría en una forma conformemente plana. El cambio de coordenadas es

$$\text{Si } r > r_s \quad u = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[ \frac{r}{2r_s} \right] \cosh \left[ \frac{ct}{2r_s} \right]$$

$$v = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[ \frac{r}{2r_s} \right] \sinh \left[ \frac{ct}{2r_s} \right]$$

$$\text{Si } r < r_s \quad u = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[ \frac{r}{2r_s} \right] \sinh \left[ \frac{ct}{2r_s} \right]$$

$$v = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[ \frac{r}{2r_s} \right] \cosh \left[ \frac{ct}{2r_s} \right]$$

La transformación de coordenadas es singular en el radio de Schwarzschild, donde  $u, v$  valen cero para todo  $t$  finito. Claramente, el cambio de coordenadas debe ser singular en  $r_s$  si se desea curar la singularidad de la carta  $(t, r)$ .

Para entender las nuevas coordenadas, veremos cómo se ven las líneas coordenadas  $t=\text{constante}$  y  $r=\text{constante}$  en el plano  $(v, u)$ .

Elevando al cuadrado las ecuaciones anteriores y restando los resultados:

$$\frac{r_s^2}{4} \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right) \exp \left[ \frac{r}{r_s} \right] = u^2 - v^2$$

Las líneas  $r=\text{constante}$  son hipérbolas en el plano  $(v,u)$ . El horizonte de eventos corresponde a las asíntotas de las hipérbolas; en  $r=r_s$  es  $u=\pm v$ .

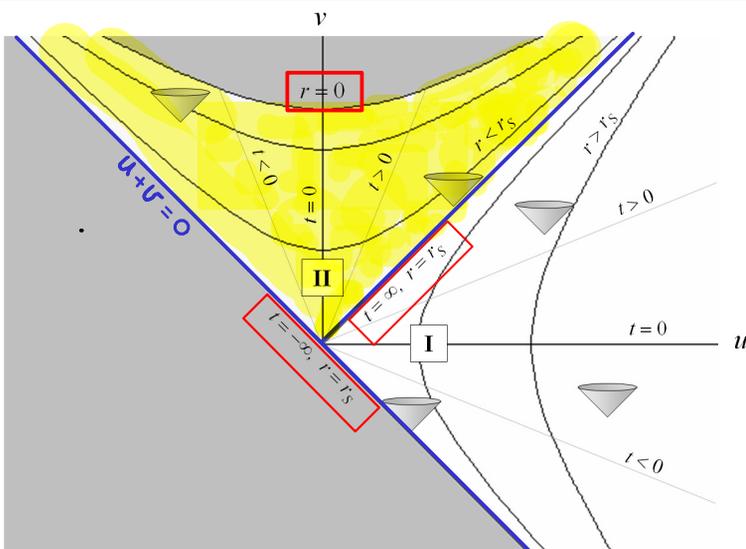
Por otro lado, haciendo el cociente entre las ecuaciones del cambio de coordenadas,

$$\tanh \left[ \frac{ct}{2r_s} \right] = \begin{cases} \frac{v}{u} & \text{si } r > r_s \\ \frac{u}{v} & \text{si } r < r_s \end{cases}$$

Las líneas  $t=\text{constante}$  son rectas que pasan por el origen en el plano  $(v,u)$ . Como el horizonte está en  $u=\pm v$ , entonces  $t=\pm\infty$  sobre el horizonte.

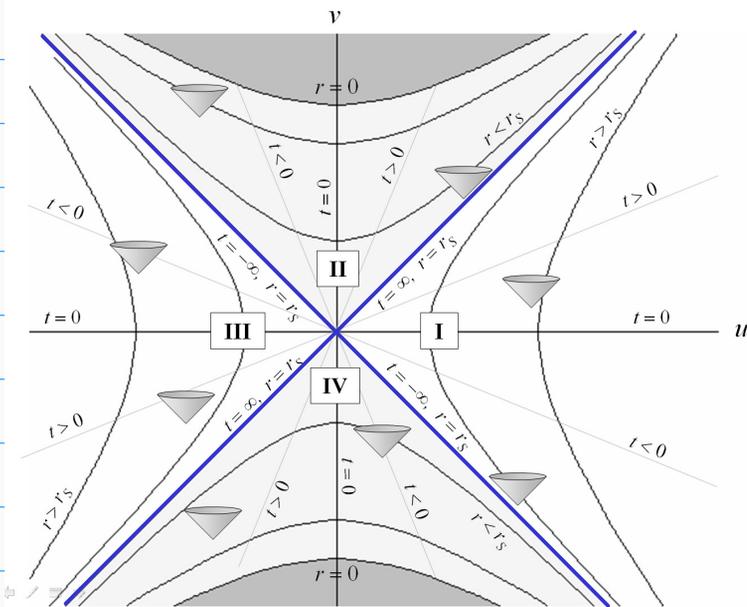
Además, la transformación muestra que  $u+v \geq 0$ . El intervalo resulta

$$ds^2 = 16 \frac{r_s}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$



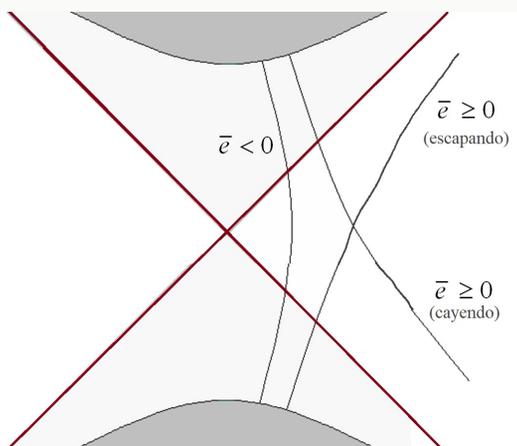
En el plano  $(v,u)$  las líneas de universo nulas, que corresponden a los rayos de luz radiales, son líneas a  $45^\circ$ . La coordenada  $v$  es siempre temporal. Los conos de luz conducen a la singularidad  $r=0$ . Nada puede escapar de la región interior al horizonte (región II).

En este gráfico llama la atención el hecho que la región  $u+v < 0$  no integre el conjunto de eventos. Esto se debe a que todos los eventos abarcados por la carta  $(t,r)$  están contenidos en las regiones exterior (I) e interior (II). Sin embargo, desde el punto de vista de las ecuaciones de Einstein el intervalo escrito en coordenadas  $(v,u)$  es solución de las ecuaciones para cualquier valor de las coordenadas tal que  $r(u,v) > 0$ . La carta  $(v,u)$  hace visible que la geometría de Schwarzschild puede ser extendida a regiones que llamaremos III (externa) y IV (interna) para verse como en la Figura:



La extensión muestra dos regiones internas (II y IV). En la región II los conos futuros conducen a la singularidad; en cambio, en la región IV los conos conducen a cruzar el horizonte y emerger en una región externa (I o III). En la región IV la singularidad está en el pasado de todos los eventos.

Así se resuelve el problema de la aparente elección caprichosa del futuro en la región interior; las dos posibles elecciones tienen una realización. Esta extensión posee un agujero negro y un agujero blanco.



**Máxima extensión analítica:** la carta de Kruskal-Szekeres cubre la máxima extensión analítica de la geometría de Schwarzschild, en el sentido que permite que toda geodésica temporal pueda extenderse en ambos sentidos (hacia el pasado o el futuro) hasta alcanzar el infinito o una singularidad).

## ▶ Otras cartas para la geometría de Schwarzschild

- Coordenadas isotrópicas:

$$ds^2 = \left( \frac{1 - \frac{r_s}{4R}}{1 + \frac{r_s}{4R}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{r_s}{4R} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad R^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$$

*En la región de campo débil satisface el gauge de Lorenz*

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) dv^2 - 2 dv dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad v \equiv ct + r + r_s \ln \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right)$$

*coordenada nula radial*

- Forma de Kerr-Schild:

$$ds^2 = \underbrace{c^2 dT^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}_{\text{Minkowski}} - \frac{r_s}{r} \underbrace{\left( c dT - dr \right)^2}_{1\text{-forma nula}, \quad c dT \equiv c dt - \frac{dr}{\frac{r}{r_s} - 1}}$$

▶ Las estrellas pasan su vida "quemando combustible" mediante reacciones de fusión nuclear, donde núcleos livianos se fusionan para dar núcleos más pesados liberando energía por defecto de masa. Esta energía genera una presión en el interior de la estrella que evita el colapso gravitatorio hacia el centro de la misma (del mismo modo que la presión hidrostática de un gas evita que el gas se precipite gravitatoriamente al fondo del recipiente que lo contiene). Así se pasa por distintas etapas. Las estrellas más jóvenes queman hidrógeno para convertirlo en helio y otros elementos livianos. Cuando el hidrógeno se acaba, la estrella se achica, la temperatura aumenta, y se encienden nuevas reacciones nucleares donde el helio se convierte en carbono ( $Z=6$ ) y oxígeno ( $Z=8$ ). Las energías liberadas por estas reacciones expanden la estrella para convertirla en una "gigante roja". Agotado el helio, todavía se libera energía mediante fusiones que llevan al silicio ( $Z=14$ ) y al hierro ( $Z=26$ ). Esta cadena finaliza en el  $^{56}\text{Fe}$  debido a su muy alta estabilidad. A partir de allí

la estrella comienza a colapsar gravitatoriamente. Como la materia de la estrella está altamente ionizada, el colapso puede ser detenido por la presión del gas degenerado de electrones; esto es lo que sucede si la masa de la estrella no supera 1,4 de la masa solar (límite de Chandrasekhar), y el resultado es una estrella "enana blanca" (una estrella de tamaño parecido al de un planeta). Las estrellas más masivas continúan el colapso; los electrones se combinan con protones para formar neutrones. Si la masa de la estrella no supera unas 2 masas solares, las interacciones cuánticas entre neutrones pueden detener el colapso; se forma una estrella de neutrones, con un radio de decenas de kilómetros y una densidad comparable a la de un núcleo atómico. Si la masa supera unas 3 masas solares la estrella continúa el colapso para formar un agujero negro (se compactará detrás de su horizonte). Las estrellas muy masivas pueden explotar como supernovas, creando elementos pesados, y dejando residuos como un agujero negro o una estrella de neutrones rápidamente rotante (púlsar), y una nebulosa de materia dispersa.

Cygnus X-1 es una binaria que contiene un agujero negro que "acreta" materia de su compañera. Al caer hacia el agujero negro, la materia del disco de acreción se calienta emitiendo rayos X. Fue descubierta en 1964 como fuente de rayos X, hasta que se determinó que es una binaria con un agujero negro de 14 masas solares, siendo el primer agujero negro descubierto. Muchas otras binarias de este tipo han sido observadas. Fusiones de agujeros negros de decenas de masas solares son detectadas por su emisión de ondas gravitatorias. Existen agujeros negros de millones a miles de millones de masas solares en los centros de galaxias; muchos de ellos acretan masa vecina y emiten poderosos jets de partículas cargadas y radiación electromagnética. El agujero negro de nuestro centro galáctico se detecta por el movimiento orbital de estrellas próximas (1). En 2019 se confeccionó la primera imagen de una esfera de fotones (centro de la galaxia M87, con la red de radiotelescopios EHT) (2).

1) <https://www.eso.org/public/videos/eso1835c/>

2) <https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2019/4/19/how-scientists-captured-the-first-image-of-a-black-hole/>

### ► Fuerza sobre una partícula estática

Sea una partícula que se mantiene en una línea de universo de coordenadas  $r > r_s$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  constantes. Su cuadrivelocidad es  $U^i = \frac{dz^i}{dz} = (c \frac{dt}{dz}, 0, 0, 0)$

Como  $c dz = ds = g_{00}^{1/2} c dt \Rightarrow U^i = (c g_{00}^{-1/2}(r), 0, 0, 0)$

Está claro que esta línea de universo tiene cuadiaceleración no nula (no es una geodésica): se precisa de una fuerza externa para mantener la partícula en coordenadas fijas). La cuadiaceleración  $D\bar{U}/Dz$  es

$$\left(\frac{D\bar{U}}{Dz}\right)^i = \frac{dU^i}{dz} + \underbrace{\Gamma_{jk}^i}_{=0 \text{ (res cte.)}} U^j U^k = \Gamma_{00}^i c^2 g_{00}^{-1}$$

donde  $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\ell} (2 g_{\ell 0,0} - g_{00,\ell}) = (0, -\frac{1}{2} g^{rr} g_{00,r}, 0, 0)$

Entonces  $\left(\frac{D\bar{U}}{Dz}\right)^i = (0, \frac{c^2}{2} \partial_r (1 - \frac{r_s}{r}), 0, 0) = (0, \frac{GM}{r^2}, 0, 0)$

La partícula es mantenida en coordenadas  $r > r_s$  (así la línea de universo es temporal),  $\theta$ ,  $\varphi$  fijas mediante una fuerza  $\bar{K}$  que equilibra el efecto de la gravedad:

$$\bar{K} = m \frac{D\bar{U}}{Dz} = \frac{GMm}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$

La apariencia newtoniana del resultado es engañosa. El módulo de  $\bar{K}$  involucra a  $|g_{rr}|^{1/2}$ ; de modo que  $|\bar{K}|$  diverge para  $r \rightarrow r_s$ , y es newtoniano para  $r \rightarrow \infty$ .

Como  $M$  es una constante de integración en las ecuaciones de Einstein, cabe preguntarse si no es posible tomar una constante de integración  $M < 0$  para obtener una repulsión gravitatoria.

Nótese que si  $M < 0$  entonces no hay horizonte de eventos; la singularidad  $r=0$  estaría "desnuda". En 1969 Penrose conjeturó que el colapso gravitatorio nunca conduce a singularidades desnudas ("conjetura del censor cósmico").