Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 19

Distancia luminosa.
Constituyentes del fluido. Constante cosmológica.
Evolución del universo. Universo de de Sitter

Habíamos encontrado una relación lineal entre z y la distancia actual $\sigma_r = a_r|\Delta\chi|$ entre emisor y receptor, valiéndonos de una aproximación de orden cero en el integrando de

$$\sigma_r = a_r|\Delta\chi| = \int_0^z \frac{c\, dz'}{H(z')}$$

La función H(z) en el integrando expresa la forma en que evoluciona el factor de escala del universo, evolución que será determinada por las ecuaciones de Einstein. Aunque todavía no estamos resolviendo la dinámica para hallar esa evolución, podemos lograr una aproximación más fina desarrollando el integrando a primer orden en z, lo que supone contar con los valores actuales de H y su primera derivada:

$$H(z) = H_r + \left.\frac{dH}{dz}\right|_{z=0} z + \dots = H_r + \left.\frac{dH}{dt}\frac{dt}{dz}\right|_{t_r} z + \dots$$

Ya hemos mostrado que $\dfrac{dt}{dz} = -\dfrac{a(t)}{a_r H_r}$

Además,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\dot a}{a} = \frac{\ddot a}{a} - \frac{\dot a^2}{a^2} = -H^2(1+q)$$

donde definimos el parámetro de desaceleración q como

$$\boxed{q(t) \doteq -\frac{\ddot a\, a}{\dot a^2}}$$

Entonces, en el desarrollo de H(z) tenemos que

$$H(z) = H_r + H_r(1+q_r)z + \dots$$

$$H^{-1} \simeq H_r^{-1}\left[1 - (1+q_r)z\right]$$

Reemplazando en la integral, la distancia actual emisor-receptor resulta

$$a_r|\Delta\chi| = \sigma_r \simeq \frac{c}{H_r}\int_0^z \left[1-(1+q_r)z'\right]dz' = \frac{c}{H_r}\left[z-\frac{1}{2}(1+q_r)z^2\right]$$

Distancia luminosa

Una relación como la acabamos de obtener podría usarse para determinar H_r y q_r a partir de la observación de z y σ_r. Pero no tenemos un acceso directo a σ_r. En Astronomía se utiliza el flujo de energía F (energía emitida por unidad de tiempo y de superficie atravesada) y la luminosidad L del objeto emisor (energía emitida por unidad de tiempo), para definir una noción de distancia llamada distancia luminosa d_L tal que

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

Nótese que se usa una relación euclidiana en la definición, pues $4\pi d_L^2$ es el área de una esfera de radio d_L (imaginemos al objeto emisor en el centro de esa esfera, y el detector sobre la esfera, a una distancia d_L del emisor, recogiendo un flujo F a través de la superficie de su boca). Mientras que el flujo F es accesible a la medición, la luminosidad del objeto L suele inferirse de alguna manera (por comparación con objetos similares de luminosidad conocida, por ejemplo). Nos gustaría entonces traducir la relación entre σ_r y z que acabamos de obtener a una relación entre d_L y z. Para ello debemos encontrar la relación entre σ_r y d_L. Por cierto en una geometría pseudo-euclidiana estas dos cantidades son iguales, pero no lo son en la geometría FRW. No son iguales porque debemos tener en cuenta que en F la energía de los fotones se debilita por el corrimiento al rojo cosmológico, y que el número de fotones por unidad de tiempo también se debilita debido al "retraso" producido por la expansión del universo. Además debemos considerar la curvatura espacial.

La luminosidad L es el número de fotones emitidos por unidad de tiempo, multiplicado por la energía de cada fotón:

$$L = \frac{\delta N}{\delta t_e}\, h\nu_e \qquad \text{pero} \qquad \begin{aligned} \nu_r &= (1+z)^{-1}\,\nu_e \\ \delta t_r &= (1+z)\,\delta t_e \end{aligned}$$

(la frecuencia disminuye, y el tiempo entre fotones se agranda; ambos efectos son el mismo efecto). El flujo recibido está debilitado por un factor $(1+z)^2$. Por otro lado la energía recibida se reparte sobre el área de una esfera, que en la geometría FRW es $4\pi\, a_r^2 f(|\Delta\chi|)^2$ (si se prefiere podemos pensar que la fuente está en $\chi_e = 0$; de ese modo es $\Delta\chi = \chi_r$). Entonces el flujo es

$$F = \frac{L}{4\pi\, a_r^2 f(|\Delta\chi|)^2 (1+z)^2}$$

La función $f(\chi)$ puede ser χ, senχ o senhχ. En un desarrollo a segundo orden en z, no cometeremos error si reemplazamos $f(|\Delta\chi|) \simeq |\Delta\chi|$ en los tres casos; en efecto, $f(\chi) \simeq \chi + O(\chi^3)$, y al orden más bajo es $|\Delta\chi| \simeq \frac{c\,z}{a_r H_r}$. Entonces,

$$\boxed{d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{\frac{1}{2}} = a_r\, f(|\Delta\chi|)\,(1+z) \simeq \sigma_r\,(1+z)}$$

Reemplazando en la relación entre σ_r y z:

$$\frac{d_L}{1+z} \simeq \frac{c}{H_r}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_r)\,z^2\right]$$

Entonces

$$(4{,}3\,\mathrm{Gpc})^{-1} \qquad \boxed{c^{-1} H_r\, d_L \simeq z + \frac{1}{2}(1-q_r)\,z^2}$$

La determinación de d_L requiere conocer el valor de L , lo cual supone establecer un conjunto de objetos astronómicos que se comporten como candelas patrón. Esta relación permitió descubrir que la expansión del universo se acelera: $q_r < 0$ (Perlmutter, Schmidt, Riess, 1998; Premio Nobel de Física 2011).

Constituyentes del universo

El tensor de energía-momento del fluido isótropo y homogéneo que llena el universo, y actúa como fuente de las ecuaciones de Einstein, tiene la forma que conocemos en Relatividad Especial (en acoplamiento mínimo no deberían aparecer nuevos términos),

$$T^i{}_j = (\rho + p)\, c^{-2}\, U^i U_j - p\, \delta^i_j$$

signatura +---

donde ρ, p son los valores de densidad de energía y presión en el sistema propio del fluido. Precisamente en la carta comóvil es $U^i = dx^i/d\tau = (c,0,0,0)$; luego $U_j = (c,0,0,0)$ en la signatura +---. Así es

$$T^i{}_j = \mathrm{diag}\,(\rho, -p, -p, -p)$$

El tensor $T^i{}_j$ cumple la ecuación de conservación $T^i{}_{j;i} = 0$:

$$0 = T^i{}_{j,i} + \underbrace{\Gamma^i_{ki}}_{\partial_k \ln\sqrt{|g|}} T^k{}_j - \Gamma^k_{ji}\, T^i{}_k$$

De aquí saldrá una relación entre a, ρ y p como funciones de t. Para $j=0$ es

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_k\left(\sqrt{|g|}\, T^k{}_0\right) - \Gamma^k_{0i}\, T^i{}_k = 0$$

En el primer término sólo cuenta k=0, y en el segundo usaremos que *

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad , \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = c^{-1} H\, \delta^\alpha_\beta$$

Así resulta

$$\frac{1}{a^3}\,\partial_0\left(a^3 \rho\right) = -3\, p\, c^{-1}\, \frac{\dot a}{a}$$

* Nótese que la carta comóvil no es localmente inercial.

Es decir:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\rho\, a^3\right) = -p\,\frac{d}{dt}a^3}$$

La conservación de T^{ij} significa que la variación de la energía contenida en un volumen comóvil (definido por valores constantes de $\Delta\chi$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$) es igual al trabajo de volumen realizado por la presión, que es la ley para la expansión adiabática de un fluido perfecto.

Ecuación de estado

Para resolver la ecuación del fluido precisamos una ecuación de estado (una relación entre presión y densidad de energía). Trabajaremos con una ecuación sencilla que nos permite abarcar los casos de interés:

$$\boxed{p = w\,\rho}$$

i) w=0 : materia compuesta por partículas que no chocan ("polvo")

ii) w=1/3 : gas de fotones; y en forma aproximada para partículas ultra-relativistas (energía cinética mucho mayor que energía en reposo)

iii) constante cosmológica: ya mencionamos la posibilidad de incluir en las ecuaciones de Einstein el término de constante cosmológica,

$$R^i{}_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R - \Lambda\,\delta^i_j = k\,T^i{}_j$$

signatura + - - -

Pasando ese término a la derecha, se vería como un tensor de energía-momento $T_\Lambda{}^i{}_j = \frac{\Lambda}{k}\,\mathrm{diag}(1,1,1,1)$ que corresponde a

$$\boxed{\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{k} = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G} \qquad w_\Lambda = -1}$$

Utilizaremos la constante cosmológica como si se tratara de uno más de los constituyentes del fluido de materia-energía que llena el universo.

Ahora podemos resolver la ecuación del fluido reemplazando la ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = -w \rho \frac{d}{dt} a^3$$

$$\Rightarrow \quad (1+w)\rho \frac{d}{dt} a^3 + a^3 \frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\rho a^{3(1+w)}\right) = 0$$

$$\boxed{\rho(t)\, a(t)^{3(1+w)} = \text{constante}}$$

i) w=0 : $\rho a^3 = cte$ (la energía contenida en el volumen comóvil -básicamente, el número de partículas- no cambia)

ii) w=1/3 : $\rho a^3 = \frac{cte}{a}$ (la energía del gas de fotones disminuye con la expansión del universo debido al corrimiento al rojo)

iii) w= -1 (constante cosmológica): $\rho_\Lambda = cte$

En un universo en expansión el fluido con mayor valor de w domina hacia el pasado, porque su densidad $\rho(t)$ crece más rápido a medida que el factor de escala $a(t)$ se vuelve más chico. Así el gas de fotones dominó en el pasado sobre la materia en forma de polvo, mientras que en el presente la materia domina sobre ese fluido de radiación. El fluido con menor valor de w es el que prevalece finalmente, siempre que la expansión continúe.

Evolución del universo

Debido a las simetrías de la geometría que surgen del Principio cosmológico, las ecuaciones de Einstein contienen sólo dos ecuaciones diferentes: la componente diagonal temporal, y una cualquiera de la diagonal espacial,

temporal:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\dot{a}^2}{a^2}}_{H^2} + \frac{K c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t)} \qquad \text{(I)}$$

ecuación de valores iniciales

espacial:

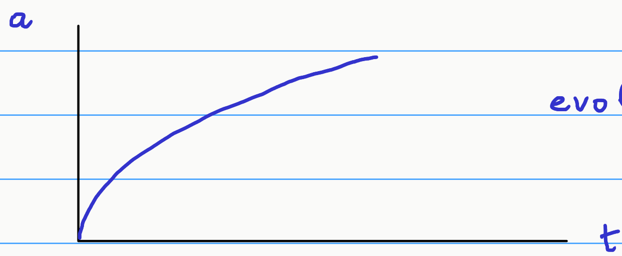
$$\boxed{\underbrace{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}}_{2\dot{H}+3H^2} + \frac{K c^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p(t)} \qquad \text{(II)}$$

La segunda puede obtenerse derivando la primera y combinándola con la conservación de la energía-momento. Las ecuaciones no son independientes porque están ligadas por la conservación automática. En todo caso, la primera, que es de primer orden, manda porque restringe los valores iniciales de la segunda (que es de segundo orden).

Si restamos estas ecuaciones obtendremos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{c^2}\left(\overset{w\rho}{\overset{\downarrow}{p}} + \frac{\rho}{3}\right)$$

Esto es interesante, porque dice que la expansión se frena siempre que el fluido tenga $w > -1/3$. Como dijimos, hacia el pasado domina el fluido con mayor w ; basta entonces que el universo contenga un fluido con $w > -1/3$ para garantizar que $\ddot{a} < 0$, al menos en el pasado, y que el factor de escala se anule en algún tiempo pasado finito. En ese caso, la evolución del universo comienza en un Big-Bang donde las distancias se anulan y las densidades divergen.



evolución con $\dot{a}>0$ (expansión), y $\ddot{a}<0$ (desaceleración)

eligiendo $t=0$ cuando $a=0$

Las observaciones muestran que la expansión actual es acelerada, lo que indica la existencia de un constituyente con $w<-1/3$ que domina en la era actual, luego del dominio de la radiación primero, y la materia después.

Solución para espacio plano y un único constituyente

Si el espacio es plano (K=0), conviene combinar las ecuaciones de Einstein en la siguiente forma:

$3(\mathrm{I})$: $\quad 3H^2 = \dfrac{8\pi G}{c^2}\rho \quad , \qquad 3(\mathrm{I})-(\mathrm{II})$: $\quad -2\dot{H} = \dfrac{8\pi G}{c^2}\underbrace{(\rho + p)}_{(1+w)\rho}$

Dividiéndolas: $\quad -\dfrac{\dot{H}}{H^2} = \dfrac{3}{2}(1+w) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\dfrac{1}{H}\right)^{\bullet} = \dfrac{3}{2}(1+w)}$

Si $w \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{1}{H} = \dfrac{3}{2}(1+w)\,t}$ (elegimos que $t=0$ sea el Big-Bang: $a(0)=0$)

La edad de este universo es $\boxed{t_{hoy} = \dfrac{2}{3(1+w)\,H_{hoy}}}$

donde $H_{hoy} = 70 \text{ km s}^{-1}\text{ Mpc}^{-1} \sim \dfrac{1}{14\times 10^9 \text{ años}}$

si $w=0$, la edad resulta chica: las estrellas viejas son más antiguas

Como $H = \dfrac{d}{dt}\ln a \Rightarrow \ln a = \dfrac{2}{3(1+w)}\displaystyle\int \dfrac{dt}{t} \Rightarrow \boxed{a(t) = \text{cte } t^{\frac{2}{3(1+w)}}}$

Combinando los resultados:

$$H^2 \propto t^{-2} \propto a^{-3(1+w)} \propto (1+z)^{3(1+w)} \Rightarrow \boxed{H^2(z) = H^2_{hoy}\,(1+z)^{3(1+w)}}$$

Por otro lado, la densidad de energía del único constituyente cumple que

$$\rho(t)\, a(t)^{3(1+w)} = \text{constante} \Rightarrow \rho(t) \propto t^{-2} \propto H^2$$

(también resulta de la ecuación de valores iniciales)

Universo de de Sitter

Si el único constituyente es la constante cosmológica ($w = -1$) entonces H es constante. Por lo tanto el factor de escala crece exponencialmente,

$$3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\rho_\Lambda = c^2\Lambda \Rightarrow \boxed{a(t) = \text{cte}\ \exp\left[\sqrt{\tfrac{\Lambda}{3}}\, c\, t\right]}$$

universo de de Sitter ($K = 0$)

Einstein y la constante cosmológica. Universo estático de Einstein

Einstein introdujo la constante cosmológica por dos motivos. Por un lado le molestaba que las ecuaciones de vacío tuvieran a la geometría de Minkowski como solución. Pensaba que esto violaba el espíritu del Principio de Mach, pues esa geometría posee sistemas de referencia privilegiados sin materia en el universo a la cual atribuir ese privilegio (un privilegio sin causa física). Por el otro lado, Einstein era consciente de que las ecuaciones con materia daban soluciones que evolucionaban en el tiempo; pero Einstein pensaba que el universo era estático. Con la introducción de la constante cosmológica, Einstein buscó eliminar las soluciones de vacío, y además obtener una solución cosmológica estática. En el universo estático de Einstein hay dos constituyentes: la constante cosmológica ($w = -1$), y materia en forma de polvo ($w = 0$). La solución estática se logra con K > 0. Einstein quedó satisfecho con un universo estático y cerrado, porque careciendo de borde no precisaba de condiciones de contorno para ajustar la solución; así la solución parecía satisfacer el Principio de Mach.

Las ecuaciones estáticas son:

$$(\mathrm{I}): \frac{K c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_{mat} + \rho_\Lambda) \quad , (\mathrm{II}): \frac{K c^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}(\underbrace{p_{mat}}_{=0} + \underbrace{p_\Lambda}_{=-\rho_\Lambda})$$

Restándolas: $0 = \rho_{mat} - 2\rho_\Lambda \Rightarrow \boxed{\rho_{mat} = 2\rho_\Lambda = \frac{c^4}{4\pi G}\Lambda}$

$$\frac{K c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2}\rho_\Lambda = c^2\Lambda \Rightarrow \boxed{\frac{K}{a^2} = \Lambda}$$

$\leftarrow$ universo de Einstein ($\Lambda > 0, K > 0$)

Luego veremos que el universo de Einstein es una solución inestable.

La solución de vacío de de Sitter

Inmediatamente después de que Einstein se valiera de la constante cosmológica para impedir que Minkowski fuera una solución de vacío, de Sitter encontró una solución de vacío con constante cosmológica libre de singularidades. Más tarde Einstein dirá que la introducción de la constante cosmológica en sus ecuaciones fue el más grande desacierto de su vida. Hoy en día, la constante cosmológica parece ser la mejor forma de explicar la aceleración de la expansión del universo descubierta en 1998 (Perlmutter, Riess).

Como toda solución de vacío, la solución de de Sitter tiene escalar de curvatura constante. En efecto tomando la traza de las ecuaciones de Einstein de vacío,

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad R - 2R - 4\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad R = -4\Lambda$$

$\leftarrow$ signatura + - - - signatura + - - -

La geometría de de Sitter puede presentarse en diferentes cartas. En una de esas cartas corresponde al universo plano de de Sitter, que ya hemos visto.

Pero de Sitter (1917) obtuvo la solución en una forma estática:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}\xi^2\right) c^2 dT^2 - \frac{d\xi^2}{1 - \frac{\Lambda}{3}\xi^2} - \xi^2\left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

El cambio de coordenadas que lleva esta solución a la forma de universo plano fue hallado por Lemaître en 1925, y es válido si $\Lambda > 0$:

$$K = 0, \qquad a(t) = \text{cte} \exp\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, ct\right],$$

y existe otra carta donde la solución se ve como un universo cerrado,

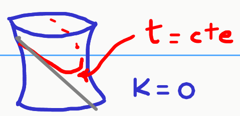
$$K = 1, \qquad a(\bar{t}) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, c\bar{t}\right]$$

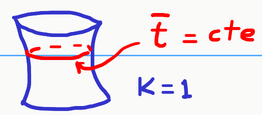
Si $\Lambda < 0$ existe una carta donde la solución se ve como un universo abierto:

$$K = -1, \qquad a(t') = \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}} \cos\left[\sqrt{\frac{-\Lambda}{3}}\, ct'\right]$$

"anti-de Sitter"

Siendo una solución de vacío, la geometría de de Sitter carece de un fluido que privilegie una foliación. Puede demostrarse que la solución de de Sitter es la geometría de un hiperboloide de 4 dimensiones sumergido en un espacio de Minkowski de 5 dimensiones. Es una solución de simetría máxima, ya que el grupo de Lorentz en 5 dimensiones (10 generadores) deja invariante el hiperboloide. Si $\Lambda > 0$ el hiperboloide puede ser "cortado" (foliado) en un espacio homogéneo y un tiempo de dos maneras diferentes, lo que da lugar a los dos posibles universos de de Sitter (plano y cerrado). En el caso plano (K=0) la carta sólo cubre la mitad del hiperboloide:





Si $\Lambda < 0$ (anti-de Sitter), el hiperboloide está volcado y sólo permite realizar un universo abierto ($K = -1$).

Si $\Lambda = 0$ la solución de de Sitter se vuelve la geometría de Minkowski, que también admite ser "cortada" de distintas formas. Así podemos verla como un universo plano con factor de escala constante, o como el universo abierto de Milne:

$$K = -1, \qquad a(t') = ct'$$