Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 20

Fondo cósmico de microondas. Eras dominadas por la radiación y la materia. Materia y energía oscuras

En la clase anterior vimos cómo usar las ecuaciones de Einstein para obtener la relación entre el parámetro de Hubble H y el corrimiento al rojo z en un universo plano con un único constituyente. Esta relación es indispensable para el cálculo de la relación entre la distancia actual a una fuente, σ_r, y su corrimiento al rojo z (ver la integral para calcular σ_r), y con ello obtener la relación entre la distancia luminosa d_L, z y el valor actual del parámetro de Hubble H_{hoy}.

Pero el universo real posee varios constituyentes: materia, radiación, etc. Además, la cuestión de si es o no espacialmente plano debe ser resuelta mediante observaciones*. Las densidades de energía de los distintos constituyentes pueden se mejor apreciadas si son referidas a un estándar de densidad que resulte práctico. Referiremos las densidades a la densidad necesaria para que el universo sea espacialmente plano; ese valor crítico es (sale de la ecuación de valores iniciales $\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho$):

$$\rho_{crítico}(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2$$

Según el valor actual del parámetro de Hubble, el valor actual de $\rho_{crítico}$ es

$$\rho_{crítico}(hoy)\, c^{-2} \simeq 0{,}9 \times 10^{-26} \frac{kg}{m^3}$$

Para describir las densidades de los constituyentes en términos de fracciones de $\rho_{crítico}$, definimos

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{crítico}(t)}$$

* Por cierto la geometría FRW es espacio-temporalmente curva. Su escalar de curvatura es

$$R = -\frac{6}{c^2}\left[(1-q)H^2 + \frac{Kc^2}{a^2}\right] \qquad \text{signatura } (+---)$$

La materia luminosa observada hoy tiene una densidad promedio de

$$\Omega^{\text{mat luminosa}}(\text{hoy}) \sim 0{,}005$$

Sin embargo, se observan efectos debido a materia oscura en los halos de las galaxias (Vera Rubin, 1980) y cúmulos de galaxias, donde la presencia de materia que no emite luz se infiere mediante la observación del movimiento de estrellas en los halos, y los efectos de lente gravitatoria producidos por la deflexión de la luz debida a materia no visible. Las evidencias de materia oscura elevan la densidad de materia al valor

$$\Omega^{\text{mat}}(\text{hoy}) \sim 0{,}3$$

lo que significa que el 99% de la materia en el universo es materia oscura. Buena parte de esta materia oscura es de naturaleza desconocida. Una parte es, sin duda, materia ordinaria (bariónica) distribuida en agujeros negros, enanas blancas, protoestrellas como las enanas marrones, planetas, etc. Pero se sabe que una cantidad muy grande de materia bariónica entraría en conflicto con la nucleosíntesis (la creación de los núcleos de los elementos químicos en el universo primitivo) pues llevaría a una abundancia de deuterio incompatible con el valor observado. Para que esto no suceda, el 85 % de Ω^{mat} debería ser materia oscura no bariónica ($\Omega^{\text{barion}} \simeq 0{,}04$); la única contribución conocida a este 85% es la de los neutrinos, pero es insuficiente.

El universo está lleno de un gas de fotones: el fondo cósmico de microondas (CMB). Estos fotones no fueron emitidos por la materia luminosa sino que provienen del universo primitivo, y son anteriores a la época de formación de estrellas y galaxias. El 99,97% de la densidad de energía electromagnética en el universo se debe al fondo cósmico de microondas.

Cada lugar del universo es alcanzado por fotones de CMB, desde todas las direcciones. El fondo cósmico de radiación se caracteriza por tener el espectro de un cuerpo negro a la temperatura de 2,725 K. La radiación posee una alta isotropía, pues esta temperatura sólo exhibe fluctuaciones en la siguiente cifra significativa. Según la curva de radiación de un cuerpo negro, una temperatura de unos 3K implica que la densidad de energía es máxima en longitudes de onda del orden de 1mm (300 GHz, 1,24 $\times 10^{-3}$ eV). La densidad de energía del gas de fotones es

$$\Omega^{fot}(\text{hoy}) \simeq 5 \times 10^{-5}$$

Esta relación entre temperatura y densidad surge de la ley de Stefan-Boltzmann

$$\rho^{fot} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^3 h^3} T^4 = 7{,}56 \times 10^{-16} \, T^4 \text{ J m}^{-3} \text{K}^{-4}$$

Como vimos, la densidad de los fotones va como a^{-4}; por lo tanto la temperatura es proporcional a a^{-1}. La temperatura del gas de fotones aumenta hacia el pasado y disminuye hacia el futuro. También la temperatura de la materia disminuye al expandirse adiabáticamente a medida que el universo evoluciona. La historia del universo puede ser contada en escalas de tiempo cosmológico t, de corrimiento al rojo z, o de temperatura T del CMB.

En la época en que la temperatura del gas de fotones era de 3000 K ($k_B T \simeq$ 0,26 eV) la cola del espectro de cuerpo negro tenía suficiente cantidad de fotones con la energía necesaria para ionizar toda la materia (la energía de ionización del hidrógeno es de 13,6 eV). Esto es así gracias a que el universo contiene muchos más fotones que protones; hoy en día hay 400-500 fotones por cm3, pero menos de un protón por m3 (según resulta del valor de Ω^{barion}).

A temperaturas mayores que 3000 K la materia estaba totalmente ionizada. En estas condiciones el universo era opaco a la propagación de la luz, porque los fotones eran dispersados por los electrones libres (scattering de Thomson).

Cuando el universo se enfrío por debajo de los 3000 K, se desacoplaron la radiación y la materia, se formaron átomos de hidrógeno y helio, y los fotones comenzaron a viajar libremente*. Como la temperatura de los fotones en el desacople es $\sim$3000 K, y la actual es $\sim$3 K, tenemos

$$1000 \sim \frac{T_{desacople}}{T_{hoy}} \underset{T^{fotones} \propto a^{-1}}{=} \frac{a_{hoy}}{a_{desacople}} = 1+z \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{desacople} \sim 1000}$$

En la era actual la materia domina sobre la radiación ($\Omega^{mat}(hoy) >> \Omega^{fot}(hoy)$). Pero hacia el pasado el dominio se invierte, pues la densidad de energía de los fotones crece más rápido que la de la materia. La era del dominio de la radiación se desarrolló hasta que se igualaron ambas densidades:

$$\rho^{mat}(t) = \rho^{mat}(hoy)\,\frac{a(hoy)^3}{a(t)^3} = \rho^{mat}(hoy)\,(1+z)^3$$

$$\rho^{fot}(t) = \rho^{fot}(hoy)\,\frac{a(hoy)^4}{a(t)^4} = \rho^{fot}(hoy)\,(1+z)^4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho^{mat}(t)}{\rho^{fot}(t)} = \frac{\rho^{mat}(hoy)}{\rho^{fot}(hoy)}\,\frac{1}{1+z} = \frac{\Omega^{mat}(hoy)}{\Omega^{fot}(hoy)}\,\frac{1}{1+z} \sim \frac{0{,}3}{5\times 10^{-5}}\,\frac{1}{1+z}$$

Las densidades se igualan para z $\sim$6000; el dominio de la radiación finalizó antes del desacople.

* El medio intergaláctico se ionizará casi completamente con la emisión UV de las primeras estrellas y galaxias, en z $\sim$10. Pero su densidad es lo suficientemente baja para no afectar la propagación de fotones.

Podemos estimar el tiempo del desacople suponiendo que la materia dominó hasta hoy (luego vamos a revisar esta suposición) y que el universo es plano. En ese caso el factor de escala va como $t^{2/3}$; entonces

$$1+z = \frac{a(hoy)}{a(t)} = \left(\frac{t_{hoy}}{t}\right)^{2/3}$$

Si $t_{hoy} \sim 14 \times 10^9$ años entonces el tiempo para z ~1000 es

$$t_{desacople} \sim 400.000 \text{ años}$$

El fondo cósmico de microondas fue descubierto por Penzias y Wilson en 1965. Fue identificado como una reliquia del universo primitivo por Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson, lo que dio un sustento definitivo al modelo de Big-Bang. Antes del desacople la radiación interactuaba con la materia ionizada; las pequeñas anisotropías de CMB se corresponden con inhomogeneidades en la densidad de materia en el momento de desacople, que evolucionarán hasta formar las estructuras del universo actual (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.).

La evolución térmica del universo puede continuarse hacia eras pasadas más remotas. Así, a la temperatura de 10^9 K ($k_B T \sim 0{,}1$ MeV) los neutrones se reunían con protones para formar deuterones y núcleos de helio. Hasta esa época, que es la época de la nucleosíntesis primordial, los fotones habían tenido energías suficientemente altas para impedir esas fusiones. Podemos pensar en épocas más remotas donde los quarks que constituyen los hadrones (bariones y mesones) estaban libres, y había abundancia de leptones masivos que luego se aniquilarían de a pares dando lugar a una cantidad importante de neutrinos y fotones (el descenso de la temperatura dejó a éstos sin la energía suficiente para recrear a aquellos). Los neutrinos se desacoplaron antes que los fotones, cuando $T \sim 5 \times 10^9$ K. Los neutrinos primordiales fueron ultra-relativistas hasta z $\sim$ 500. Hoy en día se han enfriado a $1{,}95$ K, y forman un gas de materia leptónica de $\Omega^{\nu} = 0{,}68\, \Omega^{fot}$ (el $0{,}68$ depende del número de especies de neutrinos; corresponde a 3 especies).

Universo con varios constituyentes

Las ecuaciones que describen el comportamiento del universo son la ecuación de conservación de la energía

$$\underbrace{\rho(t)\; a(t)^{3(1+w)}}_{\text{constante}} = \rho(\text{hoy})\; a(\text{hoy})^{3(1+w)} = \rho_{crít}(\text{hoy})\; \Omega(\text{hoy})\; a(\text{hoy})^{3(1+w)}$$

y la ecuación de valores iniciales,

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t) = \underbrace{\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_{crít}(\text{hoy})}_{H(\text{hoy})^2}\; \Omega(\text{hoy}) \left(\frac{a(\text{hoy})}{a(t)}\right)^{3(1+w)}$$

$1+z$

Si existen varios constituyentes la densidad de energía se descompone en una suma de términos (ignorando interacciones):

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = H_0^2 \sum_i \Omega_{0i}\,(1+z)^{3(1+w_i)} \qquad H_0 \equiv H(\text{hoy}),\ \text{etc.}$$

Si especializamos la ecuación en el tiempo actual (z=0):

$$H_0^2 + \frac{Kc^2}{a_0^2} = H_0^2 \sum_i \Omega_{0i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\frac{Kc^2}{a_0^2} = H_0^2\left(1 - \sum_i \Omega_{0i}\right)}$$

(cuando los Ω_i suman 1, la densidad es crítica y K=0). Reemplazando el resultado en la ecuación anterior tenemos que

$$H^2 = H_0^2\left(\sum_i \Omega_{0i}\,(1+z)^{3(1+w_i)} + \left(1 - \sum_i \Omega_{0i}\right)\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right)$$

$1+z$

$$\boxed{H(z)^2 = H_0^2\left(\sum_i \Omega_{0i}\,(1+z)^{3(1+w_i)} + \left(1-\sum_i \Omega_{0i}\right)(1+z)^2\right)}$$

Nótese que la curvatura espacial contribuye a H(z) como si se tratara de un fluido con una ecuación de estado con $w_K = -\frac{1}{3}$, y una fracción de energía $\Omega_K = 1 - \sum_i \Omega_{0i}$ (dependiente de las demás).

Esta expresión para H(z), que resulta de resolver la dinámica del universo, entra en la expresión que relaciona z con la distancia actual a la fuente,

$$\sigma_r = a_r|\Delta\chi| = \int_0^z \frac{c\,dz'}{H(z')} ,$$

que a su vez se relaciona con la distancia luminosa d_L.

La expansión acelerada del universo. Energía oscura

El resultado exacto para H(z) que acabamos de obtener puede compararse con el desarrollo en serie donde definimos el parámetro de desaceleración:

$$H(z) = H_r + H_r\,(1+q_r)\,z + \dots$$

En efecto, desarrollando a primer orden el resultado exacto obtenemos

$$H(z)^2 = H_0^2\left(1 + 2z + \sum_i \Omega_{0i}\,(1+3w_i)\,z\right) + \dots$$

Entonces

$$\boxed{q_0 = \frac{1}{2}\sum_i \Omega_{0i}\,(1+3w_i)}$$

(por supuesto, esta relación entre q y los Ω_i se cumple en el instante actual o en cualquier otro instante).

El parámetro de desaceleración sería positivo para constituyentes normales. Pero en 1998 (Riess) y 1999 (Perlmutter) hubo dos grupos que separadamente observaron la relación d_L vs. z hasta valores de z del orden de 1 (usaron supernovas "Ia" como candelas patrón), y concluyeron que el valor actual de q es negativo (recordemos que la relación es $c^{-1} H_r d_L = z + \frac{1}{2}(1 - q_r) z^2 + \dots$). De acuerdo a esas observaciones, el valor actual de q es $q(\text{hoy}) \sim -0,6$. Este descubrimiento implica la existencia de un constituyente con $w < -\frac{1}{3}$ que genéricamente se designa con el nombre de energía oscura.

El candidato más simple para la energía oscura es la constante cosmológica ($w = -1$), lo que parece estar confirmado mediante otras determinaciones observacionales. En tal caso el universo actual estaría dominado por dos constituyentes: la materia ($w = 0$) y la constante cosmológica ($w = -1$). Reemplazando en la expresión para q:

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0^{\text{mat}} - \Omega_0^{\Lambda}$$

donde

$$\Omega^{\Lambda} = \frac{\overset{\Lambda/k}{\rho_\Lambda}}{\rho_{crit}} = \frac{\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}}{\frac{3 c^2 H^2}{8\pi G}} = \frac{c^2 \Lambda}{3 H^2}$$

La determinación observacional de q_0 no permite obtener las fracciones actuales de los constituyentes; sólo da una relación entre las mismas. Se requiere una observación de otro tipo para romper la "degeneración". Una segunda relación entre Ω^{mat} y Ω^{Λ} se obtiene del tamaño característico de las fluctuaciones de temperatura en el fondo cósmico de microondas. Estas fluctuaciones provienen de las interacciones entre fotones, electrones y bariones antes del desacople (o recombinación). La materia buscaba aglutinarse gravitatoriamente y la presión de los fotones se lo impedía.

La competencia entre estas dos tendencias opuestas generaban oscilaciones de densidad, presión y temperatura. Estas oscilaciones poseen una escala de distancia característica (el "horizonte de sonido"), que quedó impresa en las fluctuaciones de la temperatura del fondo cósmico de microondas cuando la radiación se desacopló de la materia. Esta distancia característica tiene un valor conocido, que subtiende un ángulo de 1° si el universo es plano. En cambio, si el universo es cerrado o abierto el ángulo subtendido sería distorsionado por la curvatura. Este ángulo fue observado por primera vez en 2000 (BOOMERanG), junto con otras características de las fluctuaciones de temperatura en la CMB. El valor medido favoreció al universo plano; esto implica que las fracciones de los constituyentes deberían sumar 1:

$$\Omega_0^{mat} + \Omega_0^{\Lambda} \simeq 1$$

Este resultado, junto con el del parámetro de desaceleración, lleva a

$\boxed{\Omega_0^{mat} \sim 0{,}3 \text{ y } \Omega_0^{\Lambda} \sim 0{,}7}$ $\left(\Rightarrow \Lambda \sim 0{,}7\, \frac{3H_0^2}{c^2} = 0{,}1\ \mathrm{Gpc}^{-2} = 10^{-52}\ \mathrm{m}^{-2}\right)$.

Ejercicio: determinar la distancia actual a las fuentes que emitieron los fotones del fondo cósmico de microondas que recibimos hoy.

Hay que calcular $\sigma_r = \int_0^{1000} \frac{c\, dz}{H(z)}$ en un universo con $\Omega_0^{mat} \sim 0{,}3$, $\Omega_0^{\Lambda} \sim 0{,}7$.

$$\sigma_r(z=1000) = \overset{4{,}3\ \mathrm{Gpc}}{\frac{c}{H_0}} \underbrace{\int_0^{1000} \frac{dz}{\sqrt{0{,}3(1+z)^3 + 0{,}7}}}_{3{,}2} = 13{,}8\ \mathrm{Gpc} = 45\ \mathrm{G}\overset{\text{año luz}}{\widetilde{\ell y}}$$

Como antes del desacople los fotones no podían propagarse libremente, este valor de 45 mil millones de años luz o 13,8 Gpc corresponde al radio del universo visible en radiación electromagnética.

Ejercicio: determinar la edad de un universo con $\Omega_0^{mat} \sim 0{,}3$, $\Omega_0^{\Lambda} \sim 0{,}7$.

$$dt = \frac{dt}{da}\, da = \frac{da}{a\,H} \Rightarrow t_{hoy} = \int_0^{a_0} \frac{da}{a\,H}$$

En H(z) reemplazamos 1+z por a_0/a :

$$t_{hoy} = \frac{1}{H_0}\int_0^{a_0} \frac{da}{a\sqrt{0{,}3\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + 0{,}7}} = \frac{1}{H_0}\int_0^{1} \frac{da'}{a'\sqrt{0{,}3\,a'^{-3} + 0{,}7}}$$

$$t_{hoy} = \overset{14\times 10^9\ \text{años}}{\frac{1}{H_0}}\ \frac{2}{3\sqrt{0{,}7}}\ \ln \frac{\sqrt{0{,}7\,a'^3} + \sqrt{0{,}3 + 0{,}7\,a'^3}}{\sqrt{0{,}3}}\Bigg|_0^1 = \overset{14\times 10^9\ \text{años}}{\frac{1}{H_0}}\ 0{,}96$$

Este resultado muestra que la constante cosmológica ayuda a obtener un valor adecuado para la edad del universo, pues ya mostramos que un universo plano lleno exclusivamente de materia no conduce a un valor adecuado para la edad del universo. Si la contribución de la radiación fuera incluida, este resultado no sería afectado sensiblemente.

Potencial para la evolución del factor de escala

Volvamos a la expresión para H en un universo dominado por materia y constante cosmológica:

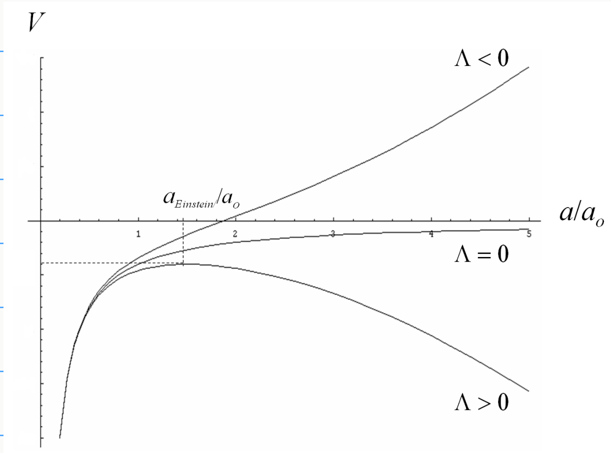
$$\underbrace{H^2}_{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2} = H_0^2 \left[\Omega_0^{mat} \underbrace{(1+z)^3}_{\left(\frac{a_0}{a}\right)^3} + \Omega_0^{\Lambda} + \underbrace{(1 - \Omega_0^{mat} - \Omega_0^{\Lambda})}_{-\frac{Kc^2}{a_0^2 H_0^2}} \underbrace{(1+z)^2}_{\left(\frac{a_0}{a}\right)^2}\right]$$

Multiplicando por a^2 y dividiendo por a_0^2 obtenemos

$$\boxed{\frac{\dot a^2}{a_0^2} \underbrace{- H_0^2 \left[\Omega_0^{mat} \frac{a_0}{a} + \Omega_0^{\Lambda} \frac{a^2}{a_0^2}\right]}_{V\left(\frac{a}{a_0}\right)} = -\frac{Kc^2}{a_0^2}}$$

nivel de "energía"

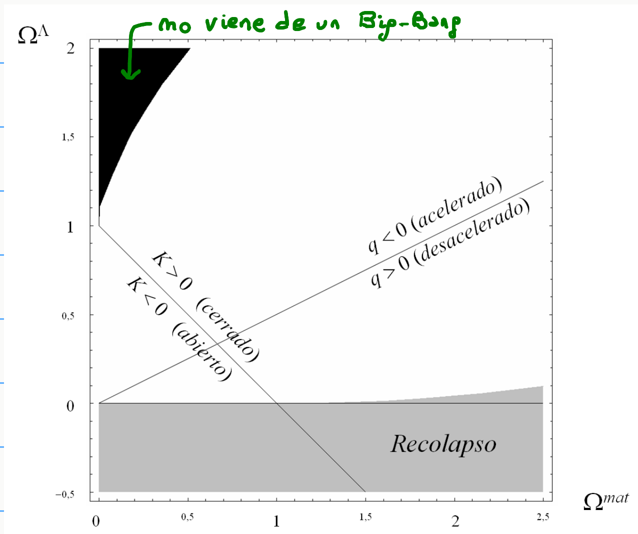
Podemos entender esta ecuación como lo hacemos con la conservación de la energía de una partícula en un potencial V

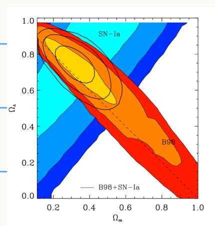


- Si $\Lambda < 0$ la expansión se detiene, y el universo comienza a contraerse
- si $\Lambda \geq 0$ la expansión puede detenerse o no, dependiendo del nivel de energía $-Kc^2/a_o^2$

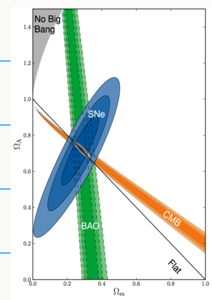
- Hay un punto de equilibrio inestable cuando $\Lambda > 0$, $K > 0$. Es el universo de Einstein.

Podemos resumir estos aspectos en el plano de los parámetros Ω_o^{mat}, Ω_o^{Λ}:





arXiv:0201137
BOOMERanG



arXiv:1105.3470

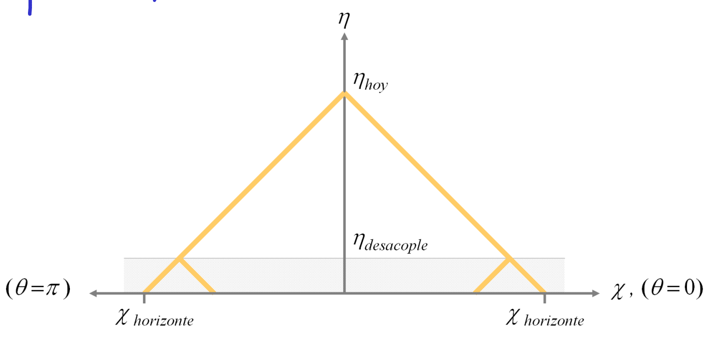
Tiempo conforme

Es útil definir una coordenada temporal $\eta(t)$ que permite ver a la geometría FRW plana como conforme a la geometría de Minkowski. De esa forma los rayos de luz viajarán a 45° en el plano η - χ . Definimos

$$\boxed{d\eta \doteq \frac{c\,dt}{a(t)} = \frac{c\,da}{a^2 H(a)}}$$

Entonces $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\, d\ell^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\ell^2\right]$

Si $d\ell^2$ es plano, el corchete es Minkowski; FRW plano es conforme a Minkowski. Los rayos de luz radiales viajan según $d\eta = \pm\, d\chi$ (aun si $K \neq 0$).

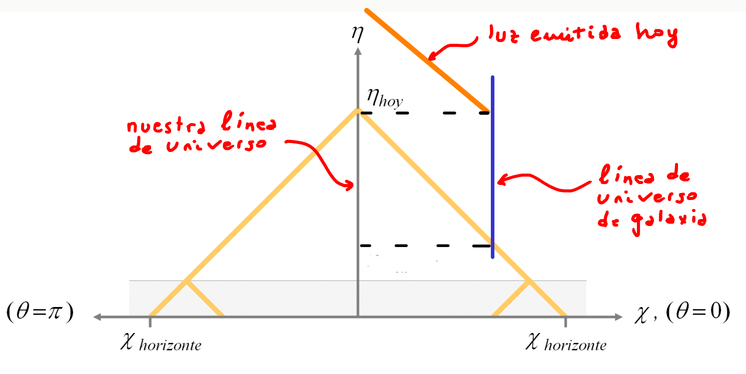


Puede verse que si la edad del universo η_{hoy} es finita, entonces existen "horizontes de partícula": cada observador sólo podría estar causalmente conectado a una porción de universo vecino a él. En particular esto es válido para los puntos de la superficie del "último scattering", desde donde nos llegan los fotones de la CMB viajando desde el tiempo de desacople. ¿Cómo puede ser CMB tan isótropa si los fotones que llegan en distintas direcciones no están conectados causalmente? (en el modelo estándar de Big-Bang es suficiente una diferencia en la dirección de 1° para que no haya conexión causal). La isotropía tendría que deberse a la condición inicial; pero esta respuesta es poco atractiva. En los modelos inflacionarios, el modelo estándar es precedido por una era de expansión exponencial gobernada por un campo escalar cuántico cuyo estado es inestable. Al decaer este campo, su energía se transforma en partículas y radiación, dando comienzo a la era dominada por la radiación. Si la era inflacionaria dura suficiente tiempo, los puntos de la superficie del último scattering quedarán causalmente conectados. Los modelos inflacionarios dan respuesta también al problema de la planitud del universo. En el modelo estándar la condición inicial $\Sigma\,\Omega_i \simeq 1$ tiende a perderse durante la evolución del universo. Por lo tanto se requiere de un ajuste muy fino de condiciones iniciales para llegar a nuestra época con $\Sigma\,\Omega_{0i} \sim 1$. En cambio, durante la era inflacionaria el universo evoluciona hacia la planitud, dejando una condición inicial muy precisa para el comienzo de la era estándar.

El futuro del universo visible

La expansión acelerada del universo tiene una consecuencia dramática. Si el espacio se expande más rápido que lo que la luz puede recorrer en el tiempo de la expansión, ocurrirá que galaxias que hoy son visibles (en el estado que tenían en un pasado), podrán dejar de serlo en un futuro porque la luz que emiten hoy nunca nos alcanzará.

Tomemos una de las galaxias visibles más lejanas; la luz que hoy recibimos habrá viajado durante unos 10 mil millones de años. Para que la luz que emite hoy nos alcance algún día, el tiempo conforme debería crecer lo suficiente (ver Figura). Como la luz viaja según $\Delta\eta = \pm\Delta\chi$, habrá que aguardar un tiempo



conforme igual a $|\Delta\chi|$. Pero en un universo dominado por la constante cosmológica, como lo será el universo futuro, el parámetro de Hubble se vuelve constante. La consecuencia es que η no crece indefinidamente.

En efecto, para H constante es

$$d\eta = \frac{c\,da}{a^2 H} \quad\Rightarrow\quad \Delta\eta = \frac{c}{H}\int_{a_0}^{a_{final}} \frac{da}{a^2} = \frac{c}{H}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{final}}\right)$$

Cuando el factor de escala se vuelve infinito, el tiempo conforme transcurrido es

$$\Delta\eta_\infty = \frac{c}{a_0 H}$$

Este es el tiempo conforme de la evolución de un universo de de Sitter, desde el instante en que el factor de escala vale a_0 hasta que se vuelve asintóticamente infinito. En tal universo, la luz emitida en ese instante por cualquier galaxia que esté a $|\Delta\chi| > \frac{c}{a_0 H}$ no llegará nunca a nuestro punto de observación, por más grande que sea el tiempo cosmológico Δt transcurrido.

(En cambio, en un universo dominado por materia es $H \propto a^{-3/2}$; entonces $\Delta\eta_\infty$ diverge).