

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

# **Relatividad General**

2do cuatrimestre de 2021

**Profesor: Rafael Ferraro**

**Clase 21**

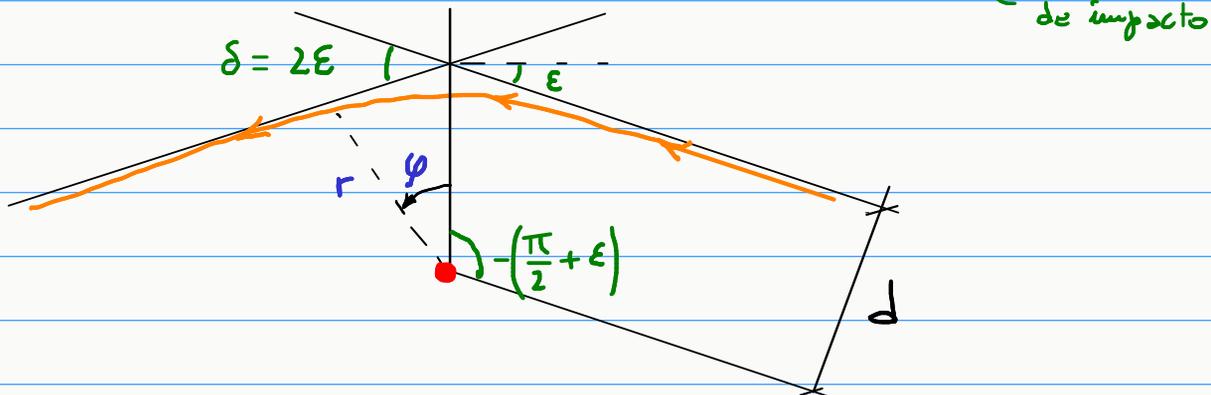
**Lentes gravitatorias**

**Diagramas de Penrose**

## ▶ Lentes gravitatorias

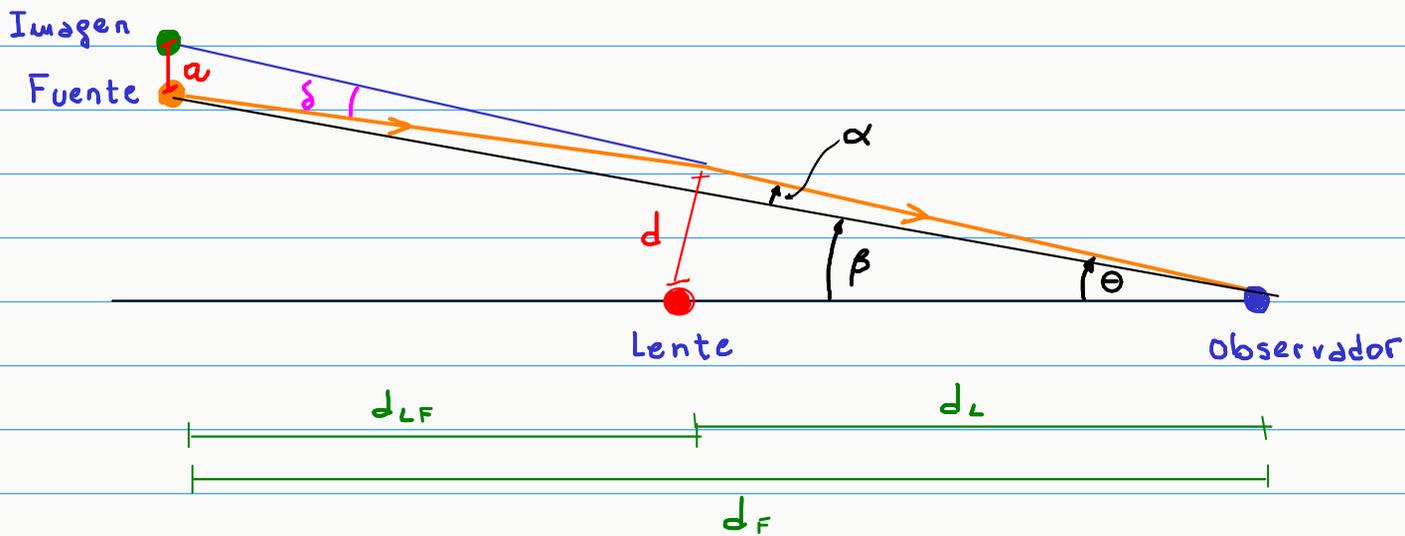
(Bibliog. :- Schneider, Ehlers y Falco)  
- Carroll

Consideraremos el fenómeno de lente gravitatoria en la geometría de Schwarzschild, y en la aproximación de campo débil. Hemos visto que, en estas condiciones, la luz se desvía un ángulo  $\delta = 2\epsilon = \frac{2r_s}{d}$



Esta deflexión de rayos de luz semeja la que se produce cuando la luz pasa por una lente convergente, cuyo centro correspondería al centro de la geometría de Schwarzschild. Sin embargo hay una diferencia: en el caso de una lente convergente, la deflexión aumenta cuando aumenta el parámetro de impacto, mientras que en el caso gravitatorio sucede lo contrario. Así en óptica las lentes convergentes enfocan rayos y pueden producir imágenes reales; en gravedad esto no ocurre. No obstante la desviación gravitatoria de la luz produce distorsiones en la percepción de las posiciones y formas de los objetos celestes, pudiéndose formar imágenes múltiples.

Para estudiar la cuestión es útil aproximar la trayectoria de los rayos mediante sus asíntotas. La Figura siguiente muestra la trayectoria de un rayo en el plano que contiene la fuente, la lente y el observador. Supondremos que todos los ángulos son pequeños.



$$a \approx d_{LF} \delta, \quad d = d_L \theta$$

La alteración de la visual a la estrella es el ángulo  $\alpha = \theta - \beta$

$$\theta - \beta = \alpha = \frac{a}{d_F} = \frac{d_{LF}}{d_F} \delta = \frac{d_{LF}}{d_F} \frac{2r_s}{d} = \frac{4d_{LF}}{d_F d_L} \frac{GM}{c^2} \frac{1}{\theta}$$

Entonces

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Ecuación de la lente (deflexión débil)

donde

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM d_{LF}}{d_L d_F c^2}} = \sqrt{\frac{2r_s d_{LF}}{d_L d_F}}$$

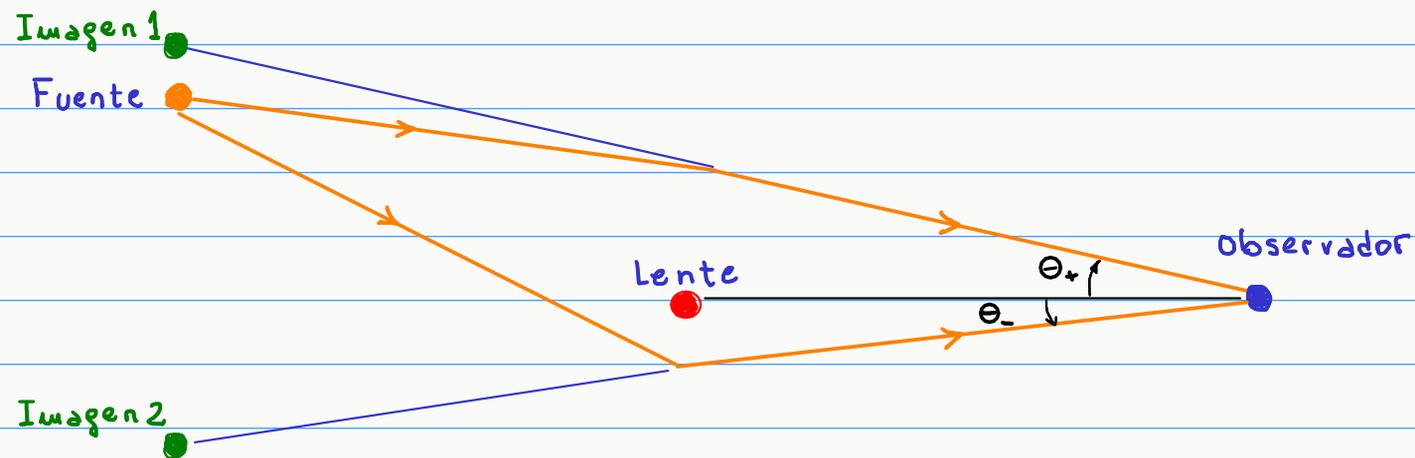
Hay dos valores de  $\theta$  que resuelven la ecuación de la lente:

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \quad \theta_+ > \beta, \quad \theta_- < 0$$

Entonces hay dos imágenes, con una separación

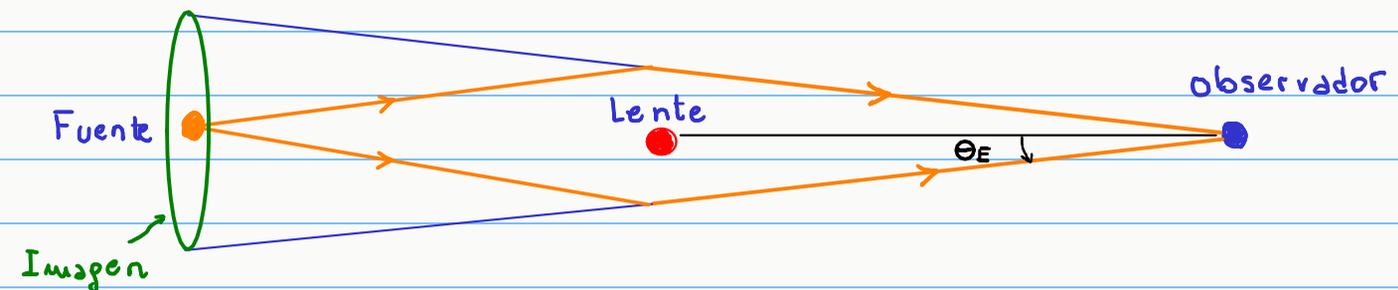
$$\Theta_+ - \Theta_- = \sqrt{\beta^2 + 4\Theta_E^2} \quad , \quad \text{además es } \Theta_+ + \Theta_- = \beta$$

La imagen que se observa bajo el ángulo  $\Theta_-$  tiene menor parámetro de impacto (por lo tanto, mayor desviación) como se ve en la Figura siguiente:



Para que valga la aproximación de campo débil debe ser  $d_L \Theta_- \gg r_s$ . Si la lente no es puntual, la Imagen 2 podría ser obstruida por el cuerpo del objeto que actúa como lente.

En el caso  $\beta = 0$ , cuando la fuente, la lente y el observador están alineados, hay una única solución  $\Theta = \Theta_E$ ; la imagen deviene en un anillo ("anillo de Einstein")



Está claro que para que el anillo sea observable  $\Theta_E$  tiene que ser mayor que el ángulo subtendido por el cuerpo del objeto que actúa como lente.

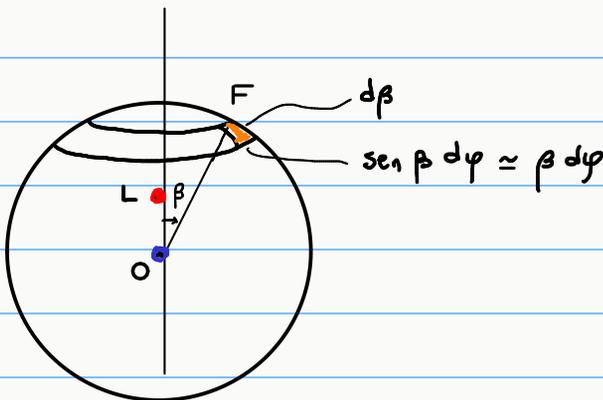
Si  $\beta$  se aparta de cero entonces vale que  $\Theta_+ > \Theta_E$  y  $|\Theta_-| < \Theta_E$ .

El orden de magnitud de  $\Theta_E$  puede variar desde milésimas de segundo de arco hasta segundos de arco. Para una lente de masa comparable a la solar ( $r_s$  es igual a algunos kilómetros), y distancias interiores a la galaxia (digamos  $d \sim 1 \text{ kpc} = 3 \times 10^{16} \text{ km}$ ) es  $\Theta_E \sim 10^{-8} = 2$  milisegundos de arco. Pero también hay "lensing" a escala cosmológica, donde la lente puede ser un cúmulo de galaxias, y las distancias involucradas llegan a cientos de Mpc.

En el caso cosmológico debemos tener en cuenta que la relación entre distancia y ángulo no es la de la geometría de Euclides, como venimos usando en la aproximación de campo débil de la lente de Schwarzschild. En ese caso las distancias de las expresiones que hemos utilizado corresponden, en realidad, a la noción de distancia diámetro-ángulo que veremos luego (en particular, no tendría sentido reemplazar  $d_F$  por  $d_L + d_{LF}$ ).

### ► Magnificación de la lente de Schwarzschild

Sea una fuente extensa que subtende un ángulo  $d\beta$  en el plano OLF. Como  $\beta$  es pequeño, el ángulo sólido subtendido se aproxima por  $\beta d\beta d\varphi$ . Las respectivas imágenes subtenden los ángulos sólidos  $\Theta_{\pm} d\Theta_{\pm} d\varphi$



La magnificación  $\mu$  de la lente es el cociente entre los ángulos sólidos subtendidos por la imagen y la fuente:

$$\mu_{\pm} = \frac{\Theta_{\pm} d\Theta_{\pm}}{\beta d\beta}$$

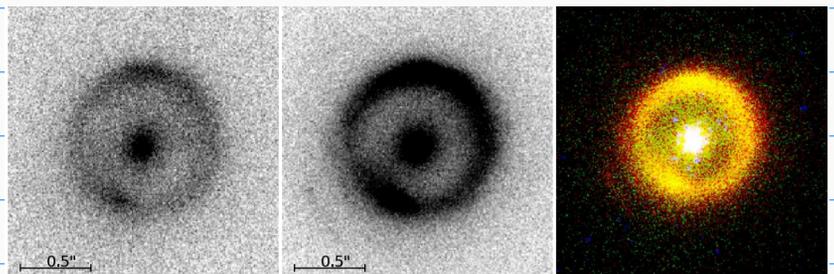
Como  $\theta_{\pm} = \frac{\beta}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \right)$ , entonces

$$\mu_{\pm} = \frac{\left( 1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \right)^2}{4 \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}}} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}}} + \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \pm 2 \right],$$

lo que implica que las dos imágenes tienen distinto brillo.

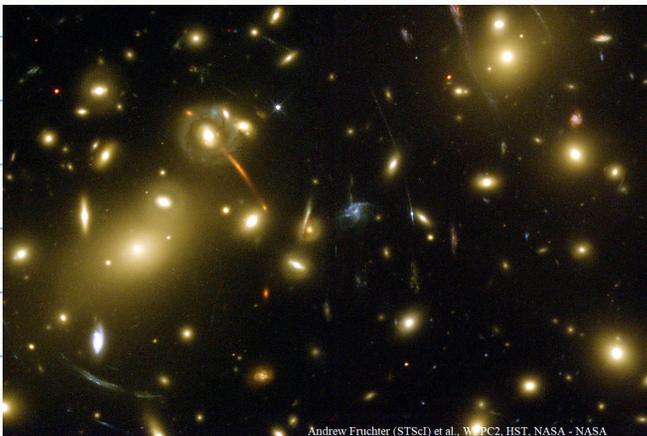
La primera detección de una doble imagen ocurrió en 1979 (Walsh, Carswell y Weymann). La fuente es un quasar a  $z=1,4$ ; sus imágenes están separadas por 5,7 arcsec. La lente es una galaxia a  $z=0,35$ .

El primer anillo de Einstein (incompleto) fue observado en 1988, en emisiones de radio. La siguiente Figura muestra el primer anillo de Einstein completo detectado, que corresponde a un quasar a  $z=1,8$ ; en el centro de la imagen se ve la galaxia que actúa como lente.



B1938+666.

arXiv:1206.1681



Andrew Fruchter (STScI) et al., WPC2, HST, NASA - NASA

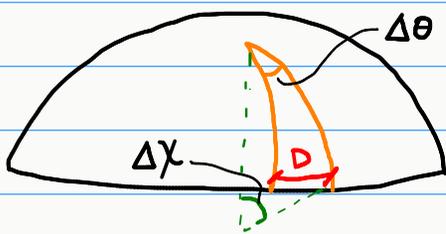
Imágenes en forma de arco producidas por el cúmulo Abell 2218

## ► Distancia diámetro-angular

Si  $D$  es el diámetro de una fuente que se observa bajo un ángulo  $\Delta\theta$ , entonces definimos la distancia diámetro-angular a la fuente

$$d_A \doteq \frac{D}{\Delta\theta}$$

Por supuesto  $d_A$  no es la distancia real a la fuente, pues no toma en cuenta la geometría del espacio-tiempo; es sólo una definición, como lo es también la distancia luminosa  $d_L$ . En la geometría FRW el diámetro propio de la fuente en el instante de la emisión es



$$D = a_e f(|\Delta\chi|) \Delta\theta$$

Entonces

$$d_A = a_e f(|\Delta\chi|) = \frac{a_e}{a_r} \underbrace{a_r f(|\Delta\chi|)}_{\substack{\approx |\Delta\chi| \\ d_L (1+z)^{-1}}}$$

Es decir,

$$d_A = d_L (1+z)^{-2}$$

(Bibliog: Carroll)

## ▶ Diagramas de Penrose

Los diagramas de Penrose, o diagramas conformes, buscan capturar la estructura causal y las propiedades globales de un espacio-tiempo en un gráfico bidimensional. La idea básica es encontrar coordenadas donde los conos de luz se vean a  $45^\circ$ , y los infinitos pasado, futuro y nulo correspondan a valores finitos de las coordenadas. Para que el diagrama sea bidimensional, el espacio-tiempo considerado tendrá que tener suficiente simetría; de esa forma cada punto del diagrama representará una determinada subvariedad (usualmente, una 2-esfera). Una transformación de coordenadas que asigne coordenadas finitas al infinito, conducirá a algún tipo de singularidad de coordenadas en las componentes del tensor métrico. La idea aquí es que esa singularidad se manifieste en un factor conforme; esto es, que la métrica resulte proporcional a una métrica libre de singularidades:

$$g_{ij} = W(x)^2 \tilde{g}_{ij}$$

↑ factor conforme

Como el factor conforme no afecta la estructura causal (no cambia ángulos; los vectores nulos se mantienen nulos), entonces bastará hacer la representación gráfica de  $\tilde{g}_{ij}$ , atendiendo al rango de coordenadas que resulten del cambio de carta.

El ejemplo más sencillo es el espacio-tiempo de Minkowski, que en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty$$

o en coordenadas nulas radiales,  $u = ct - r$ ,  $v = ct + r$  ( $-\infty < v < \infty$ ,  $u \leq v$ ),

$$ds^2 = dw dv - \frac{1}{4} (v-w)^2 d\Omega^2$$

Para darle coordenadas finitas al infinito proponemos el cambio de carta

$$U = \arctan u, \quad V = \arctan v, \quad -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad U \leq V$$

y el intervalo resulta

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} \left[ dU dV - \sin^2(V-U) d\Omega^2 \right]$$

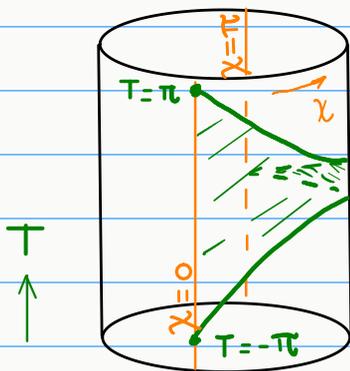
Ahora hacemos

$$T = U + V, \quad \chi = V - U, \quad 0 \leq \chi < \pi, \quad |T| + \chi < \pi$$

para llegar a

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos T + \cos \chi)^2} \left[ dT^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi d\Omega^2 \right]$$

La métrica entre corchetes es el universo estático de Einstein. Por lo tanto, la métrica de Minkowski  $g_{ij}$  es conforme a la del universo estático de Einstein  $\tilde{g}_{ij}$ ; de manera que comparten la estructura causal. En esta carta los rayos de luz radiales tienen líneas de universo a 45°,  $T = \pm \chi + cte$ , tanto en Minkowski como en el universo estático de Einstein. Pero mientras en el universo estático de Einstein las coordenadas barren el rango  $-\infty < T < \infty$ ,  $0 \leq \chi < \pi$ , el espacio-tiempo de Minkowski corresponde al rango  $0 \leq \chi < \pi$ ,  $|T| + \chi < \pi$ .



universo de Einstein: cada punto representa una 2-esfera de radio  $\sin \chi$

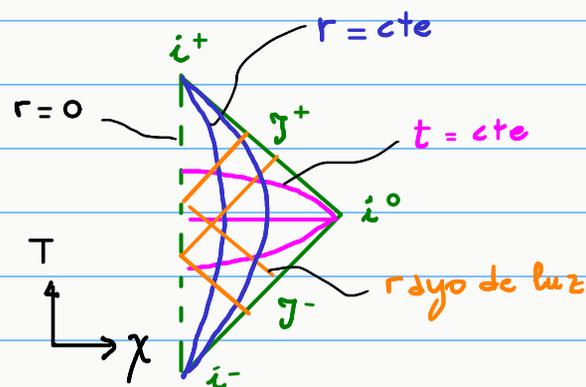


diagrama de Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski

\* Si  $T > 0$  es  $|T| + \chi = 2V < \pi$ . Si  $T < 0$  es  $|T| + \chi = -2U < \pi$ .

$i^+$  : futuro temporal infinito  $T = \pi$ ,  $\chi = 0$  : es un punto (no representa una 2-esfera)

$i^0$  : infinito espacial  $T = 0$ ,  $\chi = \pi$  : es un punto (no representa una 2-esfera)

$i^-$  : pasado temporal infinito  $T = -\pi$ ,  $\chi = 0$  : es un punto (no representa una 2-esfera)

$\mathcal{J}^+$  : ("scri" +) futuro nulo infinito; es una superficie nula adonde van los rayos de luz radiales

$\mathcal{J}^-$  : ("scri" -) pasado nulo infinito; es una superficie nula de donde vienen los rayos de luz radiales

Todas las geodésicas temporales de Minkowski vienen de  $i^-$  y van a  $i^+$  (con el tiempo propio yendo a  $\pm \infty$ ). Todas las geodésicas espaciales van a  $i^0$ .

Los rayos de luz son líneas a  $45^\circ$ . Una línea de universo de partícula puede ir hacia  $\mathcal{J}^+$  (o venir de  $\mathcal{J}^-$ ) si es asintóticamente nula (por ejemplo, la partícula uniformemente acelerada).

En realidad  $i^+$ ,  $i^-$ ,  $i^0$ ,  $\mathcal{J}^+$ ,  $\mathcal{J}^-$  no forman parte de Minkowski. Estos bordes son el **infinito conforme**; su unión con Minkowski se llama **compactificación conforme**, que es una variedad con borde.

Un espacio-tiempo tiene una **región asintóticamente plana**, si esa región comparte con Minkowski la estructura  $\mathcal{J}^+ i^0 \mathcal{J}^-$ .

► En un modelo cosmológico FRW plano, la métrica es conforme a Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) = a(\eta)^2 \underbrace{(d\eta^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2)}_{\text{Minkowski}}$$

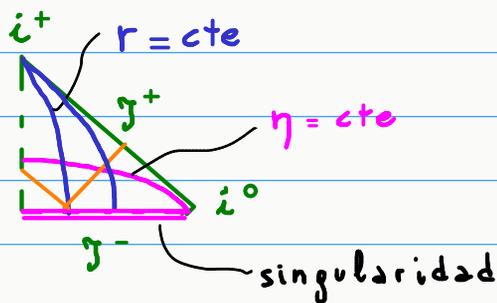
donde  $d\eta = \frac{c dt}{a(t)}$  es el "tiempo conforme".

Esto sugiere que el diagrama conforme de esta cosmología es el mismo de Minkowski. Sin embargo debemos poner atención en el rango que cubren las coordenadas. Por ejemplo, para un único constituyente con  $w > -1$  resulta

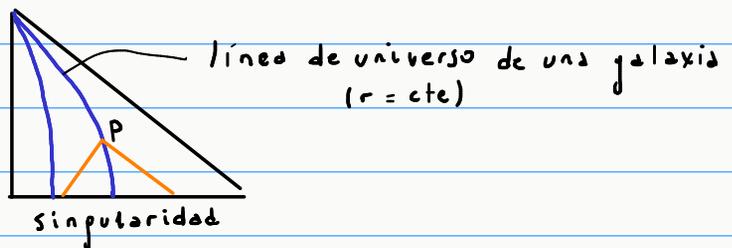
$$a(t) = cte t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Entonces 
$$\eta \propto \int t^{-\frac{2}{3(1+w)}} dt = \frac{3(1+w)}{1+3w} t^{\frac{1+3w}{3(1+w)}}$$

Si  $w > -\frac{1}{3}$  entonces el instante  $t=0$  (cuando se anula el factor de escala) corresponde a  $\eta = 0$ . Esto significa que el diagrama de Penrose para el modelo cosmológico en cuestión sólo cubre la parte  $\eta > 0$  del respectivo diagrama de Minkowski:

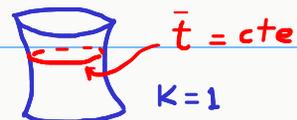


Que la superficie  $\mathcal{J}^-$  sea espacial en lugar de nula, implica la existencia de horizontes de partícula: en cada evento P existen galaxias que no son visibles, y que no influyen causalmente sobre P.



- **Universo de de Sitter:** la geometría de de Sitter es la de un hiperboloide de 4 dimensiones sumergido en la geometría de Minkowski de 5 dimensiones. En la carta que cubre todo el hiperboloide, el intervalo tiene la forma de un FRW cerrado:

$$ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - \frac{3}{\Lambda} \cosh^2 \left[ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c\bar{t} \right] (d\chi^2 + \text{sen}^2\chi d\Omega^2)$$



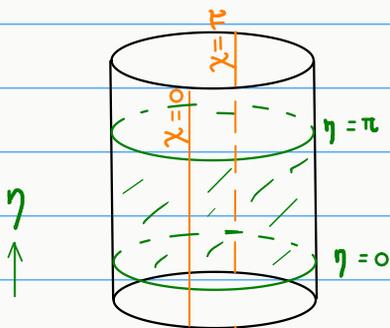
Introduciendo el tiempo conforme  $d\eta^2 = \frac{c^2 d\bar{t}^2}{\frac{3}{\Lambda} \cosh^2 \left[ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c \bar{t} \right]}$ ,

es decir  $\text{sen } \eta = \frac{1}{\cosh \left[ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c \bar{t} \right]}$ ,  $0 < \eta < \pi$ ,

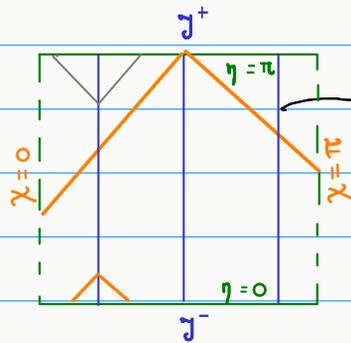
el intervalo del universo de de Sitter queda

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda} \text{sen}^2 \eta \underbrace{(d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sen}^2 \chi d\Omega^2)}_{\text{universo de Einstein}}$$

de Sitter es conforme al universo de Einstein, pero la carta que cubre toda la geometría de de Sitter sólo cubre una parte del universo de Einstein, pues  $0 < \eta < \pi$ . Así el diagrama conforme para de Sitter es un cuadrado



universo de Einstein: cada punto representa una 2-esfera de radio  $\text{sen } \chi$

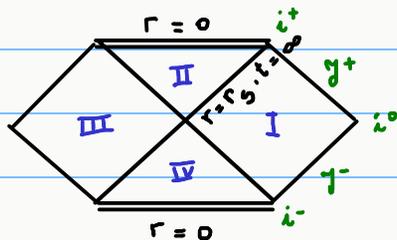


línea de universo de una galaxia ( $\chi = \text{cte}$ )

si  $\eta^-$  ( $\eta^+$ ) es espacial se forman horizontes de partícula (horizontes de eventos futuros).

diagrama conforme de la geometría de de Sitter: cada punto representa una 2-esfera de radio  $\text{sen } \chi$

► El diagrama de Penrose de la máxima extensión analítica de la geometría de Schwarzschild es



Las regiones externas son asintóticamente planas (el infinito conforme es como en Minkowski).