

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 22

Radiación de ondas gravitatorias

► Aproximación lineal. Ecuación de ondas con fuentes

Habíamos linealizado las ecuaciones de Einstein para obtener que la perturbación de la métrica de Minkowski obedece la ecuación de ondas en el gauge de Lorenz:

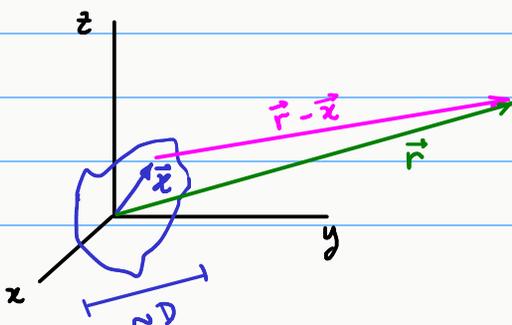
$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad \bar{h}^k{}_{j,k} = 0$$

Nótese la compatibilidad del gauge de Lorenz con la conservación de T_{ij} (conservación automática). La solución retardada de la ecuación de ondas es

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{ij}(t - \overbrace{|\vec{r} - \vec{x}|}^{t_{\text{ret}}}, \vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} d^3x \quad \text{signature } (-+++)$$

donde \vec{r} es el punto campo, la integral se realiza sobre las posiciones \vec{x} de las fuentes en el tiempo retardado t_{ret} . Damos por conocida esta solución, así como el cumplimiento del gauge de Lorenz, porque el problema es enteramente análogo al que se presenta para el potencial electromagnético A_k en su relación con las fuentes j_k .

Si las fuentes están localizadas podemos considerar la aproximación de campo lejano. En ese caso, tomando el origen de coordenadas próximo a las fuentes, tendremos $|\vec{r}| \gg |\vec{x}|$:



$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{x}| &= [(\vec{r} - \vec{x}) \cdot (\vec{r} - \vec{x})]^{1/2} \simeq \\ &\simeq |\vec{r}| - \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

En el integrando aproximaremos el denominador por $|\vec{r} - \vec{x}| \approx |\vec{r}|$.

Para hacer la misma aproximación en el tiempo retardado debemos ser más cuidadosos. Para fuentes monocromáticas de frecuencia ω tendremos

$$\omega t_{\text{ret}} \approx \omega t - \frac{\omega}{c} |\vec{r}| + \frac{\omega}{c} \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}}{|\vec{r}|}$$

Si despreciamos el último término estaríamos ignorando los desfases debidos a que las fuentes no emiten todas desde un mismo punto; eliminar ese término equivale a considerar que las fuentes están ubicadas en el origen de coordenadas. Esos desfases son despreciables cuando la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño de la fuente, $\frac{c}{\omega} \gg D$; dicho de otra forma, cuando el período de la fuente es mucho mayor que el tiempo que tarda la onda en recorrerla (la fuente varía "lentamente"). En ese caso la perturbación se aproxima por

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{r}) \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(t - \frac{r}{c}, \vec{x}) d^3x$$

Nos concentraremos en el sector espacial de la perturbación, porque podemos usar el gauge de Lorenz para obtener las restantes componentes. En efecto para fuentes monocromáticas, el gauge de Lorenz queda

$$0 = \bar{h}^k{}_{j,k} = \bar{h}^0{}_{j,0} + \bar{h}^\alpha{}_{j,\alpha} = i \frac{\omega}{c} \bar{h}^0{}_j + \bar{h}^\alpha{}_{j,\alpha}$$

$$\text{si } j = \beta = 1, 2, 3 \text{ obtenemos } \bar{h}^0{}_\beta = -i \frac{c}{\omega} \bar{h}^\alpha{}_{\beta,\alpha}$$

(= $-\bar{h}^\beta{}_0$)
 los índices suben y bajan
 con η^{ij} y η_{ij}

$$\text{si } j = 0 \text{ obtenemos } \bar{h}^0{}_0 = -i \frac{c}{\omega} \bar{h}^\alpha{}_{0,\alpha}$$

Para llevar el integrando a una forma diferente, consideremos la conservación de la energía-momento (no usamos derivada covariante porque T_{ij} es del mismo orden que la perturbación):

$$\partial_i T^{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 \partial_i T^{ij} = 0$$

si $j=0$ obtenemos $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 T^{\alpha 0}}{\partial t \partial x^\alpha} = 0$,

También la ecuación de conservación implica que $\partial_\alpha \partial_i T^{i\alpha} = 0$

es decir, $\frac{1}{c} \frac{\partial^2 T^{0\alpha}}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = 0$,

Restando las ecuaciones, y usando la simetría de T^{ij} :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

Multipliquemos este resultado por $x^\gamma x^\delta$ e integremos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^\gamma x^\delta d^3x = \int \frac{\partial^2 T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} x^\gamma x^\delta d^3x = 2 \int T^{\gamma\delta} d^3x$$

En el último paso hemos integrado por partes dos veces (no hay término de bordes porque $T^{\alpha\beta}$ se anula fuera de la localización de las fuentes).

Reemplazando en $\bar{h}^{\alpha\beta}$,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta d^3x$$

Definimos el tensor de momento cuadrupolar de la densidad de energía (es un tensor frente a rotaciones espaciales en Minkowski):

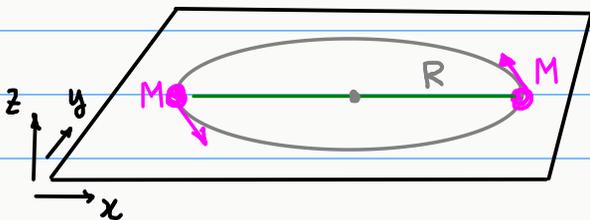
$$I^{\alpha\beta} \doteq \int T^{00} x^\alpha x^\beta d^3x$$

Entonces

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{r}) \approx \frac{2G}{c^6 r} \ddot{I}^{\alpha\beta}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

En la aproximación más baja, la radiación de una fuente localizada que varía lentamente es la radiación de un cuadrupolo puntual. La doble derivada temporal indica que la perturbación es proporcional al cuadrado de la frecuencia. La ausencia de radiación dipolar gravitatoria se debe a que el momento dipolar de la distribución de masa de un sistema aislado no puede variar porque se violaría la conservación (automática) de la cantidad de movimiento.

- **Estrella binaria:** consideremos un sistema de dos estrellas orbitando alrededor del centro de masa común. Para simplificar supondremos que las dos estrellas tienen la misma masa M .



En la aproximación newtoniana es

$$\underbrace{\frac{GM}{(2R)^2}}_{\text{fuerza por unidad de masa}} = \underbrace{\Omega^2 R}_{\text{aceleración centrípeta}}$$

La frecuencia angular de la órbita resulta

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{4R^3}}$$

La densidad de energía se escribe como

$$T^{00} = M c^2 \delta(z) \left[\delta(x - R \cos \Omega t) \delta(y - R \sin \Omega t) + \delta(x + R \cos \Omega t) \delta(y + R \sin \Omega t) \right]$$

y su momento cuadrupolar es

$$I^{\alpha\beta} = \int T^{00} x^\alpha x^\beta d^3x = \begin{cases} I^{11} = 2 M c^2 R^2 \cos^2 \Omega t = M c^2 R^2 (1 + \cos 2 \Omega t) \\ I^{22} = 2 M c^2 R^2 \sin^2 \Omega t = M c^2 R^2 (1 - \cos 2 \Omega t) \\ I^{12} = 2 M c^2 R^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = M c^2 R^2 \sin 2 \Omega t \end{cases}$$

$I^{21} = I^{12}$, y el resto de las componentes se anulan.

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{r}) \simeq -8GM R^2 \frac{\Omega^2}{c^4 r} \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t_{\text{ret}} & \sin 2\Omega t_{\text{ret}} & 0 \\ \sin 2\Omega t_{\text{ret}} & -\cos 2\Omega t_{\text{ret}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}}$$

Nótese que la traza de la perturbación es distinta de cero:

$$h = -\bar{h} = -\bar{h}^0_0 - \underbrace{\bar{h}^a_a}_0 = -\bar{h}^0_0 = \dots$$

↑ gauge de Lorenz

Recordemos que la perturbación de la métrica es $h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h}$, lo que significa que la componente zz es no nula.

Para pasar esta solución al gauge TT, ver Problema 32 en Schutz Sección 9.7.

Nótese el carácter no-machiano de la solución: un efecto físico como la emisión de una onda gravitatoria se produce por la rotación de dos cuerpos en un espacio por lo demás vacío.

▶ Pérdida de energía por radiación gravitatoria

No existe una energía gravitatoria localizada en Relatividad General (las primeras derivadas de la métrica se anulan localmente mediante un cambio de carta). Sin embargo, en soluciones asintóticamente planas es posible dar una definición global de la energía de la solución. Aun así podría pensarse que en la aproximación lineal, donde la perturbación h_{ij} es vista como un campo que se propaga en la geometría de Minkowski, debería existir una noción de densidad de energía para ese campo. La energía de un campo, como el campo electromagnético, es cuadrática en el campo; esto obliga a avanzar un orden más en el desarrollo perturbativo:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)}$$

donde $h_{ij}^{(2)} = \mathcal{O}(|h_{ij}^{(1)}|^2)$. La expresión linealizada del Ricci, que usamos hasta aquí, deberá ahora incorporar términos cuadráticos en la perturbación:

$$R_{ij} = R_{ij}^{(1)} + R_{ij}^{(2)}$$

↑ linealizado

donde

$$R_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{kl} (h_{kj,il} + h_{il,kj} - h_{ke,ij} - h_{ij,ke})$$

$$\begin{aligned} R_{ij}^{(2)} = & \frac{1}{2} h^{kl} h_{kl,ij} + \frac{1}{4} h_{ke,i} h^{kl},_j + \eta^{kl} \eta^{ef} h_{i[f,k]} h_{ej,e} \\ & - h^{kl} h_{k(i,j),l} + \frac{1}{2} (h^{kl} h_{ij,k}),_e - \frac{1}{4} \eta^{kl} h_{ij,k} h_{,le} \\ & - (h^{kl},_e - \eta^{kl} h_{,e}) h_{k(i,j)} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Einstein de vacío, $R_{ij} = 0$, se deben cumplir a cada orden:

1er orden: $R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] = 0$ (es el orden ya estudiado)

2do orden: $R_{ij}^{(1)} [h^{(2)}] + R_{ij}^{(2)} [h^{(1)}] = 0$

Vamos a usar esta última relación para armar una ecuación de Einstein para $h_{ij}^{(2)}$ en el siguiente sentido:

$$R_{ij}^{(1)} [h^{(2)}] - \frac{1}{2} \eta_{ij} R^k{}^k{}^{(1)} [h^{(2)}] = -R_{ij}^{(2)} [h^{(1)}] + \frac{1}{2} \eta_{ij} R^k{}^k{}^{(2)} [h^{(1)}]$$

El miembro derecho es cuadrático en $h_{ij}^{(1)}$, y actúa como la fuente en una suerte de ecuación de Einstein lineal para $h_{ij}^{(2)}$. Con el espíritu de ver al segundo miembro como el tensor de energía-momento correspondiente a la perturbación $h_{ij}^{(1)}$, llamaremos

$$t_{ij} \doteq -\frac{1}{k} \left(R_{ij}^{(2)} [h^{(1)}] - \frac{1}{2} \eta_{ij} R^k{}^k{}^{(2)} [h^{(1)}] \right)$$

Como el miembro izquierdo de la ecuación de Einstein es lineal en la perturbación, y vale la ecuación de 1er orden $R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] = 0$, podemos resumir diciendo que si $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, entonces la perturbación h_{ij} cumple que

$$R_{ij}^{(1)} [h] - \frac{1}{2} \eta_{ij} R^{(1)} [h] = k t_{ij} [h^{(1)}]$$

donde $h_{ij}^{(1)}$ es la solución de las ecuaciones lineales y homogéneas

$$R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] = 0$$

Es fácil verificar que $\partial_i \left(R^{(1)}_{ij} [h] - \frac{1}{2} \eta^i_j R^{(1)} [h] \right) = 0 \quad \forall h$

de modo que tenemos la conservación automática de la fuente en la geometría de Minkowski:

$$\partial_i t^{ij} = 0$$

La principal limitación para interpretar a t^{ij} como un tensor de energía-momento para la perturbación lineal $h^{(1)}$ no es la falta de comportamiento tensorial ante cambios de carta, pues no puede esperarse que lo tenga en el marco de las aproximaciones realizadas (sí es tensorial ante transformaciones de Lorentz). El peor obstáculo es que t^{ij} no posee la invariancia de gauge característica de la aproximación lineal (la transformación de gauge es $h^{(1)}_{ij} \rightarrow h^{(1)}_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i}$); esto se debe a que t^{ij} se construye con $R^{(2)}_{ij}$, mientras que la invariancia de gauge es propia de $R^{(1)}_{ij}$.

Como decíamos al comienzo, no es posible esperar encontrar una buena definición de densidad de energía, siendo que las primeras derivadas de la métrica se anulan localmente mediante un cambio de carta. Tal vez la información necesaria para definir una densidad de energía podría recogerse promediando en regiones del tamaño de varias longitudes de onda.

Con ese fin, promediaremos a cero todos los términos que sean derivadas de funciones oscilantes,

$$\langle \partial_i X \rangle = 0$$

lo que nos permite integrar por partes como:

$$\langle A \partial_i B \rangle = - \langle B \partial_i A \rangle$$

y así convertiremos los términos de $R_{ij}^{(2)}$ que tienen la forma $h \partial^2 h$ en términos cuadráticos en derivadas primeras. Después de un largo cálculo resulta

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{1}{4k} \langle h_{ke,i} h^{ke,j} - h_{,i} h_{,j} - 2 h^{ke,k} h_{e(i,j)} \rangle$$

que resulta invariante de gauge. En vacío siempre es elegible el gauge TT,

$$h = 0, \quad h^k_{j,k} = 0 \quad (\text{sole del gauge de Lorenz})$$

Luego:

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h^{TT}_{ke,i} h^{TT\,ke,j} \rangle$$

► Energía-momento de la onda plana

$$h^{TT}_{ij} = H_{ij} \cos k_e x^e$$

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} k_i k_j \underbrace{H_{ke} H^{ke}}_{2(H_+^2 + H_x^2)} \underbrace{\langle \sin^2 k_e x^e \rangle}_{1/2}$$

Si la onda se propaga en x es

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_+ H_x \\ 0 & H_x - H_+ \end{pmatrix}, \quad k_i = \left(\frac{\Omega}{c}, -\frac{\Omega}{c}, 0, 0 \right)$$

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} (H_+^2 + H_x^2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▶ Estrella binaria

En general, la energía contenida en la radiación gravitatoria a un tiempo t es

$$E = \int \langle t^{00} \rangle d^3x$$

y el flujo de energía por unidad de tiempo sobre una superficie esférica en el infinito es

$$P = \int_{S_{\infty}^2} \langle t^{0i} \rangle n_i r^2 d\Omega,$$

normal unitario:
 $n_i = (0, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$

El resultado para la estrella binaria que ya hemos considerado es (hay que pasar la onda al gauge TT):

$$P = \frac{128}{5} c^{-5} G M^2 R^4 \Omega^6 = \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 R^5}$$

↪ pulsating source of radio

▶ Púlsar binario PSR 1913+16

↪ ascensión recta y declinación

En 1974 Hulse y Taylor descubrieron un sistema binario formado por un púlsar y una estrella compañera. El púlsar es una estrella de neutrones en rotación rápida. Posee una emisión electromagnética muy colimada que se comporta como un faro. Cuando la emisión se dirige hacia nuestro punto de observación, registramos un pulso en ondas de radio. El estudio sistemático de la variación de los tiempos de llegada de los pulsos permitió establecer el radio de la órbita del púlsar; pulsos emitidos desde el punto más alejado de la órbita llegaban 3 s atrasados respecto de los que se emiten desde el punto más cercano de la órbita. La velocidad orbital se obtuvo de los corrimientos Doppler al rojo y al azul. Así fueron determinándose todos los parámetros:

distancia: 6,4 kpc

masas: púlsar $1,4 M_{\odot}$ compañera $1,38 M_{\odot}$

período orbital: 7,75 h

periastro: $1,1 R_{\odot}$ apastro: $4,8 R_{\odot}$

corrimiento del periastro: 35000 veces el de Mercurio

período del púlsar: 59 ms

Usemos la expresión de la potencia total emitida en ondas gravitatorias

(aunque no estemos ante una órbita circular): $P \sim 3 \times 10^{24} \text{ W}$

Por otro lado, la energía mecánica del sistema es

$$E_{mec} = M \Omega^2 R^2 - \frac{GM^2}{2R}$$

cinética \uparrow
potencial \leftarrow

Usando la ecuación de movimiento $\Omega^2 R^3 = \frac{GM}{4}$ resulta $E_{mec} = -\frac{GM^2}{4R}$

La potencia radiada debe traducirse en una disminución de la energía mecánica del púlsar binario:

$$P = -\frac{dE_{mec}}{dt} = -\frac{GM^2 \dot{R}}{4R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 R^5} = -\frac{GM^2 \dot{R}}{4R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{R}}{R} = -\frac{8}{5} \frac{G^3 M^3}{R^4 c^5} \sim -6 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad \left(= -\frac{2}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \text{ de acuerdo a la ecuación de mov.} \right)$$

La radiación de ondas gravitatorias produce un efecto acumulativo sobre los parámetros del púlsar binario (disminución del radio orbital, aumento de la frecuencia orbital). Hulse y Taylor observaron durante más de una década los parámetros del púlsar binario, registrando un total acuerdo con la predicción de Relatividad General (Premio Nobel 1993). Otros sistemas del mismo tipo han mostrado resultados similares.