

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 23

Geometría de Reissner-Nordstrom (agujero negro cargado)

Geometría de Kerr (agujero negro rotante)

▶ Teorema "no pelo"

Las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Einstein, de tipo agujero negro asintóticamente planas, acopladas al electromagnetismo, que no posean singularidades fuera del horizonte de eventos, están completamente caracterizadas por la masa, la carga eléctrica (y magnética, si la hubiere), y el momento angular.

Si hubiera otros campos de largo alcance actuando como fuentes, podrían aparecer otros "pelos". Pero la idea general de este teorema es que unos pocos parámetros caracterizan completamente la solución.*

Como estas soluciones son vistas como el estado final del colapso gravitatorio, llama la atención que el estado final no guarde el registro de ninguna otra característica del estado inicial (por ejemplo, el objeto que colapsa podría no ser simétrico, etc.). Esto significa que la diferencia entre los posibles estados iniciales es radiada en forma de ondas gravitatorias durante el colapso.

▶ Horizonte de eventos

Así como sucede con la solución de Schwarzschild, esperamos que otros tipos de agujeros negros también posean horizontes de eventos. El horizonte de eventos es una propiedad global de la solución, que proviene de su estructura causal. Se trata de una superficie nula que separa aquellos eventos que admiten una conexión causal con el futuro nulo infinito, de aquellos otros eventos que no lo admiten. Como se trata de un concepto global, difícilmente puede ser capturado en términos de una carta. Sin embargo, los horizontes de topología esférica asociados a soluciones de tipo agujero negro pueden ser caracterizados de esa forma si la carta es apropiada.

* Se trata de una conjetura que tiene demostraciones en casos específicos o bajo hipótesis adicionales.

- En una geometría estacionaria debe existir en la región externa un vector de Killing temporal $\bar{\kappa} = \frac{\partial}{\partial t}$; podemos elegir una carta tal que $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 0$.
- En las hipersuperficies $t = \text{cte}$ elegiremos una carta (r, θ, φ) tal que la métrica se vea en el infinito como Minkowski en esféricas.
- Supongamos que cuando r decrece desde el infinito las hipersuperficies $r = \text{cte}$ son temporales hasta volverse nulas en $r = r_H$ (y para todo θ, φ). En tal caso, para regresar desde $r < r_H$ habría que atravesar una superficie nula, lo cual está prohibido (no se puede superar la velocidad de la luz).
- Como $\tilde{d}r$ es la 1-forma normal a las hipersuperficies $r = \text{cte}$, $\tilde{d}r$ debería hacerse nula en $r = r_H$; es decir,

$$0 = \bar{g}(\tilde{d}r, \tilde{d}r) = g^{rr} \quad \text{en } r = r_H$$

Entonces la ubicación del horizonte satisface

$$g^{rr}(r_H) = 0$$

Esta será nuestra forma de aproximarnos a la noción de horizonte. Los diagramas de Penrose de las soluciones que vamos a mostrar confirmarán que es la forma adecuada. Puede inquietar que la posición del horizonte se obtenga a partir de g^{rr} en lugar de g_{tt} . En las soluciones con rotación sucede que el sector temporal de la métrica es no diagonal en la carta usual; aparece una componente $g_{t\varphi}$ no nula. Resulta entonces razonable que la ubicación del horizonte quede asociada a la anulación de g^{rr} .

▶ Geometría de Reissner-Nordstrom (agujero negro cargado)

En la misma época de la solución de Schwarzschild se obtuvo también la solución esféricamente simétrica con carga eléctrica Q . Esto significa que se resolvieron las ecuaciones de Einstein en presencia de una fuente correspondiente al campo electrostático de una carga puntual. Para plantear y resolver las ecuaciones de Einstein deberá tenerse en cuenta que la métrica incógnita también aparece en el tensor de energía-momento. La solución es

$$ds^2 = \Delta c^2 dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$\Delta \equiv 1 - \frac{2MG}{rc^2} + \frac{GQ^2}{r^2 c^4}$$

▶ Horizontes: $g^{rr}(r_H) = 0 \Rightarrow \Delta(r_H) = 0$

$$\Rightarrow r_{H\pm} = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{Q^2}{GM^2}} \right)$$

• Si $GM^2 > Q^2$ Hay dos horizontes de eventos, que son singularidades de la carta utilizada. Δ cambia de signo dos veces; la singularidad $r=0$ es entonces una hipersuperficie temporal y puede ser evitada.

• Si $GM^2 < Q^2$ No hay horizontes; Δ es siempre positivo, y la coordenada r tiene siempre carácter espacial. La singularidad $r=0$ es una hipersuperficie temporal y visible; es una singularidad desnuda. Se considera que no se forman objetos de este tipo en la naturaleza ("censura cósmica").

• Si $GM^2 = Q^2$ (agujero negro extremal); $\Delta = \left(1 - \frac{MG}{rc^2}\right)^2 \geq 0$. La coordenada r es espacial en el interior, pero es nula en $r_H = MG/c^2$. La singularidad $r=0$ es una hipersuperficie temporal. Notablemente este es el caso donde la repulsión coulombiana equilibra la atracción gravitatoria entre cuerpos cargados.

► Geometría de Kerr (agujero negro rotante)

En 1963, 47 años después de la solución esférica de Schwarzschild, Kerr obtuvo la solución axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein de vacío. La geometría de Kerr está caracterizada por dos parámetros: la masa y el momento angular. Para quien se interese en saber cómo se obtuvo una solución de esta naturaleza, es recomendable la narración que el propio autor publicara en 2007 (arXiv:0706.1109). La solución es

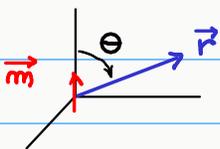
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \frac{r}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{4GMa}{r^2 c} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\varphi^2$$

donde $\Delta \equiv r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + a^2$, $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

Para r grande es $g_{00} \approx 1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2GM}{r^3 c^2} a^2 \cos^2 \theta$

$$g_{0\varphi} \approx \frac{2GMa \sin^2 \theta}{rc^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta\right)$$

► **Gravitomagnetismo:** $g_{0\varphi}$ es comparable al potencial vector de un dipolo magnético en un espacio euclidiano:



$$\vec{A} \propto \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{m}{r^2} \sin \theta \hat{e}_\varphi = \frac{m}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} = A^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ pues $g_E(\hat{e}_\varphi, \hat{e}_\varphi) = 1$

entonces:

$$A_\varphi = g_{E\varphi\varphi} A^\varphi = \frac{m}{r} \sin^2 \theta \quad \text{que es análogo a } g_{0\varphi}$$

La magnitud $J \equiv \frac{aM}{c}$ es el momento angular de la solución. Así resulta no sólo de la analogía magnética sino de la definición global de momento angular, que se utiliza para soluciones asintóticamente planas.

Las coordenadas (t, r, θ, φ) se llaman coordenadas de Boyer-Lindquist. En el límite $a \rightarrow 0$ recuperamos la solución de Schwarzschild en la carta usual. Si hacemos $M = 0$ obtenemos la geometría de Minkowski, aun cuando $a \neq 0$ (porque corresponde a $M \rightarrow 0$, $J \rightarrow 0$ pero $a = c \frac{J}{M} = \text{cte}$).

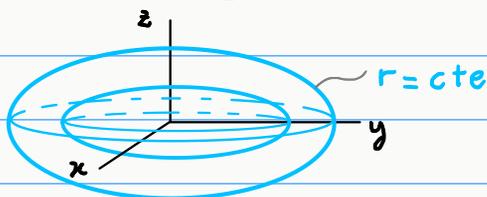
En efecto, si $M = 0$ tendremos la geometría de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas (un tipo de coordenadas elipsoidales):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

cuya relación con las coordenadas cartesianas es

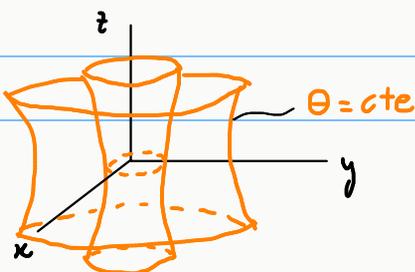
$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

Las superficies $r = \text{cte}$ son elipsoides de revolución alrededor del eje z :



$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

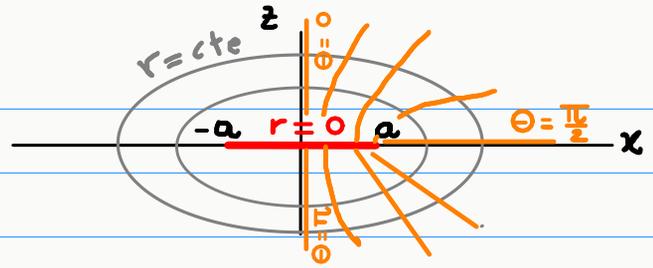
En lugar de los conos característicos de las coordenadas esféricas, las superficies $\theta = \text{cte}$ son hiperboloides:



$$\frac{x^2 + y^2 - a^2 \sin^2 \theta}{z^2} = \tan^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta$$

En el plano xz las líneas coordenadas se ven así:



El disco de radio a en el plano xy corresponde a $r=0$. Sus distintos puntos se diferencian por los valores de las coordenadas Θ , φ . En efecto, si $r=0$ resulta que $z=0$, $x = a \sin \Theta \cos \varphi$, $y = a \sin \Theta \sin \varphi$. En particular, $x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \Theta$.

Volviendo a la métrica de Kerr, vemos que no depende de t , y que $g_{t\varphi} \neq 0$. Decimos que la métrica es estacionaria; no es estática porque $g_{t\varphi} \neq 0$ implica que la métrica no es invariante ante el cambio $t \rightarrow -t$. La geometría de Kerr es singular en $\varrho = 0$, donde el invariante de Kretshmann $R_{\lambda\mu\nu\rho} R^{\lambda\mu\nu\rho}$ diverge. ϱ se anula en $r=0$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (en Minkowski estos valores de las coordenadas describen el anillo de radio a en el plano xy).

► Horizontes: el sector radial de la métrica constituye un sub-bloque diagonal. Por lo tanto resulta que $g^{rr} = g_{rr}^{-1}$. Entonces la anulación de g^{rr} requiere que

$$\Delta(r_H) = 0$$

Si $\frac{GM}{c^2} > a$ se tienen dos soluciones (horizontes exterior e interior):

$$r_{\pm} = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - a^2}$$

$\frac{GM}{c^2} < a$ conduce a una singularidad desnuda. El caso $\frac{GM}{c^2} = a$ se llama "extremal".

▶ Órbita de un fotón

Consideremos la órbita circular de un fotón en el plano ecuatorial $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

$$ds^2 = 0 = g_{tt} dt^2 + 2 g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

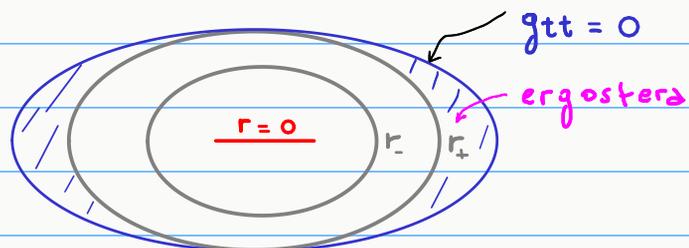
$$\Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\pm} = - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}$$

recordemos que: $\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} < 0$

Evaluemos esta cantidad sobre la superficie donde se anula g_{tt} (desde el punto de vista geométrico, esta es la superficie donde se vuelve nulo el vector de Killing $\bar{k} = \frac{\partial}{\partial t}$, y se llama "superficie de límite estacionario")

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{-} = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{+} = \frac{a}{\frac{2GM^2}{c^2} + a^2} \quad \text{en } g_{tt} = 0$$

La solución no nula tiene el signo de a , y es interpretada como un fotón moviéndose en la dirección del giro del agujero negro. La solución nula indica que el fotón que intenta moverse en sentido opuesto queda fijo (en esta carta, por supuesto) cuando la órbita se realiza sobre la "superficie de límite estacionario" donde $g_{tt} = 0$.



Este fenómeno es conocido como el "dragado" de los sistemas de referencia, pues implica que las partículas que están dentro de la "ergosfera" (región comprendida entre la superficie de límite estacionario y el horizonte externo) son obligadas a moverse en la dirección del giro del agujero negro.

Cuando el fotón está sobre el horizonte externo, la menor de las velocidades angulares que puede tener el fotón es

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_-(r_+) = \frac{ac}{r_+^2 + a^2} \equiv \Omega_H \quad (\text{en el sentido de rotación del agujero negro})$$

Esta cantidad recibe el nombre de "velocidad angular del horizonte" Ω_H .

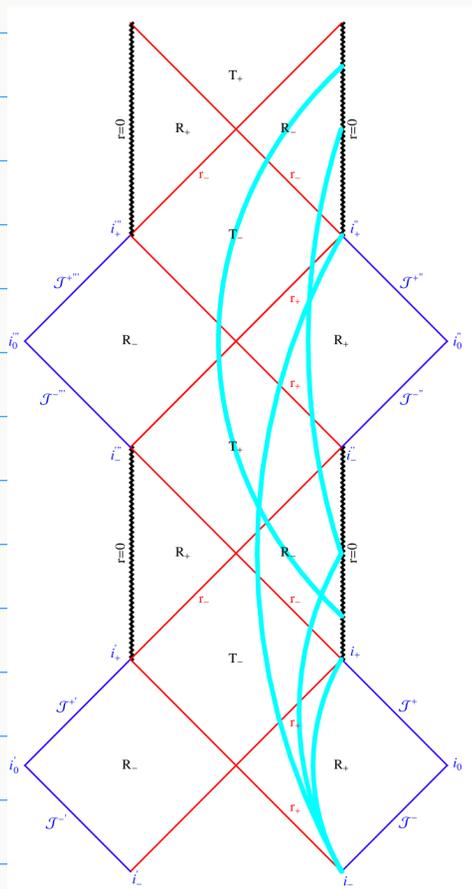
► Proceso de Penrose

Una partícula libremente gravitante en la geometría de Kerr conserva el valor de $E = \bar{K} \cdot \bar{p}$, donde $\bar{K} = \frac{\partial}{\partial t}$ es un vector de Killing. \bar{K} es un vector temporal fuera de la ergosfera, pero dentro de la ergosfera es espacial. En cambio \bar{p} es siempre temporal. Como una partícula puede entrar y salir de la ergosfera, Penrose ideó un proceso mediante el cual la región exterior podía ganar energía. La idea es que una partícula entre en la ergosfera (con $E > 0$, claro), y allí se fraccione en dos partes. Como \bar{K} es espacial dentro de la ergosfera, es factible que una de las partes adquiera una $E < 0$. Se puede ver que en tal caso esa parte no puede emerger a la región externa (a menos que sea acelerada). Por conservación de la energía, la otra parte posee energía mayor que la partícula inicial. En caso de emerger de la ergosfera, la región exterior habrá ganado energía. Se puede ver, además, que la parte de energía negativa debe tener momento angular negativo, contribuyendo así a la disminución del momento angular del agujero negro. El proceso de Penrose extrae energía del agujero negro rotante a expensas de su momento angular.

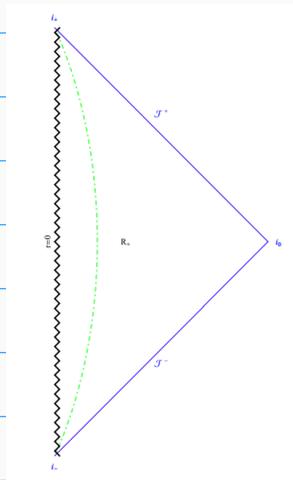
► Geometría de Kerr-Newman: es la geometría de un agujero negro rotante y cargado. Fue obtenida en 1965.

▶ Diagramas de Penrose: geometría de Reissner-Nordstrom

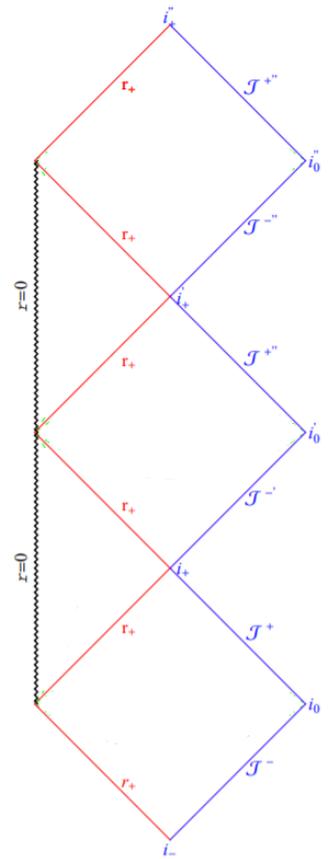
Las Figuras pertenecen a: V. A. Berezin & V. I. Dokuchaev, "Global geometry of space-time with the charged shell", arXiv:1404.2726.



$GM^2 > Q^2$



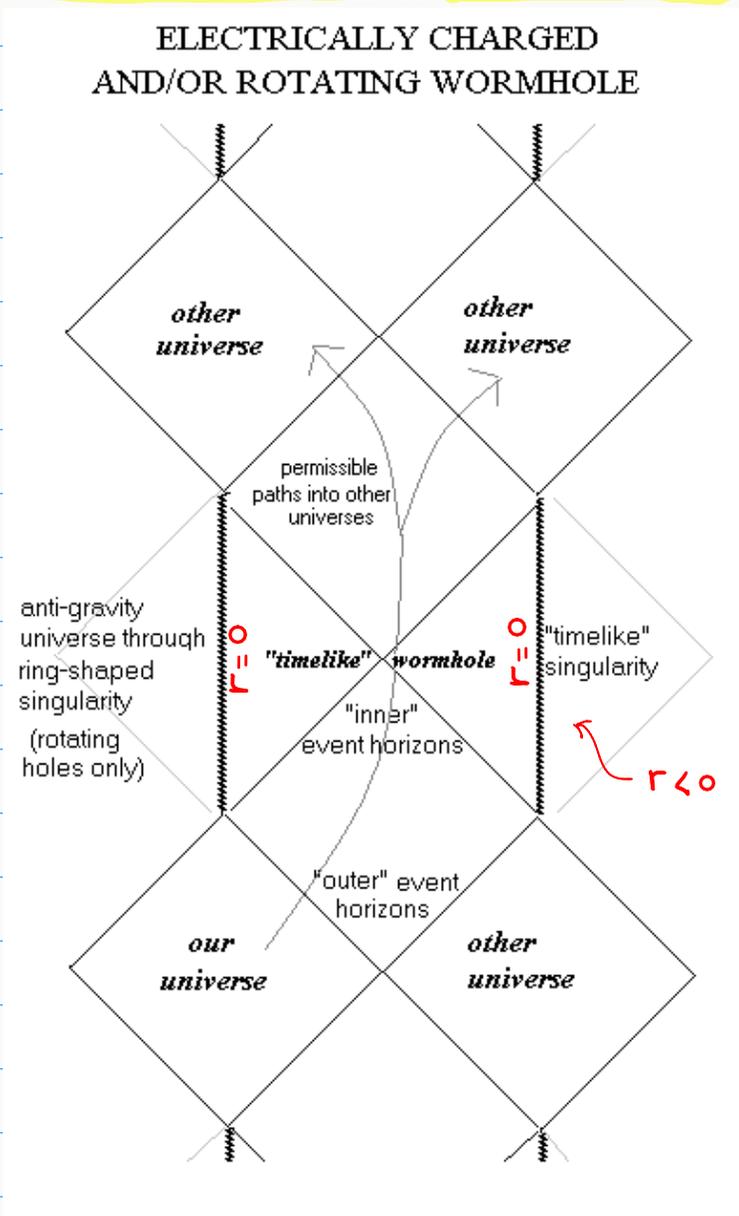
$GM^2 < Q^2$
(singularidad desnuda)



$GM^2 = Q^2$
(extremal)

Estos diagramas corresponden a la máxima extensión analítica de la geometría en cuestión.

► **Diagramas de Penrose: geometría de Kerr**



En este diagrama conforme no puede decirse que cada punto representa una esfera, como en los anteriores casos, pues la geometría de Kerr carece de tal simetría.

En realidad, esta representación corresponde a fijar el valor $\Theta = \frac{\pi}{2}$; por eso $r=0$ es la singularidad.

Pero en cualquier otro valor de Θ no habría problema en extender la carta a los valores negativos de la coordenada r , ya que no atravesaríamos la singularidad. Sin embargo, en una región con r negativo aparecerían curvas temporales cerradas (CTC).

Si una curva tiene $t=cte$, $r=cte < 0$, y $\Theta = \frac{\pi}{2}$ entonces el intervalo es

$$ds^2 = - \left[r^2 + a^2 + \frac{2GM}{rc^2} a^2 \right] d\psi^2$$

Para r suficientemente pequeño y negativo, resulta $ds^2 > 0$: la curva es temporal, y se cierra porque la coordenada ψ es periódica. No obstante, estos aspectos que aparecen en las extensiones analíticas de las soluciones deben verse como totalmente especulativos; se considera que el colapso gravitatorio no genera todas las regiones que aparecen en el diagrama.