Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

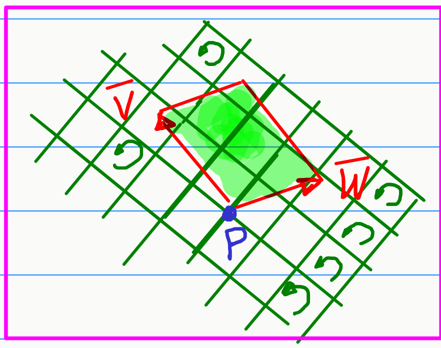
Clase 8

Integración. Teorema de Stokes

Representación gráfica de una 2-forma. Nociones de área y volumen

Una 2-forma $\tilde{\alpha}$ es una máquina lineal que toma dos vectores $\bar{v}, \bar{w}$ para dar un número. Si los vectores son linealmente dependientes el resultado es nulo.

En $m=2$ una 1-forma se representa mediante líneas paralelas en el plano tangente (o hiperplanos paralelos en dimensión arbitraria). Una 2-forma se representa mediante una cuadrícula (o hipertubos, en dimensión arbitraria). El valor de $\tilde{\alpha}(\bar{v},\bar{w})$ corresponde al número de celdas abarcadas por el paralelogramo formado por los vectores:



$\tilde{\alpha}(\bar{v},\bar{w}) \longrightarrow$ cantidad de celdas abarcadas por el paralelogramo

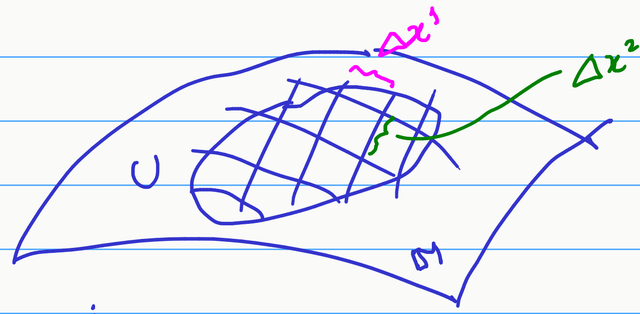
Se cumple la linealidad: $\tilde{\alpha}(\lambda\bar{v},\bar{w}) = \lambda\,\tilde{\alpha}(\bar{v},\bar{w})$ en ambos argumentos. El giro ↺ sirve para determinar el signo de $\tilde{\alpha}(\bar{v},\bar{w})$ y satisfacer la antisimetría $\tilde{\alpha}(\bar{v},\bar{w}) = -\tilde{\alpha}(\bar{w},\bar{v})$.

Vemos que una 2-forma introduce una noción de área en una variedad de 2 dimensiones. Del mismo modo cada n-forma se asocia con una noción de volumen n-dimensional.

La introducción de una métrica seleccionará un volumen natural.

Integración en una variedad diferenciable

La idea que una n-forma es una noción de volumen nos pone en el camino de definir el cálculo integral en una variedad diferenciable. Para reforzar esta idea, consideremos una región U de la variedad que es cubierta por una carta $\{x^i\}$. Podemos dividir la región U en celdas infinitesimales de lados Δx^i tomados sobre las líneas coordenadas:



Las diferencias de coordenadas Δx^i no se comportan como componentes de vectores, pero sí lo hacen si son infinitesimales: $\Delta x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Delta x^i$ cuando $\Delta x^i \to 0$. Dado un campo de n-formas $\tilde{\omega}$ podemos evaluarlo en n vectores infinitesimales tangentes a las líneas coordenadas, definidos en cada punto de la región U como

$$\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \Delta x^m \frac{\partial}{\partial x^m}$$

Entonces obtenemos

$$\tilde{\omega}\left(\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \Delta x^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = \omega_{12\ldots m}\, \Delta x^1 \Delta x^2 \ldots \Delta x^m$$

que podemos verlo como un volumen de la celda respectiva en la variedad, definido a través de la n-forma $\tilde{\omega}$. Todo esto sirve de preámbulo para definir la integral de una n-forma en una región de la variedad como

$$\boxed{\int_U \tilde{\omega} \doteq \int \omega_{12\ldots m}(x)\, dx^1 dx^2 \ldots dx^m} \in \mathbb{R}$$

esta integral se realiza en $\mathbb{R}^m$, en el recinto $\varphi(U)$

De esta manera el cálculo integral sobre $\mathbb{M}$ se reduce al cálculo integral sobre $\mathbb{R}^m$. Para que esta definición operativa sea aceptable debemos probar su carácter geométrico, es decir la independencia de la definición de la carta elegida para cubrir la región U. Lo esencial de la demostración es que la componente de un n-forma se transforma con el Jacobiano del cambio de coordenadas. Veámoslo en $m = 2$:

Consideramos el cambio de carta $\{x^1, x^2\} \longrightarrow \{y^1, y^2\}$

Entonces
$$\tilde{\omega} = \omega_{12}\, \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \omega_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \tilde{dy}^1 + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \tilde{dy}^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \tilde{dy}^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \tilde{dy}^2 \right)$$

$$= \omega_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^1}{\partial y^2}\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right) \tilde{dy}^1 \wedge \tilde{dy}^2 = \omega_{12}\, J\, \tilde{dy}^1 \wedge \tilde{dy}^2$$

Es decir que $\boxed{\omega_{1'2'} = J\, \omega_{12}}$

En lenguaje corriente se dice que $\omega_{12\ldots m}$ es una "densidad".

Entonces si calculamos $\int \tilde{\omega}$ usando la carta $\{y^1, y^2\}$,

$$\int \tilde{\omega} = \underbrace{\int \omega_{1'2'}\, dy^1 dy^2}_{\text{en } \mathbb{R}^2} = \underbrace{\int \omega_{12}\, J\, dy^1 dy^2}_{\text{en } \mathbb{R}^2}$$

Del cálculo integral en $\mathbb{R}^m$ sabemos que

$$J\, dy^1 dy^2 = dx^1 dx^2$$

Por lo tanto $\int \tilde{\omega}$ es independiente de la carta. ✓

En realidad podría ocurrir un cambio de signo si J fuese negativo. Esto se solucionaría con una permutación impar del ordenamiento de las coordenadas nuevas, evitando así pasar de una base "derecha" a una base "izquierda". Lo usual es definir una orientación en U y usar sólo bases derechas:

- Dada una n-forma $\tilde{\Omega}$ continua y no nula, decimos que una base $\{\bar{E}_\alpha\}$ es derecha respecto de $\tilde{\Omega}$ en la región U si $\tilde{\Omega}(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) > 0 \quad \forall P \in U$.

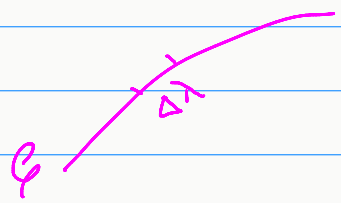
La integración así definida puede extenderse a todo $\mathbb{M}$ si $\mathbb{M}$ es orientable (es decir, si una terna derecha puede definirse contínuamente en todo $\mathbb{M}$).

(de Rham extendió la integración a variedades no orientables, como la cinta de Moebius).

- Una p-forma se integra en una subvariedad de dimensión p. Para ello la p-forma se "restringe" a la subvariedad. La p-forma restringida actúa sólo sobre vectores tangentes a la subvariedad.

Por ejemplo, para integrar una 1-forma $\tilde{\alpha}$ sobre una curva $\mathcal{C}$ cuyo vector tangente es $d/d\lambda$ es esencial saber qué "volumen" le otorga $\tilde{\alpha}$ a una celda $\Delta\lambda$. Para ello hay que aplicar $\tilde{\alpha}$ al vector $\Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}$:

$$\tilde{\alpha}\left(\Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\right) = \Delta\lambda\, \tilde{\alpha}\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \Delta\lambda\, \alpha_i \frac{dx^i}{d\lambda}(\lambda)$$



donde $x^i(\lambda)$ son las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{C}$.

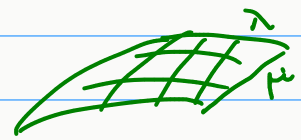
Entonces $$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \tilde{\alpha} = \int_{\varphi(\mathcal{C})} \alpha_i \frac{dx^i}{d\lambda}(\lambda)\, d\lambda}$$ es el "trabajo"

Podemos decir que $$\tilde{\alpha}\big|_{\mathcal{C}} = \alpha_i \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}\, \tilde{d\lambda} = \tilde{\alpha}\left(\frac{d}{d\lambda}\right) \tilde{d\lambda}$$

donde $\tilde{d\lambda}$ es una 1-forma definida sobre la subvariedad $\mathcal{C}$, y es tal que $\tilde{d\lambda}(d/d\lambda) = d\lambda/d\lambda = 1$. Cualquier vector tangente a $\mathcal{C}$ tiene la forma $\bar{V} = v(\lambda)\, d/d\lambda$, por lo tanto $\tilde{\alpha}|_{\mathcal{C}}(\bar{V}) = v(\lambda)\, \alpha_i \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}$.

Asimismo una 2-forma se integra en una subvariedad S de 2 dimensiones. Parametrizamos la subvariedad con dos parámetros λ, μ, que actúan como coordenadas sobre la subvariedad. Como sucede sobre una curva $\mathcal{C}$, los respectivos vectores $\partial/\partial\lambda$, $\partial/\partial\mu$, tangentes a cada línea coordenada en cada punto de la subvariedad, resultan de derivar las ecuaciones paramétricas de la superficie S, $x^i = x^i(\lambda, \mu)$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial x^i(\lambda,\mu)}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{\partial x^i(\lambda,\mu)}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial x^i}$$



El "volumen" que $\tilde{\alpha}$ otorga a la celda definida por los vectores $\Delta\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}$, $\Delta\mu \frac{\partial}{\partial\mu}$ es

$$\tilde{\alpha}\left(\Delta\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}, \Delta\mu \frac{\partial}{\partial\mu}\right) = \Delta\lambda\,\Delta\mu\; \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial x^i}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Delta\lambda\,\Delta\mu\; \alpha_{|ij|}\left(\frac{\partial x^i}{\partial\lambda}\frac{\partial x^j}{\partial\mu} - \frac{\partial x^j}{\partial\lambda}\frac{\partial x^i}{\partial\mu}\right)$$

Entonces
$$\boxed{\int_S \tilde{\alpha} = \int_{\varphi(S)} \alpha_{|ij|}\left(\frac{\partial x^i}{\partial\lambda}\frac{\partial x^j}{\partial\mu} - \frac{\partial x^j}{\partial\lambda}\frac{\partial x^i}{\partial\mu}\right) d\lambda\, d\mu}$$

La 2-forma $\tilde{\alpha}$ restringida a S es $\tilde{\alpha}|_S = \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\mu}\right) \tilde{d\lambda} \wedge \tilde{d\mu}$, donde $\tilde{d\lambda}$ y $\tilde{d\mu}$ son 1-formas definidas sobre S tales que $\tilde{d\lambda}(\partial/\partial\lambda) = 1$, $\tilde{d\lambda}(\partial/\partial\mu) = 0 = \tilde{d\mu}(\partial/\partial\lambda)$, $\tilde{d\mu}(\partial/\partial\mu) = 1$.

Nótese que una 0-forma f no puede ser integrada a menos que se la multiplique por una p-forma, en cuyo caso se integrará en una subvariedad de dimensión p.

La orientación de una subvariedad puede ser externamente inducida mediante la n-forma $\tilde{\Omega}$ que usamos para definir bases derechas en $\mathbb{M}$. Para ello ocupamos las $m-p$ primeras ranuras de $\tilde{\Omega}$ con $m-p$ vectores linealmente independientes NO tangentes a la subvariedad. Las restantes p ranuras serán ocupadas por vectores tangentes a la subvariedad, y pueden usarse para definir una orientación exterior de la misma. Si el procedimiento puede extenderse contínuamente a toda la subvariedad, entonces la subvariedad es orientable. Por supuesto, así definida la orientación derecha depende de cómo se eligen los $m-p$ primeros vectores.

Notación: el procedimiento de ocupar la primera ranura de una p-forma $\tilde{\omega}$ con un dado vector $\bar{X}$ para generar una $(p-1)$-forma se denota de distintas maneras en la literatura:

$$\tilde{\omega}(\bar{X}, \ldots) = i_{\bar{X}}\, \tilde{\omega} = \bar{X} \lrcorner\, \tilde{\omega}$$

Teorema de Stokes

El teorema fundamental del cálculo dice que $\displaystyle\int_a^b df = f(b) - f(a)$

donde f es una función escalar o 0-forma.

En una variedad diferenciable de m dimensiones, el teorema de Stokes generalizado dice que

$$\boxed{\int_U d\tilde{\eta} = \int_{\partial U} \tilde{\eta}}$$

donde $\tilde{\eta}$ es una $(m-1)$-forma derivable con continuidad, y ∂U es el borde de la región U (en la integral, $\tilde{\eta}$ está restringida a ∂U).

La definición precisa de "borde" y su orientación requiere del concepto de "simplex" (ver Flanders p. 57). En una carta $\{x^i\}$ tal que $x^1=0$ es el borde y U ocupa la región $x^1 \leq 0$, entonces $\{x^2, x^3, \ldots, x^m\}$ son coordenadas en ∂U apropiadamente orientadas para la aplicación del teorema de Stokes.

- Si M no tiene borde resulta $\int_M \tilde{d}\tilde{\eta} = 0 \quad \forall\, \tilde{\eta}$

- El borde de un borde es cero: $\int_{\partial\partial U} \tilde{\beta} = \int_{\partial U} \tilde{d}\tilde{\beta} = \int_U \tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\beta}) \equiv 0$

Ejemplo: en $n=2$ sea $\tilde{\eta} = \eta_1 \tilde{dx}^1 + \eta_2 \tilde{dx}^2$

$$\tilde{d}\tilde{\eta} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2}\,\tilde{dx}^2\wedge\tilde{dx}^1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x^1}\,\tilde{dx}^1\wedge\tilde{dx}^2 = \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2}\right)\tilde{dx}^1\wedge\tilde{dx}^2$$

Entonces $\int_{\varphi(U)}\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2}\right) dx^1\, dx^2 = \oint_{\varphi(\partial U)}\left(\eta_1 \frac{dx^1}{d\lambda} + \eta_2 \frac{dx^2}{d\lambda}\right) d\lambda$

que es el teorema de Stokes usual en $\mathbb{R}^2$.

- El teorema de la divergencia forma parte del teorema de Stokes generalizado. En primer lugar veamos cómo definir la divergencia de un vector con los elementos que contamos hasta aquí. Dado un vector $\bar{V}$ y un volumen (n-forma) $\tilde{\omega}$ definimos la divergencia como la 0-forma o escalar tal que

$$\boxed{\left(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\, \bar{V}\right)\tilde{\omega} \doteq \tilde{d}\left[\tilde{\omega}(\bar{V}, \ldots)\right]}$$

Es claro que la expresión $\partial_i V^i$ no serviría como definición porque no es escalar ante transformaciones generales de coordenadas. Por lo tanto nos interesa saber a qué combinación de derivadas de las componentes de $\bar{V}$ corresponde esta definición.

Veamos el caso $m = 2$: $\tilde{\omega} = \omega_{12}\, \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \omega \left(\tilde{dx}^1 \otimes \tilde{dx}^2 - \tilde{dx}^2 \otimes \tilde{dx}^1 \right)$

$$\tilde{\omega}(\bar{V}, \;) = \omega \left(V^1 \tilde{dx}^2 - V^2 \tilde{dx}^1 \right)$$

$$d\left[\tilde{\omega}(\bar{V}, \;)\right] = \partial_1 (\omega V^1)\, \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 - \partial_2 (\omega V^2)\, \tilde{dx}^2 \wedge \tilde{dx}^1$$

$$= \left(\partial_1 (\omega V^1) + \partial_2 (\omega V^2) \right) \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2$$

Reemplazando en la definición:

$$\boxed{\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V} = \frac{1}{\omega} \partial_i (\omega V^i)}$$

Se puede ver que este resultado vale en cualquier dimensión m (en ese caso $\omega = \omega_{12\cdots m}$).

Entonces el teorema de Stokes generalizado dice que

$$\int_U (\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V})\, \tilde{\omega} \underset{\text{definición}}{=} \int_U \tilde{d}\left[\tilde{\omega}(\bar{V}, \cdots)\right] \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\bar{V}, \cdots)$$

Para ver en este resultado la forma usual del teorema de la divergencia deberíamos mostrar que el miembro de la derecha tiene características de flujo del vector $\bar{V}$. Consideremos una 1-forma $\tilde{m}$ normal a ∂U, y una $(m-1)$-forma $\tilde{\alpha}$ tal que

$$\tilde{\omega} = \tilde{m} \wedge \tilde{\alpha}$$

En general se prueba que si $\tilde{\beta}$ es una p-forma vale que (Schutz, 4.16 y ejercicio 4.9)

$$(\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha})(\bar{v},\dots) = \tilde{\beta}(\bar{v},\dots)\wedge\tilde{\alpha} + (-1)^p\,\tilde{\beta}\wedge\tilde{\alpha}(\bar{v},\dots)$$

Entonces, en nuestro caso,

$$\tilde{\omega}(\bar{v},\dots) = \tilde{m}(\bar{v})\;\tilde{\alpha} - \tilde{m}\wedge\tilde{\alpha}(\bar{v},\dots)$$

El segundo término se anula cuando restringimos a ∂U: $\tilde{m}\big|_{\partial U} = 0$

Entonces $\tilde{\omega}(\bar{v},\dots)\big|_{\partial U} = \tilde{m}(\bar{v})\;\tilde{\alpha}\big|_{\partial U}$

El teorema queda:

$$\boxed{\int_U (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\bar{v})\,\tilde{\omega} = \int_{\partial U} \tilde{m}(\bar{v})\;\tilde{\alpha}}$$

donde $\tilde{m}(\bar{v}) = m_i v^i$; $\tilde{\alpha}\big|_{\partial U}$ es un volumen inducido en ∂U por $\tilde{\omega}$.

Como $\tilde{m}$ está definido a menos de una constante (no tenemos manera de normalizarla todavía), lo mismo sucede con el volumen inducido $\tilde{\alpha}\big|_{\partial U}$. Las restantes ambigüedades que surgen de la descomposición $\tilde{\omega} = \tilde{m}\wedge\tilde{\alpha}$ son inocuas para $\tilde{\alpha}\big|_{\partial U}$.

▶ Volumen métrico: la arbitrariedad asociada a $\tilde{\omega}$ en la definición de la divergencia de un vector desaparecen si existe una noción de volumen natural. Eso es lo que sucede en espacios que poseen métrica, como el espacio euclidiano o el espacio-tiempo de Minkowski.

En un espacio euclidiano existen coordenadas privilegiadas, las coordenadas cartesianas, en cuya base el tensor métrico es diagonal con componentes iguales a 1. El volumen natural es el volumen métrico

$$\tilde{\Omega} = \widetilde{dX} \wedge \widetilde{dY} \wedge \widetilde{dZ} \qquad (n=3)$$

En el espacio-tiempo de Minkowski la geometría privilegia también las coordenadas cartesianas {X, Y, Z}, que miden distancias, junto con el tiempo T medido por relojes en reposo. En esa base coordenada el tensor métrico toma su forma más simple: $g_{ij} = \text{diag}\,(1,-1,-1,-1)$, y el intervalo resulta $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = c^2 (dT)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2$.

El volumen métrico del espacio-tiempo de Minkowski es la 4-forma

$$\tilde{\Omega} = c\, \widetilde{dT} \wedge \widetilde{dX} \wedge \widetilde{dY} \wedge \widetilde{dZ}$$

Pero, ¿cómo se escribe este mismo volumen métrico en una carta arbitraria? Sabemos que la componente de una n-forma es una densidad: transforma con el Jacobiano del cambio de coordenadas, es decir que

$$\tilde{\Omega} = J\; \widetilde{dx^0} \wedge \widetilde{dx^1} \wedge \widetilde{dx^2} \wedge \widetilde{dx^3}$$

donde J es el determinante de la matriz del cambio de coordenadas

$$\{cT, X, Y, Z\} \longrightarrow \{x^i\}$$

Veamos que J coincide con $\sqrt{|\det g_{ij}|}$ en la nueva base:

$$g_{ij} = \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \frac{\partial X^J}{\partial x^j} \underbrace{g_{IJ}}_{\text{diag}(1,-1,-1,-1)}$$

Entonces $\det g_{ij} = \Big(\underbrace{\det \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)}_{J} \Big)^2 \underbrace{\det g_{IJ}}_{-1}$

Es decir que $|\det g_{ij}| = J^2$

El volumen métrico es

$$\boxed{\tilde{\Omega} = \sqrt{|\det g_{ij}|}\ \tilde{d}x^0 \wedge \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3}$$

Este resultado será válido también en Relatividad General

En los espacios que posean métrica usaremos $\omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}$ en la definición de la divergencia de un vector.