Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 9

Aplicaciones del cálculo exterior. Operador estrella de Hodge. Derivada de Lie

Aplicaciones del cálculo exterior

1) Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $f(x,y)$ una función en $\mathbb{R}^2$, que puede ser compleja. Hagamos el cambio de carta

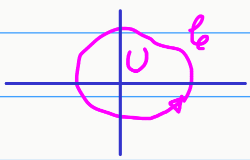
$$\{x, y\} \longrightarrow \{z, \bar{z}\}$$

donde $z = \dfrac{x+iy}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{x-iy}{2}$

Entonces $\tilde{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\tilde{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\tilde{d}y = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\tilde{d}z + \tilde{d}\bar{z}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{\tilde{d}z - \tilde{d}\bar{z}}{i}$

es decir $\tilde{d}f = \underbrace{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\tilde{d}z + \underbrace{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}}\tilde{d}\bar{z}$

Apliquemos el teorema de Stokes generalizado:



$$\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{f\,\tilde{d}z}_{\text{1-forma}} = \int_U \tilde{d}\left[f\,\tilde{d}z\right] = \int_U \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\tilde{d}\bar{z}\wedge\tilde{d}z$$

Si f es analítica (u "holomorfa") en U (incluyendo $\mathcal{C}$) entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$; esto significa que f es una genuina función de una variable compleja z más que una mera función de dos variables reales. En ese caso

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f\,\tilde{d}z = 0}$$

Cuando f no es analítica en U tendremos, por ejemplo, $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ para cualquier $\mathcal{C}$ que encierre el origen.

Operador estrella de Hodge

En los espacios que poseen métrica definimos un operador $*$ que toma una p-forma y la convierte en una $(n-p)$-forma:

$$\boxed{(*\tilde{\beta})_{i_{p+1}\cdots i_n} \doteq \frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_p\, i_{p+1}\cdots i_n}\,\beta^{i_1\cdots i_p} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_p\, i_{p+1}\cdots i_n}\,\beta^{|i_1\cdots i_p|}}$$

es una dualidad entre dos espacios de igual dimensión

donde $\beta^{i_1\cdots i_p} = g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_p j_p}\,\beta_{j_1\cdots j_p}$

siendo g^{ij} la inversa de la métrica: $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, y

Símbolo de Levi-Civita

$$\varepsilon_{j_1\cdots j_n} \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } j_1\cdots j_n \text{ es permutación par de } 12\cdots n \\ -1 & \text{si } j_1\cdots j_n \text{ es permutación impar de } 12\cdots n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que $\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_n}$ tiene carácter tensorial pues son las componentes del volumen métrico:

$$\boxed{\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\,\widetilde{dx}^1\wedge\cdots\wedge\widetilde{dx}^n = \frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_n}\,\widetilde{dx}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\widetilde{dx}^{j_n}}$$

Propiedad: sean dos p-formas $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$

$$\boxed{\underset{\uparrow\ p\text{-forma}}{\tilde{\alpha}}\wedge\underbrace{*\tilde{\beta}}_{(n-p)\text{-forma}} = \alpha_{|i_1\cdots i_p|}\,\beta^{|i_1\cdots i_p|}\,\underset{\uparrow\ \text{volumen métrico}}{\tilde{\Omega}}}$$

Demostración:

$$\tilde{\alpha}\wedge *\tilde{\beta} = \alpha_{|i_1\cdots i_p|}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_p|i_{p+1}\cdots i_m|}\,\beta^{|j_1\cdots j_p|}$$
$$\tilde{dx}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\tilde{dx}^{i_p}\wedge\tilde{dx}^{i_{p+1}}\wedge\ldots\wedge\tilde{dx}^{i_m}$$

En esta suma múltiple los únicos términos que sobreviven son aquellos con $|j_1\cdots j_p| = |i_1\ldots i_p|$. En efecto, $|j_1\cdots j_p|$ debe ser complementario de $|i_{p+1}\cdots i_m|$ en el símbolo de Levi-Civita; y este a su vez es complementario de $|i_1\ldots i_p|$ en la base.

Por lo tanto, cada término de la suma múltiple corresponde a una posible elección de $|i_1\ldots i_p|$. Además cada término contiene el volumen métrico, que aparece como

$$\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{|i_1\ldots i_p|\,|i_{p+1}\cdots i_m|}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{i_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m}$$
$$= \sqrt{|g|}\,\tilde{dx}^1\wedge\ldots\wedge\tilde{dx}^m = \tilde{\Omega}$$

(no hay términos repetidos porque el orden de los índices está congelado). Así resulta la propiedad que queríamos demostrar. ✓

▶ Propiedades

i) $\tilde{\alpha}\wedge *\tilde{\beta} = \tilde{\beta}\wedge *\tilde{\alpha}$ $\qquad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ p-formas

ii) $*1 = \tilde{\Omega}$

iii) $**=(-1)^{p(m-p)+s}$ $\qquad s$: número de signos $(-)$ en la métrica diagonalizada

El factor $(-1)^s$ aparece porque aplicando dos veces el operador se forma el factor $|g|$; a su vez con las inversas de la métrica se forma el factor $\det(g^{ij}) = g^{-1}$, siendo $|g|/g = (-1)^s$.

Ejemplo: el tensor de campo electromagnético $\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$ es una 2-forma cuyas componentes son $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, donde $\tilde{A}$ es el cuadripotencial.

Entonces

$$(*\tilde{F})_{kl} = \frac{1}{2!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{ijkl}\,F^{ij}$$

$$(*\tilde{F})_{kl} = \sqrt{|g|}\begin{pmatrix} 0 & F^{23} & -F^{13} & F^{12} \\ \cdots & 0 & F^{03} & -F^{02} \\ \cdots & \cdots & 0 & F^{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto: $(*\tilde{F})_{01} = \frac{1}{2!}\sqrt{|g|}\left(\varepsilon_{2301}F^{23} + \varepsilon_{3201}F^{32}\right) = \sqrt{|g|}\,F^{23}$, etc.

Nótese que: $\tilde{F}\wedge *\tilde{F} = F_{|ij|}\,\tilde{d}x^i\wedge\tilde{d}x^j \wedge \sqrt{|g|}\left(F^{23}\,\tilde{d}x^0\wedge\tilde{d}x^1 + \cdots\cdots\right)$

$$= F_{23}F^{23}\underbrace{\sqrt{|g|}\;\tilde{d}x^0\wedge\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3}_{\tilde{\Omega}} + \cdots$$

$$= F_{|ij|}F^{|ij|}\,\tilde{\Omega}$$

Para calcular $*\tilde{F}$ en Minkowski es útil la siguiente tabla:

$*(c\,dT\wedge dX) = -dY\wedge dZ$ $\qquad$ $*(dX\wedge dY) = c\,dT\wedge dZ$

$*(c\,dT\wedge dY) = -dZ\wedge dX$ $\qquad$ $*(dZ\wedge dX) = c\,dT\wedge dY$

$*(c\,dT\wedge dZ) = -dX\wedge dY$ $\qquad$ $*(dY\wedge dZ) = c\,dT\wedge dX$

Electromagnetismo: la acción del campo electromagnético es

$$\boxed{S[\tilde{A}] = -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \tilde{F}\wedge *\tilde{F} - \frac{1}{c}\int \tilde{A}\wedge *\tilde{j}}$$ donde $\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$

La variación de la acción respecto de $\tilde{A}$ es

$$\delta S = -\frac{1}{2\mu_0 c}\int \left(d\,\delta\tilde{A}\wedge *\tilde{F} + \underbrace{\tilde{F}\wedge * d\,\delta\tilde{A}}_{d\,\delta\tilde{A}\wedge *\tilde{F}}\right) - \frac{1}{c}\int \delta\tilde{A}\wedge *\tilde{j}$$

es decir, $\delta S_{em} = -\frac{1}{\mu_0 c}\int \delta\tilde{A}\wedge\left(\tilde{d}*\tilde{F} + \mu_0 *\tilde{j}\right)$ + término de borde

Leyes de Maxwell: $\boxed{\tilde{d}\tilde{F} = 0 \quad , \quad \tilde{d}*\tilde{F} = -\mu_0 *\tilde{j}}$

$\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A}$ es exacta — ecuaciones dinámicas

$A_i = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A}\right)$

$j^i = (\rho c, \vec{j})$

$\Downarrow$

Ecuación de continuidad: $\tilde{d}*\tilde{j} = 0$

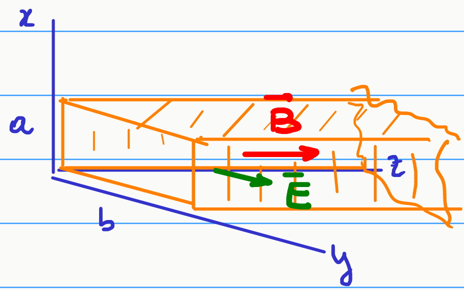
En Minkowski es

$$F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \cdots & 0 & -B_z & B_y \\ \cdots & \cdots & 0 & -B_x \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}\wedge *\tilde{F} = F_{|ij|}F^{|ij|}\,\overbrace{c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}X\wedge\tilde{d}Y\wedge\tilde{d}Z}^{\tilde{\Omega}} = \left(-c^{-2}E^2 + B^2\right)\tilde{\Omega}$$

$$*\tilde{j} = \rho c\,\tilde{d}X\wedge\tilde{d}Y\wedge\tilde{d}Z - j_x\,c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}Y\wedge\tilde{d}Z - j_y\,c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}Z\wedge\tilde{d}X - j_z\,c\,\tilde{d}T\wedge\tilde{d}X\wedge\tilde{d}Y$$

Ejercicio: modo TE en guía de ondas



Proponemos:

$$\tilde F = \tilde d u(t,x)\wedge \tilde d y \quad\Rightarrow\quad \tilde d \tilde F = 0$$

$$\tilde F = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{E_y} \tilde dt\wedge\tilde dy + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{-B_z}\tilde dx\wedge \tilde dy$$

Por otro lado,

$$*\tilde F = \frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{*(\tilde dt\wedge\tilde dy)}_{-\frac{1}{c} \tilde dz\wedge\tilde dx} + \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{*(\tilde dx\wedge\tilde dy)}_{c\,\tilde dt\wedge\tilde dz}$$

$$\Rightarrow \tilde d *\tilde F = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tilde dt\wedge\tilde dz\wedge\tilde dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c\,\tilde dx\wedge\tilde dt\wedge\tilde dz$$

$$\tilde d*\tilde F=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0}$$

condiciones de contorno: $E_y(x=0)=0=E_y(x=a)$

$$\Rightarrow \quad u(t,x) = A\, e^{i\omega t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \qquad \text{con} \quad \omega=\frac{m\pi}{a}c$$

Obtuvimos una onda estacionaria, que rebota entre las paredes sin propagarse en z.
Pero podemos generar una solución propagante mediante un boost de Lorentz:

$$t=\gamma\left(t'-\frac{v}{c^2}z'\right), \quad z=\gamma(z'-vt'), \quad x=x', \quad y=y' \quad\Rightarrow\quad \tilde dt=\gamma\left(\tilde dt'-\frac{v}{c^2}\tilde dz'\right)$$

$$\tilde F = E_y\, \tilde dt\wedge\tilde dy - B_z\,\tilde dx\wedge\tilde dy = \underbrace{\gamma E_y}_{E'_y}\,\tilde dt'\wedge\tilde dy' - \underbrace{\frac{\gamma v}{c^2}E_y}_{B'_x}\,\tilde dz'\wedge\tilde dy' \underbrace{- B_z}_{-B'_z}\,\tilde dx'\wedge\tilde dy'$$

Ahora hay una componente del vector de Poynting a lo largo de z:

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}\bar{E}\times\bar{B} \Rightarrow S'_z = -\frac{1}{\mu_0}E'_y B'_z = \frac{\gamma^2 V}{\mu_0 c^2}E_y^2$$

La fase de la onda es $\omega t = \omega\gamma\left(t' - \frac{V}{c^2}z'\right) \Rightarrow \omega' = \gamma\omega\ ,\ k'_z = \frac{V}{c^2}\gamma\omega$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2_z = \omega^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2}}$$ relación de dispersión

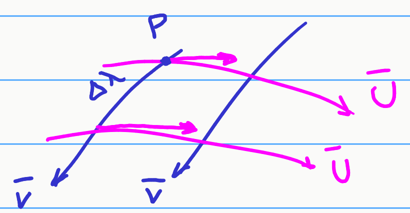
Velocidad de fase: $v'_f = \frac{\omega'}{k'_z} = \frac{c^2}{V}$

Velocidad de grupo: $v'_g = \frac{d\omega'}{dk'_z} = V$ $\qquad v'_f\, v'_g = c^2$

Derivada de Lie: hasta aquí sólo sabemos derivar p-formas. Nos gustaría definir una derivada direccional de vectores utilizando exclusivamente las estructuras ya establecidas sobre la variedad diferenciable.

Si queremos derivar un campo vectorial $\bar{U} = \frac{d}{d\mu}$ en la dirección de un vector $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ podríamos sugerir el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda) - \bar{U}(\lambda_P)}{\Delta\lambda}$$

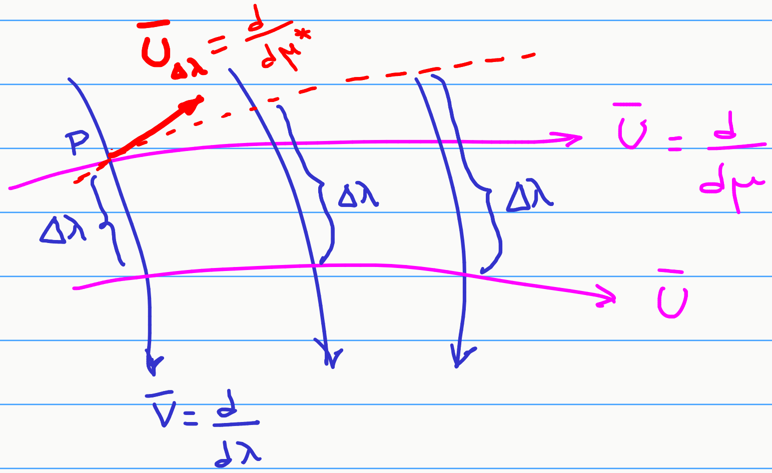


Pero ocurre que $\bar{U}(\lambda_P)$ y $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$ pertenecen a espacios tangentes diferentes: no podemos restarlos

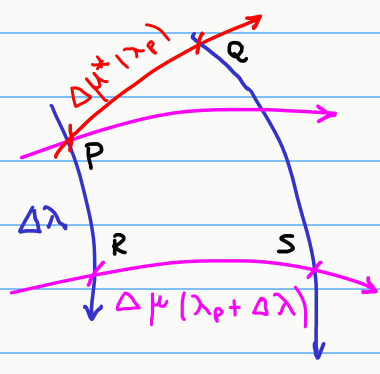
La solución sería definir en P un vector $\bar{U}_{\Delta\lambda}(\lambda_P) \in T_P$ que "represente" a $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$.

De esa manera, la diferencia $\bar{U}_{\Delta\lambda}(\lambda_P) - \bar{U}(\lambda_P)$ tendría sentido.

Vamos a mostrar un procedimiento, conocido como "dragueo" de Lie, para definir el vector $\bar{U}_{\Delta\lambda} \in T_P$ a partir de $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$.



Construiremos la línea de campo de $\bar{U}_{\Delta\lambda}$ que pasa por P arrastrando las línea de $\bar{U}$ que pasa por $\lambda_P + \Delta\lambda$. Pero no alcanza con la línea de campo sino que debemos definir su parámetro μ^*. Para esto diremos que $\Delta\mu^*(\lambda_P) = \Delta\mu(\lambda_P + \Delta\lambda)$:



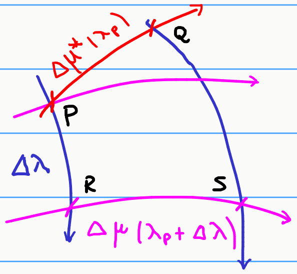
La derivada de Lie de $\bar{U}$ respecto de $\bar{V}$, $\pounds_{\bar{V}} \bar{U}$, es un vector (proviene de una diferencia de vectores en T_P); por lo tanto es una derivada sobre las funciones. Veamos cómo opera:

$$\left[\pounds_{\bar V}\bar U\right](f) = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\bar U_{\Delta\lambda}(P) - \bar U(P)}{\Delta\lambda}\right](f)$$

$$= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta\lambda}\left[\frac{df}{d\mu^*}(P) - \frac{df}{d\mu}(P)\right]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\lambda\to 0\\ \Delta\mu\to 0}}\left[\frac{f(Q)-f(P)}{\Delta\lambda\,\Delta\mu^*} - \frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(P)\right]$$

$$f(Q)-f(P) = \big(f(Q)-f(S)\big) + \big(f(S)-f(R)\big) + \big(f(R)-f(P)\big)$$



$$\frac{f(Q)-f(P)}{\Delta\lambda\,\Delta\mu^*} \longrightarrow -\frac{1}{\Delta\mu^*}\frac{df}{d\lambda}(Q) + \frac{1}{\Delta\lambda}\underbrace{\frac{\Delta\mu}{\Delta\mu^*}}_{=1\ (\Delta\mu^*(P)=\Delta\mu(R))}\frac{df}{d\mu}(R) + \frac{1}{\Delta\mu^*}\frac{df}{d\lambda}(P)$$

$$\frac{d}{d\mu^*}\xrightarrow[\Delta\lambda\to 0]{}\frac{d}{d\mu}$$

$$\frac{f(Q)-f(P)}{\Delta\lambda\,\Delta\mu^*} - \frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(P) \longrightarrow -\frac{d}{d\mu^*}\frac{df}{d\lambda}\Big|_P + \overbrace{\frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(R) - \frac{1}{\Delta\lambda}\frac{df}{d\mu}(P)}^{\left[\frac{d}{d\lambda}\frac{df}{d\mu}\right]_P}$$

$$= \left[\frac{d}{d\lambda}\frac{df}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{df}{d\lambda}\right]_P = \underbrace{[\bar V,\bar U]}_{\text{conmutador}}f\,\Big|_P$$

Podemos deshacernos de f, y decir que la derivada de Lie no es más que el conmutador entre los campos:

$$\boxed{\pounds_{\bar V}\bar U = [\bar V,\bar U]}$$

Un campo $\bar{U}$ se dice "Lie-dragueado" por otro campo $\bar{V}$ si $[\bar{V},\bar{U}]=0$. En ese caso, el dragueo de Lie de las líneas de campo conduce a las propias líneas de campo; en otras palabras, los parámetros λ, μ se comportan como coordenadas (por cierto, los vectores de una base coordenada conmutan).

- Derivada de Lie de una función: es natural definir $\boxed{\pounds_{\bar{V}} f \doteq \bar{V}(f)}$

Es decir, el dragueo de Lie de f es $f_{\Delta\lambda} = f(\lambda+\Delta\lambda)$.

- Propiedades:

i) $\pounds_{\bar{V}} \bar{U} = -\pounds_{\bar{U}} \bar{V}$

ii) Regla de Leibniz: $\pounds_{\bar{V}}(g\bar{U}) = [\pounds_{\bar{V}} g]\,\bar{U} + g\,\pounds_{\bar{V}}\bar{U}$

iii) componentes en base coordenada:

$$\pounds_{\bar{V}}\bar{U} = [\bar{V},\bar{U}] = [V^i\partial_i, U^j\partial_j] = V^i\partial_i U^j\partial_j - U^j\partial_j V^i\partial_i$$

$$= V^i(\partial_i U^j)\partial_j - U^j(\partial_j V^i)\partial_i = \left(V^j\frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Entonces $$\boxed{\left[\pounds_{\bar{V}}\bar{U}\right]^i = V^j\frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j\frac{\partial V^i}{\partial x^j}}$$

Notar que ante cambio de coordenadas quedan términos con derivadas segundas que se cancelan entre sí, lo que permite que las cantidades obtenidas se transformen como componentes de un vector.

- La derivada de Lie no es una genuina derivada direccional de $\bar{U}$ en la dirección de $\bar{V}$, en el sentido que también $\bar{V}$ resulta derivado.

iv) Si $\bar{V} = \frac{\partial}{\partial x^1}$: $\qquad \left[\pounds_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \bar{U}\right]^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^1}$

v) $\pounds_{[\bar{V},\bar{U}]} = [\pounds_{\bar{V}}, \pounds_{\bar{U}}]$

vi) Identidad de Jacobi:

$$[[\pounds_{\bar{U}}, \pounds_{\bar{V}}], \pounds_{\bar{W}}] + [[\pounds_{\bar{V}}, \pounds_{\bar{W}}], \pounds_{\bar{U}}] + [[\pounds_{\bar{W}}, \pounds_{\bar{U}}], \pounds_{\bar{V}}] = 0$$

▶ Derivada de Lie de 1-formas: podemos definir $\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega}$ proponiendo que valga una regla de Leibniz del tipo $\underbrace{\pounds_{\bar{V}} [\tilde{\omega}(\bar{U})]}_{\text{0-forma}} = \underbrace{(\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega})}_{\text{1-forma a definir}} (\bar{U}) + \tilde{\omega}(\pounds_{\bar{V}} \bar{U})$

$$\Rightarrow \boxed{(\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega})_i = V^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i}}$$

▶ Derivada de Lie de tensores: extendiendo la regla de Leibniz al producto entre vectores y 1-formas, $\pounds_{\bar{V}}(A \otimes B) = (\pounds_{\bar{V}} A) \otimes B + A \otimes (\pounds_{\bar{V}} B)$,

$$\boxed{(\pounds_{\bar{V}} T)^{ij\dots k}{}_{lm\dots n} = V^r \frac{\partial T^{ij\dots k}{}_{lm\dots n}}{\partial x^r} - T^{rj\dots k}{}_{lm\dots n} \frac{\partial V^i}{\partial x^r} - \left\{\begin{matrix}\text{todos los}\\ \text{índices}\\ \text{contravariantes}\end{matrix}\right\} + T^{ij\dots k}{}_{rm\dots n} \frac{\partial V^r}{\partial x^l} + \left\{\begin{matrix}\text{todos los}\\ \text{índices}\\ \text{covariantes}\end{matrix}\right\}}$$

▶ Propiedades: si $\tilde{\omega}$ es una p-forma,

vii) $\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega} = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{V}, \dots)] + \tilde{d}\tilde{\omega}(\bar{V}, \dots)$ $\qquad$ (ver Schutz § 4.20)

viii) $\pounds_{\bar{V}}(\tilde{d}\tilde{\omega}) = \tilde{d}[\pounds_{\bar{V}} \tilde{\omega}]$