

NOTAS PARA UN CURSO DE

RELATIVIDAD GENERAL

RAFAEL FERRARO

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Prólogo

Estas Notas reúnen el material producido por el autor para el dictado de clases a distancia durante la pandemia de los años 2020 y 2021, como parte de los cursos ofrecidos por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires para las carreras de Licenciatura y Doctorado en Ciencias Físicas. Este curso de Relatividad General tiene como bibliografía de base los textos de Bernard F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics* y *A first course in General Relativity* publicados por Cambridge University Press, a los que pueden sumarse otros textos con enfoques suficientemente diversos como para satisfacer apetencias intelectuales variadas. Por ejemplo, los textos escritos por S. Carroll, Ta-Pei Cheng, E. Poisson, o el tradicional *Gravitation* de C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler. La división en capítulos de estas Notas reproduce la estructura de las clases del mencionado curso. Los videos de las clases dictadas se encuentran en este [link](#).

Buenos Aires, Febrero de 2022.

Contenidos

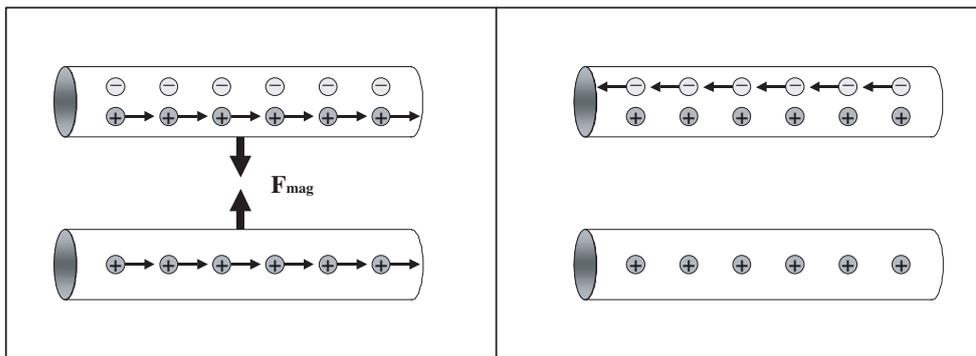
Prólogo	3
1 Relatividad Especial	7
2 Dinámica relativista	18
3 Campo gravitatorio-inercial. Principio de equivalencia	28
4 Espacio topológico. Variedad diferenciable. Espacio tangente	37
5 Bases anholónomas. 1-formas. Espacio cotangente	49
6 Tensores. p-formas. Áreas y volúmenes	61
7 Derivada exterior. Formas cerradas y exactas. Lema de Poincaré	73
8 Integración. Teorema de Stokes	85
9 Aplicaciones del cálculo exterior. Operador estrella de Hodge. Derivada de Lie	97
10 Derivada covariante. Conexión. Autoparalelas. Coordenadas normales de Riemann	109
11 Torsión. Curvatura de Riemann	120
12 Tensor métrico. Geodésicas. Conexión de Levi-Civita	131
13 Teorema de Gauss. Tensor de Riemann con conexión de Levi-Civita. Postulados de la Relatividad General. Partícula libremente gravitante. Vectores de Killing	143
14 Tensor de energía-momento. Ecuaciones de Einstein	155
15 Campo gravitatorio débil. Ondas gravitatorias planas. Detectores de ondas gravitatorias	168
16 Geometría de Schwarzschild. Estructura causal. Horizonte de eventos	182

17 Corrimiento del perihelio. Deflexión de rayos de luz. Coordenadas de Kruskal-Szekeres	194
18 Principio cosmológico. Universos de Friedmann-Robertson-Walker. Corrimiento al rojo cosmológico	207
19 Distancia luminosa. Constituyentes. Constante cosmológica. Evolución del universo. Universo de de Sitter	219
20 Fondo cósmico de microondas. Eras dominadas por la radiación y la materia. Materia y energía oscuras	231
21 Lentes gravitatorias. Diagramas de Penrose	245
22 Radiación de ondas gravitatorias	257
23 Geometría de Reissner-Nordström. Geometría de Kerr	269
24 Acción de Hilbert. Ecuaciones de estructura de Cartan	280

1 Relatividad Especial

El Principio de relatividad y las leyes de Maxwell

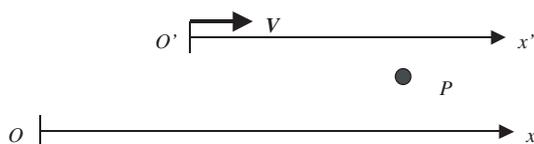
El Principio de relatividad afirma que las mismas leyes fundamentales de la Física son satisfechas en todos los sistemas inerciales. Esto significa que no hay privilegios entre distintos sistemas inerciales, lo que corresponde a la idea de que el estado de movimiento (absoluto) no es detectable; sólo es detectable el movimiento relativo. No hay manera de reconocer el estado de movimiento de un laboratorio mediante un experimento realizado en el mismo (los *cambios* del estado de movimiento serían detectables a través de los efectos inerciales que se generan). El Principio de relatividad se remonta a Galileo, y es satisfecho por las leyes fundamentales de la Mecánica. Queremos saber si las leyes de Maxwell satisfacen o no el Principio de Relatividad. ¿Podemos usar las leyes del electromagnetismo en distintos sistemas inerciales? Para analizar la cuestión consideremos el siguiente ejemplo:



La Figura de la izquierda muestra dos hilos infinitos que portan corrientes iguales; uno es neutro y el otro está cargado. Las leyes del electromagnetismo nos dicen que existe una interacción magnetostática entre ambos hilos. En la Figura de la derecha se representa la misma configuración vista en un sistema de referencia que acompaña a las cargas positivas. En este caso las leyes de Maxwell nos dicen que no existe interacción alguna pues uno de los hilos carece de corriente mientras que el otro hilo carece de carga. Los resultados obtenidos de aplicar las mismas leyes en dos sistemas de referencia distintos son claramente contradictorios (la existencia de una interacción debería ser un hecho absoluto, independiente del sistema de referencia). A primera vista esta contradicción parecería indicar que no es posible utilizar las leyes de Maxwell en dos sistemas de referencia distintos. En tal caso las leyes de Maxwell no cumplirían el Principio de relatividad, y sería menester identificar el sistema de referencia donde las leyes de Maxwell

son aplicables. Sin embargo, debe señalarse que el paso de la Figura de la izquierda a la Figura de la derecha no es completamente inocente porque entraña dos suposiciones: que las distancias no cambian y que las cargas no cambian.

La creencia en distancias *absolutas* ha sido una piedra basal en la construcción de la Mecánica de Newton, y debemos admitir que nuestra experiencia cotidiana indica que se trataría de una buena hipótesis sobre la naturaleza del espacio. Sin embargo la experiencia cotidiana es buena consejera sólo en el rango de fenómenos que ella misma abarca. Examinemos cómo entra la creencia en distancias absolutas en las transformaciones de Galileo, que son las transformaciones que usamos para certificar la validez del Principio de relatividad en la Mecánica Clásica.



En el esquema unidimensional de la Figura está claro que $d_{OP} = d_{OO'} + d_{O'P}$. Esta relación entre distancias vale si todas las distancias están medidas en un mismo sistema, ya sea S o S' . Lo que llamamos coordenada x no es más que la distancia d_{OP} medida en S , mientras que x' es la distancia $d_{O'P}$ medida en S' . Por otro lado, $d_{OO'}$ medida en S es igual a Vt . De aquí se concluye que

$$d_{O'P} \text{ medida en } S = x - Vt \tag{1.1}$$

La creencia en distancias absolutas nos mueve a reemplazar el miembro izquierdo por x' , para así obtener las transformaciones de Galileo. Es interesante notar que esta creencia implica que el tiempo debe ser igualmente absoluto. En efecto, para que no existan privilegios entre S y S' la transformación de Galileo inversa debe verse igual a la directa salvo por el cambio de V por $-V$:

$$x' = x - Vt, \quad x = x' + Vt';$$

pero esto es consistente sólo si

$$t' = t.$$

La transformación de Galileo, basada en la creencia en distancias absolutas o *invariantes* (decimos así de aquellas cantidades cuyo valor no dependen del sistema de referencia), tiene como consecuencia la adición galileana de velocidades: $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{V}$, y la invariancia galileana de las aceleraciones: $\vec{a}' = \vec{a}$.

Las leyes fundamentales de la Mecánica cumplen el Principio de relatividad ante transformaciones de Galileo. Por ejemplo, la Segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ se construye con dos miembros que son invariantes galileanos por separado. Por un lado la aceleración lo es; por el otro lado, las fuerzas fundamentales de la Mecánica Clásica dependen de las distancias entre partículas, que son supuestas invariantes. Así, el cumplimiento de la

relación $\vec{F} = m\vec{a}$ en un sistema de referencia es garantía de su cumplimiento en cualquier otro sistema de referencia galileanamente conectado con el primero.

En cambio las leyes de Maxwell no exhiben este comportamiento ante transformaciones de Galileo. Por un lado, en la fuerza de Lorentz no sólo intervienen distancias entre cargas sino también las velocidades de las cargas (que no son invariantes galileanos). Como vimos en el ejemplo, esta característica de la fuerza de Lorentz impide alcanzar resultados consistentes ante un cambio galileano de sistemas de referencia. Por otro lado, las leyes para el campo electromagnético no mantienen su forma ante transformaciones de Galileo; es decir que no satisfacen el Principio de relatividad galileano. Recordemos que las leyes de Maxwell para los campos pueden llevarse a la forma de ecuaciones de onda; en ausencia de fuentes tendremos

$$\mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0,$$

donde reconocemos la velocidad c de propagación de la onda con un valor que resulta de las constantes de la electrostática y la magnetostática:

$$c^{-2} = \mu_o\varepsilon_o.$$

Para sorpresa de Maxwell, el valor de c resultó coincidente con el ya entonces conocido valor de la velocidad de la luz en vacío. Así Maxwell concluyó que la luz es una onda electromagnética. Volviendo a nuestro problema, el hecho que las leyes de Maxwell contengan una velocidad nos dice que estas leyes cambian de forma ante transformaciones de Galileo, porque sabemos que las velocidades finitas no son invariantes galileanos sino que cambian al pasar de un sistema de referencia a otro. Las leyes de Maxwell quedarían excluidas del Principio de relatividad galileano, y habría que establecer cuál es el sistema de referencia donde la luz se propaga con velocidad $c = (\mu_o\varepsilon_o)^{-1/2}$; es decir, cuál es el sistema de referencia donde podemos utilizar las leyes de Maxwell tal como las conocemos. Esto sería una forma de resolver la paradoja de nuestro ejemplo. Maxwell pensaba que ese sistema de referencia privilegiado era, como ocurre con toda ecuación de onda, el sistema de referencia donde el medio de propagación de la onda está en reposo. Maxwell pensaba las ondas electromagnéticas como ondas de materia, perturbaciones de un medio material denominado *éter*. En tal caso el privilegio que adquiere el sistema de referencia donde el medio está en reposo no menoscaba el Principio de relatividad, pues es un privilegio adquirido por razones físicas, y cualquier otro sistema de referencia donde el éter esté en reposo será igualmente privilegiado. Así sucede con las ecuaciones de otras ondas de materia (el sonido, la perturbaciones de la superficie del agua de un estanque, etc.) cuyas velocidades de propagación relativa al medio dependen de las propiedades del medio en cuestión. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede con otros medios donde se propagan ondas, el éter se mostraba elusivo a una detección directa. El carácter intangible del éter (la luz se propaga en regiones aparentemente “vacías”, el éter no frena el movimiento de los planetas, etc.), movió a los físicos del siglo XIX a intentar detectar no ya el éter mismo, sino nuestro estado de movimiento respecto del éter. Los experimentos buscaban medir diferencias en las velocidades de propagación de

rayos de luz, que revelaran una composición galileana de velocidades entre la velocidad de la luz relativa al éter y la velocidad del laboratorio relativa al éter (Hoek, 1868; Michelson, 1881; Michelson-Morley, 1887; etc.), o alteraciones de la ley de Snell debidas al movimiento relativo al éter del material transparente donde un rayo se refracta (Arago, 1810; Airy, 1871). Los resultados de estos experimentos fueron siempre negativos: el movimiento del laboratorio relativo al éter nunca se evidenció. Se tejieron distintas hipótesis acerca de la interacción del éter con la materia para justificar estos resultados. Estas teorías dinámicas sobre la interacción entre éter y el resto de la materia alcanzaron su forma más elaborada en la Teoría de los electrones de Lorentz (1895).

La relatividad de Einstein

Mientras la comunidad científica debatía estas cuestiones, en 1905 Einstein cambió el enfoque del problema proponiendo que las leyes de Maxwell son leyes fundamentales que integran, por lo tanto, el conjunto de leyes que satisfacen el Principio de relatividad. Para Einstein el campo electromagnético tiene entidad propia, y no precisa una “materialización” mediante la idea de un éter. Si el éter no existe, entonces no hay nada que privilegie un sistema de referencia frente a otro, y las leyes de Maxwell deben ser válidas en cualquier sistema de referencia inercial. Esto significa que la luz se propaga con la *misma* velocidad c en cualquier sistema de referencia inercial. No existen entonces las diferencias de velocidad buscadas por los experimentadores, y la ley de Snell se cumple en cualquier laboratorio donde el material refractante esté en reposo relativo. Claro que admitir una *velocidad finita invariante* rompe con el teorema de adición de velocidades de Galileo, y supone entonces el abandono de nuestra creencia en distancias y tiempos absolutos. Einstein propuso elevar las leyes de Maxwell al rango de leyes fundamentales, abandonando nuestras nociones intuitivas de espacio y tiempo para subordinarlas a la invariancia de la velocidad de la luz.

Procederemos ahora a replantear la transformación de coordenadas cuidando de no introducir en ellas prejuicio alguno sobre la naturaleza del espacio y el tiempo. En la Figura se muestra una barra recorrida por una partícula; el movimiento relativo barra-partícula está caracterizado por la velocidad relativa V :



En la Figura de la izquierda se describe el movimiento relativo en el sistema fijo a la barra, mientras que la Figura de la derecha lo describe en el sistema fijo a la partícula. Como no estamos dispuestos a prejuzgar sobre la naturaleza del espacio y el tiempo, hemos dibujado la barra con distintas longitudes en cada sistema. Llamamos *longitud propia* L_0 a la longitud de la barra en el sistema donde se encuentra en reposo. El tiempo

que demora el recorrido de la partícula a lo largo de la barra también puede depender del sistema de referencia. Llamaremos *tiempo propio* $\Delta\tau$ al tiempo transcurrido entre dos *eventos* medido en el sistema de referencia donde los eventos ocurren en la misma posición (siempre que tal sistema exista). En el caso bajo estudio, los dos eventos son el paso de la partícula por un extremo de la barra y el paso de la partícula por el otro extremo de la barra. Estos dos eventos ocurren en la misma posición en el sistema fijo a la partícula; de modo que el tiempo transcurrido entre los eventos es un tiempo propio en el sistema de la Figura de la derecha. La mera definición de velocidad nos permite escribir:

$$L_o = V \Delta t , \quad L = V \Delta\tau ,$$

donde Δt es el tiempo del recorrido de la partícula a lo largo de la barra en el sistema de la Figura de la derecha. De aquí resulta

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{L_o}{L} \quad (1.2)$$

Esta relación nos dice que si estamos dispuestos a renunciar a distancias absolutas ($L_o \neq L$) también habremos de renunciar a tiempos absolutos ($\Delta\tau \neq \Delta t$). Además nos dice que la relación entre la longitud en movimiento y la longitud propia de un mismo cuerpo tiene el mismo carácter que la relación entre tiempo propio y el tiempo entre el mismo par de eventos en otro sistema de referencia. Concretamente, ambas relaciones no pueden depender más que de la velocidad relativa V entre el sistema propio correspondiente y el otro sistema de referencia arbitrario. La ecuación (1.2) dice entonces que la misma función $\gamma(V)$ que expresa la relación entre longitudes ha de expresar también la relación entre tiempos:

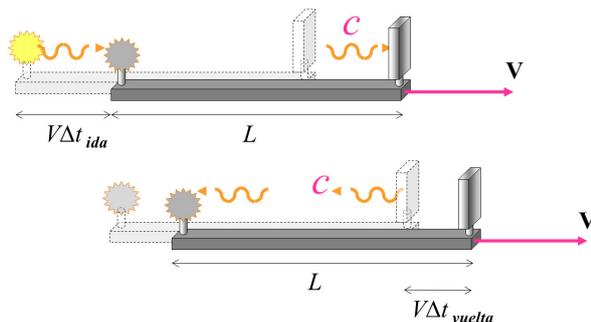
$$\frac{L_o}{L} = \gamma(V) , \quad \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \gamma(V) . \quad (1.3)$$

En realidad las relaciones (1.3) suponen que el espacio y el tiempo son isótropos y homogéneos; de otra forma las relaciones podrían depender del lugar o el instante de ocurrencia de los eventos o de la orientación de la barra. Vamos a admitir, como en la Física clásica, que el espacio está dotado de una geometría euclidiana –por lo tanto es isótropo y homogéneo–, y que las relaciones (1.3) no dependen del tiempo (homogeneidad del tiempo).

La forma de la función $\gamma(V)$ será dictada por la invariancia de la velocidad de la luz a la cual se subordinarán las nociones de espacio y tiempo. Para hallar $\gamma(V)$ reemplacemos la partícula del experimento anterior por un rayo de luz, coloquemos un espejo en un extremo de la barra, y consideremos como par de eventos el paso del rayo de luz por el extremo libre de la barra, y su regreso al mismo luego de reflejarse en el espejo. En este caso el tiempo propio entre los eventos corresponde al sistema fijo a la barra pues ambos eventos ocurren en el mismo extremo de la barra. Como la luz viaja con velocidad c (en cualquier sistema!) diremos que

$$c \Delta\tau = 2 L_o , \quad (1.4)$$

En el otro sistema calculamos el tiempo Δt entre los eventos con la misma velocidad c para el rayo de luz; teniendo en cuenta el desplazamiento de la barra de longitud L resulta



$$c \Delta t_{ida} = L + V \Delta t_{ida} , \quad c \Delta t_{vuelta} = L - V \Delta t_{vuelta} ,$$

entonces

$$\Delta t = \Delta t_{ida} + \Delta t_{vuelta} = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} . \quad (1.5)$$

Dividiendo (1.4) y (1.5), y usando las relaciones (1.3) se obtiene

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \quad (1.6)$$

Luego, reemplazando en (1.2)

$$\text{contracción de longitudes} \quad L = L_o \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (1.7)$$

$$\text{dilatación del tiempo} \quad \Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.8)$$

Estas son las relaciones entre longitudes y tiempos que resultan de admitir la existencia de una velocidad finita c invariante (igual en todos los sistemas de referencia); son las dos caras de una misma moneda, como se destaca en la ecuación (1.2). En las transformaciones de Galileo, en cambio, la única velocidad “invariante” es la velocidad infinita. Consistentemente podemos reencontrar las nociones clásicas de espacio y tiempo tomando el límite $c \rightarrow \infty$ en (1.7) y (1.8). También podemos ver en (1.7) y (1.8) la razón por la cual nuestra experiencia cotidiana no es capaz de revelarnos la relatividad de distancias y tiempos: la velocidad invariante c (la velocidad de la luz) es mucho mayor que las velocidades V involucradas en el rango de fenómenos cotidianos, de modo que el factor $\gamma(V)$ es prácticamente igual a 1 en ese rango. Este comportamiento de distancias y tiempos permite que las densidades de carga y corriente se transformen de manera apropiada para que las leyes de Maxwell sean válidas en todo sistema de referencia inercial. Aunque el efecto sea débil para $V \ll c$, es suficiente para que el hilo superior derecho de nuestro ejemplo adquiriera la densidad de carga negativa necesaria para que la interacción magnetostática de la izquierda se vea como una interacción electrostática en el sistema de la derecha de la Figura.

Transformaciones de Lorentz

Ahora podemos regresar a la ecuación (1.1) para darle a “ $d_{O'P}$ medida en S ” el tratamiento que corresponde a esta nueva forma de ver el espacio y el tiempo. Como dijimos, la coordenada x' es $d_{O'P}$ medida en S' , y puede pensarse como la longitud L_o de una regla en reposo en el sistema S' . Entonces $d_{O'P}$ medida en S es la longitud contraída de esa regla: $d_{O'P}$ medida en $S = \gamma(V)^{-1} d_{O'P}$ medida en $S' = \gamma(V)^{-1} x'$, y la ecuación (1.1) resulta:

$$x' = \gamma(V) (x - Vt) \quad (1.9)$$

Para que los sistemas S y S' estén en pie de igualdad, la transformación inversa de (1.9) debe tener su misma forma salvo por el cambio de V por $-V$,

$$x = \gamma(V) (x' + Vt') \quad (1.10)$$

De las ecuaciones (1.9) y (1.10) se pueden despejar t' y t :

$$t' = \gamma(V) (t - Vc^{-2} x) \quad (1.11)$$

$$t = \gamma(V) (t' + Vc^{-2} x') \quad (1.12)$$

Mediante un experimento pensado similar al que permitió obtener $\gamma(V)$ se obtiene que las longitudes transversales a la dirección del movimiento no cambian:

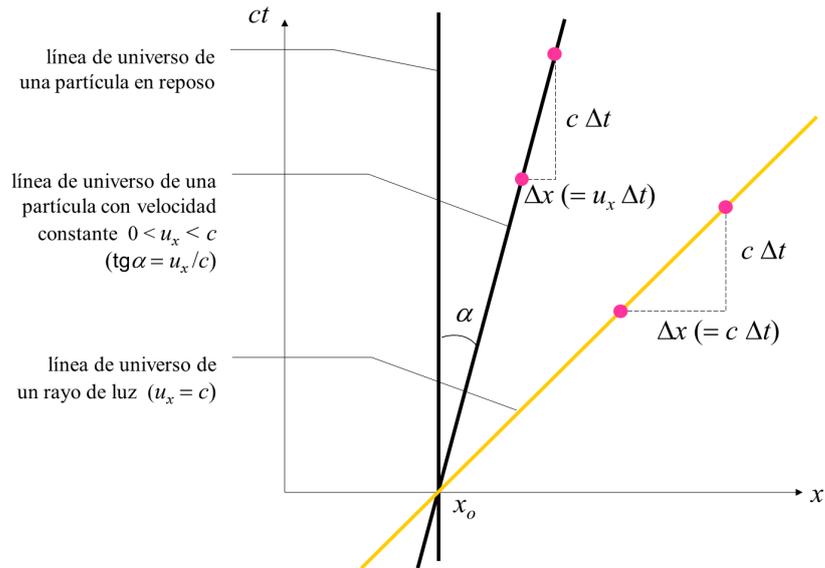
$$y' = y \quad (1.13)$$

$$z' = z \quad (1.14)$$

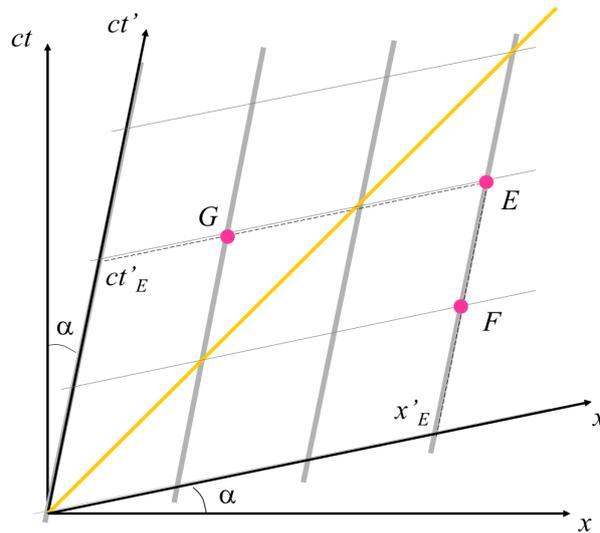
(Ayuda: coloque la barra con el espejo perpendicular a la dirección del eje x , y use el teorema de Pitágoras).

Las transformaciones (1.9-1.14) son las transformaciones de coordenadas que dejan invariante la ecuación de onda con velocidad de propagación c . Se llaman *transformaciones de Lorentz* (Voigt, 1887; Larmor, 1900; Lorentz, 1899, 1904); para $c \rightarrow \infty$ devienen en las transformaciones de Galileo. Transforman las coordenadas de un evento (un “aquí y ahora”, un punto en el espacio-tiempo). Aunque fueron obtenidas antes del trabajo de Einstein, su interpretación era completamente diferente. Mientras que para Einstein la contracción de longitudes y la dilatación del tiempo son efectos puramente cinemáticos que no privilegian sistema de referencia alguno (la barra tendrá longitud L_o en *cualquier* sistema de referencia donde se encuentre fija, y tendrá longitud L en *cualquier* sistema de referencia donde se mueva longitudinalmente con velocidad V), para Lorentz la velocidad V era la velocidad de la barra respecto del éter, y la contracción era un hecho absoluto (verificado en todo sistema de referencia) producido por una interacción con el éter. Según Lorentz la “dilatación del tiempo” no afectaba al tiempo absoluto sino que involucraba a un “tiempo matemáticamente auxiliar”.

En Relatividad se utilizan gráficos ct vs. x . En tales gráficos un evento es un punto, y un rayo de luz es una recta a 45° . Los movimientos de las partículas se denominan *líneas de universo*. La Figura siguiente muestra un par de líneas de universo de partículas en movimiento uniforme, un rayo de luz y algunos eventos indicados en rojo.



Es común insertar las líneas coordenadas del sistema S' en el gráfico espacio-temporal del sistema S . Para ello usamos las transformaciones (1.9) y (1.11) para determinar el lugar geométrico de los eventos que tienen $t' = \text{constante}$ y $x' = \text{constante}$; resultan ser rectas de pendiente V/c y $(V/c)^{-1}$ respectivamente. En particular $t' = 0$ caracteriza a los eventos que forman el eje x' , mientras que $x' = 0$ caracteriza a los eventos que forman el eje t' :



Relatividad de la simultaneidad

Para extraer resultados cuantitativos de estos gráficos mixtos es necesario *calibrar* previamente los ejes de ambos sistemas de referencia. A diferencia de las rotaciones, las transformaciones de Lorentz no dejan invariantes circunferencias sino hipérbolas (como veremos enseguida); de manera que las unidades de medida en los ejes de S' difieren de las de los ejes de S . En cambio no hay dificultad en extraer resultados cualitativos, y el más evidente de todos es que los eventos que son simultáneos en S no lo son en S' y viceversa. La simultaneidad de eventos es una noción relativa (mientras que en Física Clásica es absoluta). En efecto, en el sistema S son simultáneos todos los eventos que tengan la misma coordenada t , es decir todos los puntos que estén sobre una misma recta paralela al eje x de la Figura anterior. Por otro lado, en S' son simultáneos todos los eventos que tengan la misma coordenada t' , es decir que se trata de puntos dispuestos sobre rectas paralelas al eje x' de la Figura anterior. Evidentemente las nociones de simultaneidad de cada sistema difieren entre sí ($\Delta t = 0$ no implica $\Delta t' = 0$ en las transformaciones de Lorentz). La relatividad de la simultaneidad es el ingrediente necesario para justificar que dos sistemas de referencia no acuerden en las dimensiones de un objeto. La medición de una barra en el sistema S supone la determinación de las posiciones simultáneas de sus extremos. Esta medición no es “buena” para el sistema S' porque éste no comparte la noción de simultaneidad de aquél.

Intervalo

Distancias y tiempos no son invariantes por separado ante transformaciones de Lorentz, pero sí lo es una combinación de ellos llamada *intervalo*. El intervalo Δs^2 es una forma cuadrática hiperbólica de las diferencias de las coordenadas de un par de eventos:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - |\Delta \vec{r}|^2 \quad (1.15)$$

donde $|\Delta \vec{r}|$ y Δt son la distancia y el tiempo transcurrido entre los eventos ($|\Delta \vec{r}|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$). Para probar la invariancia de Δs^2 usamos que Δy , Δz son de por sí invariantes ante transformaciones de Lorentz a lo largo del eje x ; por lo tanto sólo resta mostrar la invariancia de $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$, que escribiremos como $(c\Delta t - \Delta x)(c\Delta t + \Delta x) = \Delta(ct - x) \Delta(ct + x)$. Como

$$ct' \pm x' = \gamma(V) \left[ct - \frac{V}{c}x \pm (x - Vt) \right] = \gamma(V) \left(1 \mp \frac{V}{c} \right) (ct \pm x) = \sqrt{\frac{1 \mp \frac{V}{c}}{1 \pm \frac{V}{c}}} (ct \pm x),$$

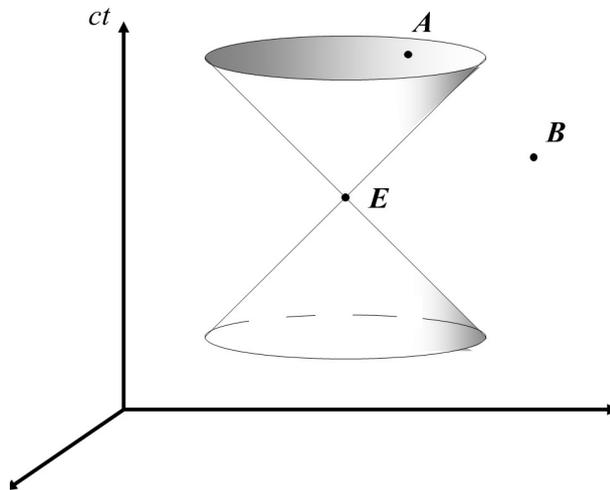
entonces $\Delta(ct' - x') \Delta(ct' + x') = \Delta(ct - x) \Delta(ct + x)$, pues los factores $\sqrt{1 \pm Vc^{-1}}$ se cancelan en este producto, lo que prueba la invariancia del intervalo.¹

1. Notar que la linealidad de las transformaciones de Lorentz conduce a que las diferencias de coordenadas se transformen como las coordenadas mismas.

El intervalo tendría el aspecto de una distancia euclidiana en un *espacio-tiempo* de cuatro dimensiones, si no fuera porque las coordenadas espaciales entran con signo opuesto al de la coordenada temporal. Se dice entonces que el espacio-tiempo tiene una geometría *pseudo-euclidiana* (espacio-tiempo de Minkowski).

Cono de luz. Tipos de separación entre eventos

La invariancia del intervalo permite clasificar pares de eventos en forma independiente de los sistemas de referencia. Diremos que un par de eventos tiene separación temporal, espacial o nula según si el intervalo entre ellos es positivo, negativo o cero.² Los eventos con separación nula están sobre rayos de luz ($\Delta s^2 = 0 \iff |\Delta \vec{r}| = c \Delta t$). Esta clasificación absoluta (independiente del sistema de referencia) introduce en el espacio-tiempo la noción de *cono de luz* de un evento. El cono de luz de un evento E está formado por todos los eventos que tienen separación nula con E . Esto significa que el cono de luz de E está generado por todos los rayos de luz que pasan por E .



Los eventos interiores al cono de E están separados temporalmente de E . Los eventos exteriores al cono de luz de E están separados espacialmente de E . A partir de la Figura anterior no es difícil ver que si dos eventos E y A están separados temporalmente siempre es posible construir un sistema de referencia donde los dos eventos ocurren en la misma posición (de manera que para ellos existe un tiempo propio). En cambio si dos eventos E y B están separados espacialmente siempre existe un sistema de referencia donde los dos eventos son simultáneos; en el resto de los sistemas de referencia o bien ocurre E antes que B , o bien ocurre B antes que E . Por lo tanto no puede hablarse de una relación causa-efecto entre eventos separados espacialmente. En cambio el orden

2. Algunos autores definen el intervalo con la *signatura* opuesta. En ese caso la separación temporal corresponderá a intervalo negativo, etc. Lo importante de esta clasificación es identificar cuál de los dos términos, el temporal o el espacial, es el que domina en el intervalo entre el par de eventos.

temporal de dos eventos separados temporalmente es el mismo en todos los sistemas de referencia.³

En la Figura previa a la que antecede es claro que E ocurre en la misma posición que F en el sistema S' , pero no ocurre así en el sistema S . Del mismo modo, E es simultáneo con G en S' , pero no lo es en S .

Composición relativista de movimientos

La transformación de Lorentz de la velocidad de una partícula $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ se obtiene diferenciando las transformaciones (1.9-1.14) y tomando los cocientes. De esa forma, las componentes de $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$ resultan

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} u_y}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} u_z}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}.$$

La composición relativista de velocidades explica el resultado del experimento realizado por Fizeau en 1851 para medir la velocidad de la luz en una corriente de agua. La composición de las velocidades de la luz y del agua arrojó un resultado difícil de explicar en un contexto histórico pre-relativista. En aquel momento, el resultado se entendió como una consecuencia del *arrastramiento parcial* del éter propuesto por Fresnel en 1818, quien había tenido que imaginar una singular interacción entre el éter y las sustancias transparentes en movimiento para explicar el resultado del experimento de Arago (1810) que involucraba la refracción de la luz en un prisma móvil.

Mediante un procedimiento similar se obtiene la transformación de Lorentz de las aceleraciones.

Bibliografía adicional

R. Ferraro, *El espacio-tiempo de Einstein*, Ediciones Cooperativas (Buenos Aires).

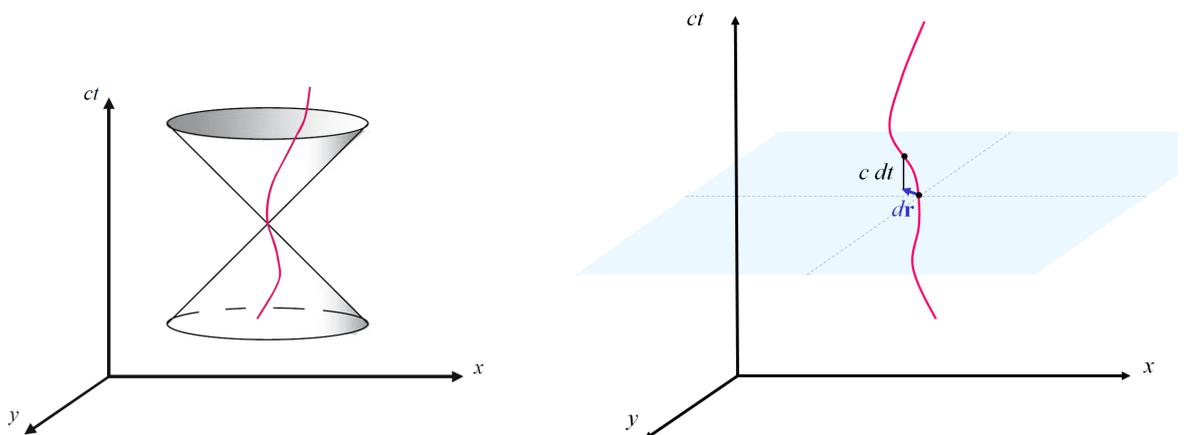
3. La construcción del sistema de referencia donde eventos separados temporalmente ocurran en un mismo lugar ($\Delta\vec{r} = 0$), o donde eventos separados espacialmente ocurran simultáneamente ($\Delta t = 0$), requerirá de un *boost* de Lorentz como el las ecuaciones (1.9-1.14), pero realizado a lo largo de la dirección espacial que une los eventos en cuestión.

2 Dinámica relativista

Tiempo propio sobre líneas de universo de partícula

Los eventos pertenecientes a la línea de universo de una partícula están causalmente conectados. Por lo tanto el cono de luz de cualquiera de ellos debe contener la línea de universo completa. Para que esto suceda, la velocidad \vec{u} de la partícula debería ser siempre menor que la velocidad de la luz: $|\vec{u}| < c$. El intervalo entre un par de eventos vecinos de la línea de universo, con coordenadas (ct, \vec{r}) y $(ct + c dt, \vec{r} + d\vec{r})$, es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{|d\vec{r}|^2}{c^2 dt^2} \right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) > 0$$



Como el intervalo es invariante, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia:

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} c dt = \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} c dt' .$$

En particular, en el sistema de referencia donde la velocidad de la partícula se anule en el instante considerado (**sistema propio** de la partícula), el radicando se hace igual a 1, y el tiempo es el tiempo propio $\Delta\tau$ entre los eventos (en el sistema propio de la partícula los eventos ocurren en el mismo lugar); entonces la ecuación anterior puede escribirse así

$$d\tau = \gamma(u)^{-1} dt = \gamma(u')^{-1} dt' . \quad (2.1)$$

Por cierto esto no es más que la dilatación del tiempo, o la relación $\Delta\tau = c^{-1}\Delta s$ para eventos con separación temporal.

El **tiempo propio a lo largo de la línea de universo** de la partícula se obtiene integrando la expresión anterior,

$$\Delta\tau = \int \gamma(u(t))^{-1} dt = \int \sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}} dt \quad (2.2)$$

$\Delta\tau$ es el tiempo que mide un **reloj** que viaja junto con la partícula. Los relojes que están en reposo indican el tiempo coordenado Δt del sistema de referencia.

Distintas líneas de universo que unan un mismo par de eventos temporalmente separados tendrán distintos valores de tiempo propio ($d\tau$ no es un diferencial exacto). En efecto, cada línea de universo corresponderá a una velocidad $u(t)$ distinta. El tiempo propio sobre la línea de universo de una partícula es una propiedad que proviene de la métrica del espacio-tiempo de Minkowski.

Dinámica relativista

Mientras que el Principio de inercia permanece válido en Relatividad Especial, la segunda ley de Newton, y la forma de las fuerzas fundamentales, deben reformularse para satisfacer el Principio de relatividad ante transformaciones de Lorentz. La tercera ley de Newton, que lleva a compensaciones simultáneas a distancia de las variaciones de cantidad de movimiento, tampoco es satisfactoria en el contexto relativista debido a que la simultaneidad no es absoluta.

Para construir la Mecánica relativista partiremos de un principio variacional cuya acción sea un invariante lorentziano. De esa forma, si la acción es estacionaria en un sistema inercial, lo será también en cualquier otro sistema inercial. Así las ecuaciones de Euler-Lagrange cumplirán con el Principio de relatividad ante transformaciones de Lorentz. Por otro lado, la acción relativista debe ser capaz de reproducir la dinámica newtoniana cuando las velocidades sean mucho menores que la velocidad de la luz. Su Lagrangiano debe ser equivalente al Lagrangiano clásico en el límite $|\vec{u}| \ll c$.

Acción de la partícula libre

El (invariante) tiempo propio a lo largo de la línea de universo de la partícula (2.2) es la elección adecuada para la funcional acción de la partícula libre,

$$S[\vec{r}(t)] = -m c^2 \int d\tau = -m c^2 \int \gamma(u)^{-1} dt = -m c^2 \int \sqrt{1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2}} dt. \quad (2.3)$$

El coeficiente $-m c^2$ permite obtener el límite clásico correcto

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = -m c^2 + \frac{1}{2} m u^2 + \mathcal{O}(u^4/c^4)$$

Cantidad de movimiento y energía

El momento canónicamente conjugado $\partial L / \partial \vec{u}$ que resulta del Lagrangiano de partícula libre (2.3) es la **cantidad de movimiento** de la partícula

$$\vec{p} \equiv m \gamma(u) \vec{u} = m \gamma(u) \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (2.4)$$

(en el último paso usamos la ecuación (2.1)). La cantidad de movimiento tiende a $m\vec{u}$ cuando $|\vec{u}| \ll c$. El Hamiltoniano asociado al Lagrangiano de partícula libre,

$$H = \vec{u} \cdot \vec{p} - L = m \gamma(u) u^2 + m c^2 \gamma(u)^{-1} = m c^2 \gamma(u) \left(\frac{u^2}{c^2} + \gamma(u)^{-2} \right) = m c^2 \gamma(u).$$

es la **energía** de la partícula

$$E \equiv m \gamma(u) c^2. \quad (2.5)$$

La energía E es una combinación de **energía en reposo** $m c^2$ y energía cinética:

$$E = m c^2 + \frac{1}{2} m u^2 + \dots \equiv m c^2 + T, \quad (2.6)$$

donde T es la energía cinética de la partícula, que a bajas velocidades coincide con la energía cinética clásica. Combinando (2.4) y (2.5) obtenemos

$$\vec{p} = c^{-2} E \vec{u}, \quad (2.7)$$

que es un resultado típicamente relativista: la cantidad de movimiento es un flujo de energía (como sucede en teoría electromagnética).

La ecuación (2.1) puede usarse para reemplazar $\gamma(u)$ en la energía (2.5),

$$\frac{E}{c} = m c \frac{dt}{d\tau} = m \frac{dx^0}{d\tau}. \quad (2.8)$$

Así vemos que la energía de la partícula es proporcional a la relación entre el tiempo dt de los relojes del sistema de referencia y el tiempo propio de la partícula $d\tau$.

Cuadrivectores. Transformaciones de E y \vec{p}

Como $d\tau$ es invariante, las ecuaciones (2.4) y (2.8) implican que el comportamiento de $(E/c, \vec{p})$ ante transformaciones de Lorentz será el mismo que el de $(c dt, d\vec{r})$. Siempre que cuatro cantidades se transformen como $dx^i = (c dt, d\vec{r})$ diremos que son las componentes de un cuadrivector. Así la cuadrivelocidad es

$$U^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma(u) (c, \vec{u}) ,$$

cuya norma invariante es

$$\|U\|^2 = g_{ij}U^iU^j = (U^0)^2 - |\vec{U}|^2 = \gamma(u)^2(c^2 - |\vec{u}|^2) = c^2\gamma(u)^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = c^2 ,$$

y el cuadrivector energía-cantidad de movimiento p^i es

$$p^i \equiv m U^i = m \frac{dx^i}{d\tau} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Entonces la transformación del cuadrivector p^i conduce a

$$E' = \gamma(V) (E - V_x p_x) = \gamma(V) (E - \vec{V} \cdot \vec{p}) , \quad (2.9a)$$

$$p'_x = \gamma(V) (p_x - V_x c^{-2} E) , \quad (2.9b)$$

$$p'_y = p_y , \quad (2.9c)$$

$$p'_z = p_z . \quad (2.9d)$$

El invariante energía-cantidad de movimiento es

$$c^{-2}E^2 - |\vec{p}|^2 = \|p\|^2 = m^2 \|U\|^2 = m^2 c^2. \quad (2.10)$$

Diferenciando esta ecuación se obtiene

$$c^{-2} E dE = \vec{p} \cdot d\vec{p} ,$$

y como $\vec{p}/E = \vec{u}/c^2$ (ver (2.7))

$$dE = \vec{u} \cdot d\vec{p} = d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} , \quad (2.11)$$

lo que sugiere que la fuerza en Relatividad Especial está asociada a $d\vec{p}/dt$. En tal caso, el resultado anterior sería un teorema trabajo-energía. Nótese que $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ implica que la fuerza no es paralela a la aceleración en general, pues la derivada de $\gamma(u)$ dará un término paralelo a \vec{u} . En el límite de trabajo infinito la energía E diverge, y la velocidad de la partícula en (2.5) tiende a c . Así la velocidad de la luz es un límite inalcanzable para la partícula.

Fotones

En las primeras décadas del siglo XX se comprendió que el comportamiento de la luz cuando interactúa con la materia no puede ser descrito por la teoría de Fresnel, que sin embargo describe todos los fenómenos físicos asociados a la propagación de las ondas luminosas. En la interacción con la materia, la luz se manifiesta a través de *cuantos* llamados **fotones** que intercambian energía y cantidad de movimiento. La energía y cantidad de movimiento de los fotones están, sin embargo, asociadas a propiedades ondulatorias (Einstein, 1905; Compton, 1923),

$$E_{foton} = h\nu, \quad \vec{p}_{foton} = \frac{h\nu}{c} \hat{n}, \quad (2.12)$$

donde ν es la frecuencia de la luz y \hat{n} es su dirección de propagación ($h = 6,626 \times 10^{-34}$ Js es la constante de Planck). Si reemplazamos estos valores en (2.7) obtenemos $\vec{u} = c \hat{n}$. Por otro lado, el invariante $E^2 - c^2|\vec{p}|^2$ se anula, lo que dice que la masa del fotón es nula.

Reemplazando en las transformaciones (2.9a) y (2.9b) se obtiene

$$\nu' = \gamma(1 - \hat{n} \cdot \vec{V} c^{-1}) \nu, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \quad (2.13)$$

donde $\cos \theta = n_x$. Notablemente estas son las expresiones para el **efecto Doppler** y la **aberración de la luz**¹ que se obtendrían razonando a partir de la teoría ondulatoria. De aquí puede obtenerse la invariancia lorentziana de la fase de la onda $2\pi c^{-1} \nu(ct - \hat{n} \cdot \vec{r})$.

Equivalencia masa-energía

En Relatividad la conservación de la energía y la cantidad de movimiento no pueden ser dissociadas: ambas forman parte de un mismo cuadrivector p^i . Mientras la conservación de la cantidad de movimiento es una consecuencia de la simetría del Lagrangiano ante traslaciones espaciales, la conservación de la energía proviene de la simetría del Lagrangiano ante traslaciones temporales. Pero las transformaciones de Lorentz mezclan el espacio y el tiempo. En consecuencia, la conservación de la cantidad de movimiento en

1. Si $V \ll c$ entonces el ángulo de aberración $\alpha \equiv \theta' - \theta$ es pequeño, y vale que $\cos \theta' = \cos(\theta + \alpha) \approx \cos \theta - \alpha \sin \theta$. Aproximando a primer orden en V/c resulta $\alpha \approx (V/c) \sin \theta$.

todo sistema de referencia inercial requiere que la energía se conserve también en todo sistema de referencia inercial (y viceversa), lo que es evidente en las transformaciones (2.9) que mezclan energía y cantidad de movimiento al cambiar de sistema de referencia. Esto no sucede en Mecánica Clásica, donde la transformación de la cantidad de movimiento $\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{V}$ no contiene la energía sino la masa; así en la transformación de la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas, $\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{V}$, la conservación de \vec{P} implica la conservación de \vec{P}' porque la masa total M también se conserva (principio clásico de conservación de la masa). Pero en Relatividad la transformación de la cantidad de movimiento

$$p'_x = \gamma(V) (p_x - V_x c^{-2} E) = \gamma(V) (p_x - mV_x - V_x c^{-2} T)$$

tiene a la energía en lugar de la masa. El término $m\vec{V}$ de la transformación galileana no es más que el primer término del desarrollo de la energía (energía en reposo) en la transformación lorentziana. Es la energía lo que debe conservarse para que la conservación de la cantidad de movimiento se verifique en distintos sistemas inerciales (y viceversa). En suma, en un sistema aislado debe conservarse el cuadrivector energía-cantidad de movimiento total del sistema.

Equivalencia masa-energía

Ahora que vimos que la conservación de la masa no se sostiene en Relatividad, sino que es reemplazada por la conservación de la energía, queda abierta la posibilidad de que la masa, como una forma más de energía, pueda convertirse en otra forma de energía y viceversa. Lo veremos en un par de ejemplos.

Colisión plástica de dos partículas de igual masa

En el sistema **centro de momento**, donde se anula la cantidad de movimiento total, las partículas tienen velocidades iguales y opuestas u antes de la colisión. Cuando colisionan forman una única partícula que permanece en reposo para conservar la cantidad de movimiento total. Si no hay ningún tipo de energía emitida, entonces toda la energía queda depositada en la energía en reposo de la partícula final; la conservación de la energía dice que

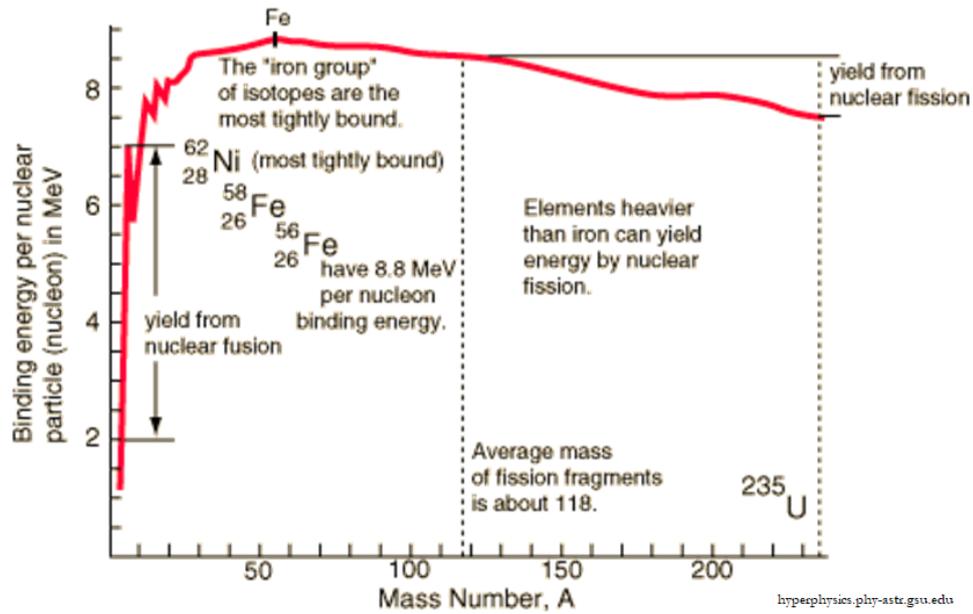
$$2 m \gamma(u) c^2 = M c^2 ,$$

es decir que la partícula resultante tiene una masa M mayor que $2m$ ($\gamma(u) > 1$). Esto es así porque la partícula resultante no sólo contiene las masas de las partículas que chocaron sino también contiene sus energías cinéticas.

Defecto de masa

La masa (energía en reposo) de un sistema compuesto incluye las masas de los constituyentes y la energía de ligadura medida en el sistema centro de momento. Por ejemplo, un deuterón D está constituido por un protón y un neutrón. La masa del deuterón es inferior a la suma de las masas de un protón y un neutrón libres, lo que significa

que la energía de ligadura de los constituyentes es negativa. El **defecto de masa** es $(m_D - m_p - m_n)c^2 = -2,22\text{MeV}$. En general, cuando núclidos livianos se fusionan se libera cierta cantidad de energía para conservar la energía total (**fusión nuclear**). En el caso de núclidos pesados sucede lo contrario porque más allá del Fe la energía (negativa) de ligadura por nucleón comienza a disminuir con el aumento del número másico; en ese caso se obtendrá energía dividiendo núclidos (**fisión nuclear**).



Creación (y aniquilación) de partículas

La energía cinética puede ser usada para crear partículas. Por ejemplo un pión neutro π^0 puede ser creado en una colisión entre protones si la energía es suficientemente alta. La reacción debe superar una **energía umbral** para dar cuenta de la partícula creada. En el sistema centro de momento la energía umbral de la reacción

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$$

es la necesaria para crear el pión y que los productos queden en reposo en el estado final:²

$$E_{umbral} = 2m_p c^2 + m_{\pi^0} c^2 = 1876,54\text{MeV} + 134,98\text{MeV}$$

Para alcanzar esta energía los dos protones deberían colisionar a la velocidad de $u_p = 0,36 c$ en el sistema centro de momento.

2. En los estados inicial y final las partículas cargadas deben estar muy separadas para que se pueda ignorar la energía de la interacción coulombiana.

Colisión elástica

El ejemplo anterior es un caso de colisión inelástica. Una colisión se dice **elástica** si las partículas antes y después de la colisión son las mismas. En ese caso la energía en reposo es la misma antes y después, y la conservación de la energía corresponderá a la conservación de la energía cinética relativista total.

Emisión o absorción de energía electromagnética

La interacción entre partículas cargadas puede involucrar radiación electromagnética. En ese caso la radiación entra en el balance de energía-cantidad de movimiento a través de fotones. Por ejemplo, un par electrón-positrón se aniquila para dar lugar a dos fotones (se necesitan al menos dos para conservar la cantidad de movimiento). En el sistema centro de momento donde el electrón y el positrón tienen velocidades u_e iguales y opuestas el balance de energía es

$$2 m_e \gamma(u_e) c^2 = 2 h \nu.$$

A la inversa, dos fotones pueden crear un par electrón-positrón si cuentan con la energía (frecuencia) umbral necesaria, que resulta ser un valor en el rango de los rayos γ .

En el **efecto Compton** un fotón interactúa con un electrón libre, cediéndole parte de su energía; así emerge de la colisión con una frecuencia menor que la inicial. El fenómeno es significativo sólo si la longitud de onda del fotón es del orden o menor que la *longitud de onda Compton* $\lambda_C \equiv h/(m_e c) = 0,00243\text{nm}$.

Interacciones “a distancia”

Como mencionamos, la relatividad de la simultaneidad impide la existencia de interacciones a distancias en Relatividad. En los problemas de colisiones de partículas libres, la interacción es **local**, ya que sucede sólo en el instante y lugar donde las partículas chocan. De modo que el balance de energía-cantidad de movimiento se realiza con los valores antes y después del choque. Aun si hay interacciones electromagnéticas podemos considerar los estados inicial y final cuando las cargas están muy separadas y sin interacción, haciendo intervenir los fotones para completar el balance. Pero esto no explica cómo formular teorías de interacciones “a distancia” en Relatividad. Para ver eso, consideremos la interacción paradigmática de la Relatividad, que es la interacción electromagnética. Salvo en el caso estático, la interacción electromagnética no está descrita por un potencial que depende de las distancias entre partículas como sucede en Mecánica Clásica. En su lugar, la interacción a distancia está reemplazada por la interacción local entre las cargas y el campo. El campo posee energía y cantidad de movimiento. Por lo tanto los balances de la conservación de la energía-cantidad de movimiento son locales; la conservación se satisface en cada evento del espacio-tiempo, y no hay conflicto con la relatividad de la simultaneidad. El sistema aislado que conserva la energía-cantidad de

movimiento está formado por las cargas y el campo. El campo tiene su propia acción de campo libre, de donde resultan los valores de energía y cantidad de movimiento con los que el campo entra en los balances de los teoremas de conservación.

Interacción carga-campo

Si la partícula no es libre entonces la acción debe completarse con un término de interacción S_{int} invariante lorentziano. En el caso de una carga e interactuando con un campo electromagnético externo es

$$S_{int} = -e \int (\phi - \vec{u} \cdot \vec{A}) dt = -e \int g_{ij} U^i A^j d\tau$$

donde A^j es el cuadripotencial asociado al campo externo,

$$A^j = (c^{-1}\phi, \vec{A})$$

El integrando de S_{int} contiene un **producto escalar de vectores** $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \equiv g_{ij} U^i A^j$. A partir de un vector podemos obtener un **covector** “bajando el índice” con la métrica; por ejemplo, en el caso del cuadripotencial

$$A_i = g_{ij} A^j = (c^{-1}\phi, -\vec{A})$$

Así el integrando de S_{int} se puede leer también como la **contracción** $A_i U^i$.

Variando la acción $S_{libre} + S_{int}$ respecto de las coordenadas de la carga obtenemos

$$e (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt} (m \gamma(u) \vec{u}) = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

donde $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Así resulta la fuerza de Lorentz igualada a $d\vec{p}/dt$. En términos del **tensor de campo**,

$$F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1}E_x & c^{-1}E_y & c^{-1}E_z \\ -c^{-1}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -c^{-1}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -c^{-1}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

las tres ecuaciones dinámicas forman parte de la (cuadri-) ecuación

$$e F^i_j U^j = \frac{dp^i}{d\tau}$$

(la cuarta ecuación es la relación trabajo-energía), donde $F^i_j = g^{ik} F_{kj}$.

Acción del campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell con fuentes ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} - c^{-2} \partial \vec{E}/\partial t = \mu_0 \vec{j}$) se obtienen variando la acción invariante de Lorentz $S_{em} + S_{int}$ respecto del cuadripotencial, donde

$$S_{em}[A_i] = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int F_{ij} F^{ij} d^4x = \frac{1}{2\mu_0} \int (c^{-2} E^2 - B^2) dt dx dy dz$$

De allí resulta que

$$\partial_i F^{ik} = \mu_0 j^k$$

donde $j^k = (\rho c, \vec{j})$ es el cuadvivector densidad de carga-corriente. La ecuación de continuidad, $\partial_k j^k = 0$ (conservación de la carga), es una consecuencia de estas ecuaciones dinámicas ($\partial_k \partial_i F^{ik}$ es idénticamente nulo). Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell sin fuentes ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) son una consecuencia de la forma del tensor de campo (es decir, de la relación entre los campos y los potenciales):

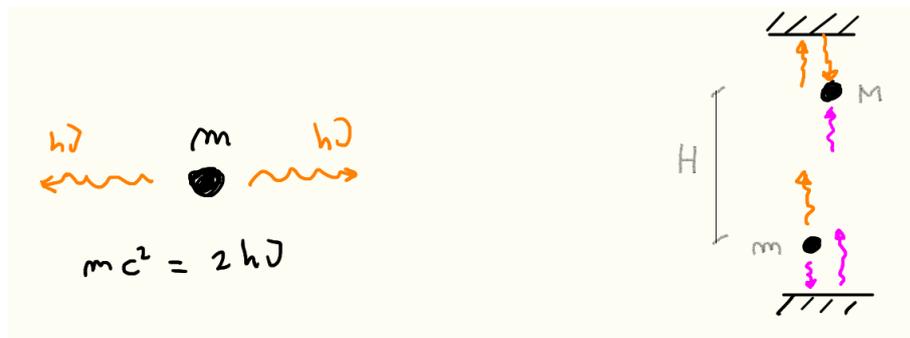
$$\partial_k F_{ij} + \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} = 0 .$$

3 Campo gravitatorio-inercial. Principio de equivalencia

El problema de formular la interacción gravitatoria en Relatividad

En la Física de Newton la gravedad es una fuerza que depende de una distancia. Esta formulación es satisfactoria en el contexto clásico, donde las leyes de la Física no cambian de forma ante transformaciones de Galileo. Pero no es aceptable en el contexto de la Relatividad Especial, donde la interacción paradigmática es la electromagnética, que se propaga a velocidad finita, y donde la fuerza depende de distancias y velocidades.

Vamos a dar un argumento que muestra que una formulación relativista de la gravedad en el espacio-tiempo de Minkowski no sería posible. Consideremos una partícula de masa m que se desintegra en dos fotones de energía $h\nu$, de modo que $mc^2 = 2h\nu$. Podemos imaginar un experimento donde los fotones de la desintegración "suben" un campo gravitatorio (uno de los fotones es reflejado por un espejo). Una vez que ascendieron una altura H se encuentran para crear una nueva partícula. Si el campo gravitatorio no



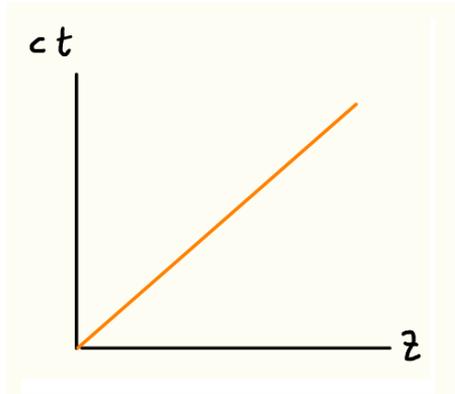
afectara la frecuencia de los fotones entonces los fotones alcanzarían la altura H con la misma frecuencia ν y generarían una partícula de la misma masa m . Pero en tal caso se violaría la conservación de la energía porque la partícula tendría además de su energía mc^2 la energía potencial gravitatoria mgH . Por lo tanto la frecuencia debe ser afectada: a la altura H la frecuencia debe ser ν' para crear una masa $Mc^2 = 2h\nu'$ tal que

$$Mc^2 + MgH = mc^2$$

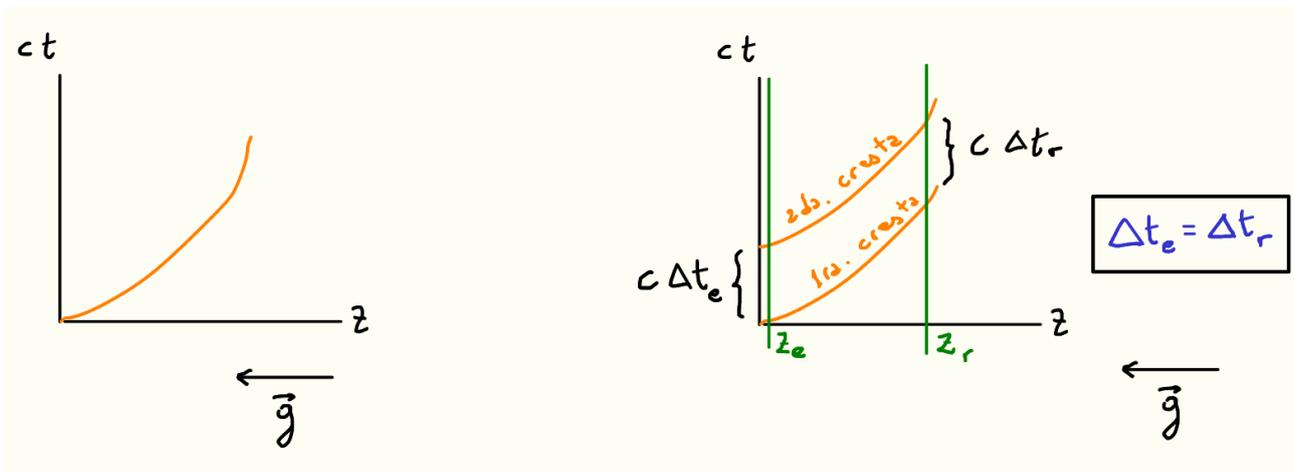
es decir

$$2h\nu' \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right) = 2h\nu$$

Entonces la frecuencia debería disminuir cuando la luz sube un potencial gravitatorio. Este efecto, que aquí es visto como una consecuencia de la conservación de la energía, se llama **corrimiento al rojo gravitatorio**. Veamos por qué no resulta posible modelar este corrimiento en el espacio-tiempo de Minkowski. Sabemos que en ausencia de gravedad, y en un sistema inercial, las líneas de universo de los rayos de luz son rectas a 45° ,



Supongamos que un campo gravitatorio estático afecta esta línea de universo:



Para ver qué le sucedería a la frecuencia en ese caso, consideremos un emisor fijo en $z = z_e$ que emite una onda de período T . Dos crestas sucesivas de la onda que se emiten en z_e con una diferencia de tiempo coordenado Δt_e siguen las líneas de universo de rayos de luz hasta llegar hasta un receptor fijo en la posición $z = z_r$. Como el campo es estático, la línea de universo de la 2da. cresta es igual a la que corresponde a la 1ra. cresta, pero trasladada en el tiempo. Las crestas llegan a z_r con una diferencia de tiempo coordenado Δt_r . En el espacio-tiempo de Minkowski el tiempo coordenado t coincide

con el tiempo medido por relojes en reposo en el sistema de referencia ($\Delta\tau = c^{-1}\Delta s$; pero $\Delta s = c \Delta t$ cuando $\Delta\vec{r} = 0$). El tiempo coordinado t es el tiempo medido por los relojes del emisor y el receptor, que son los relojes utilizados para medir el período de emisión T y el de recepción T' ; entonces es $T = \Delta t_e$ y $T' = \Delta t_r$. Pero en la figura vemos que es $\Delta t_e = \Delta t_r$; por lo tanto, el esperado corrimiento de frecuencia, necesario para la conservación de la energía, no parece modelable en la geometría de Minkowski.

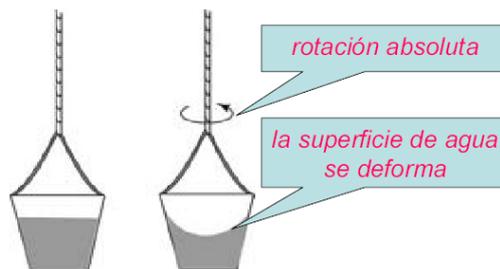
El privilegio de los sistemas inerciales

Principio de inercia y espacio absoluto de Newton

El **Principio de inercia** afirma que una partícula libre de fuerzas realiza un movimiento rectilíneo uniforme. Es evidente que este enunciado no puede ser válido en cualquier sistema de referencia. Como sabemos, el Principio de inercia y demás leyes fundamentales de la Física son válidos en los sistemas de referencia inerciales. Para reconocer si un laboratorio es inercial o no bastaría entonces observar el movimiento de una partícula libre de fuerzas. Pero, ¿cómo sabemos que la partícula está libre de fuerzas? Dado que existen fuerzas que se ejercen “a distancia”, ¿cómo podemos estar seguros de que no hay fuerzas “a distancia” actuando sobre la partícula?

En la visión de Newton esta cuestión se resuelve diciendo que los laboratorios inerciales son aquellos que se trasladan uniformemente respecto del **espacio absoluto**. Para Newton, la aceleración de la que habla su 2da Ley es la **aceleración absoluta**, que es la aceleración respecto del espacio absoluto.

Aunque Newton admitía que el **movimiento absoluto es indetectable** (sólo es detectable el movimiento relativo), también pensaba que la aceleración absoluta era un concepto válido. Según Newton, la existencia de la rotación absoluta se demuestra, por ejemplo, con el efecto que produce sobre la superficie del agua en un balde cuando el balde está en rotación.



En un laboratorio acelerado aparecen los efectos centrífugo, de Coriolis, etc. que no

aparecerían en un sistema inercial. Por lo tanto la diferencia entre un laboratorio acelerado y uno inercial es algo que se puede reconocer físicamente.

Distintos laboratorios inerciales están en traslación relativa unos respecto de otros. La equivalencia de los sistemas inerciales frente a las leyes fundamentales de la Física no hace más que reflejar la **indetectabilidad del estado de movimiento absoluto** de un laboratorio, poniendo de relieve, en cambio, el **carácter absoluto de los cambios de estados de movimiento**. Esto es así tanto en la Física Clásica como en Relatividad Especial. Las leyes fundamentales son válidas en estos sistemas de referencia y no en otros. Por lo tanto los fenómenos físicos que se derivan de las leyes fundamentales son incapaces de revelar el **estado de movimiento** de un laboratorio. El estado de movimiento es una **noción relativa**; no tiene sentido afirmar que un laboratorio está en reposo absoluto porque no hay experimento que revele tal condición. Por el contrario, el **cambio de estado de movimiento** del laboratorio puede ser detectado mediante un experimento. De esa forma, la existencia de una **aceleración** tiene el rango de una **noción absoluta**.

Crítica de Mach (1883)

- ◆ El privilegio de un sistema de referencia sobre otro debe reconocer una causa física.
- ◆ El espacio absoluto de Newton no es una causa física. Por lo tanto no es una explicación legítima para el privilegio de los sistemas de referencia inerciales.
- ◆ El carácter **inercial** de un sistema de referencia no puede ser otorgado por el espacio absoluto de Newton sino por la relación del sistema de referencia con la distribución de materia en el universo. Un sistema inercial debería ser aquel que no está en rotación respecto de las estrellas “fijas”, y que se traslada uniformemente respecto del centro de masa del universo.
- ◆ Si el espacio estuviese vacío no habría manera de privilegiar un sistema de referencia respecto de otro.
- ◆ El balde de Newton no revela la rotación absoluta sino la rotación relativa al resto del universo. No sabemos cuál sería el comportamiento de la superficie de agua si el resto del universo no existiese, o si el balde fuera suficientemente grueso como para competir con el resto del universo.

Principio de Mach

Einstein bautizó Principio de Mach a la idea de que los efectos inerciales sobre un sistema físico, como el efecto centrífugo y otros, provienen de la relación entre el sistema físico y el resto del universo. Esta idea es uno de los disparadores de la Relatividad General.

Principio de equivalencia

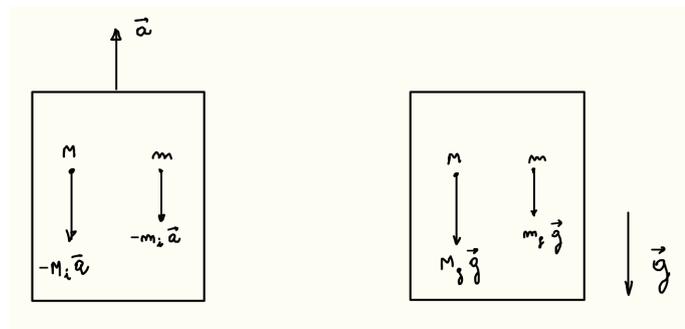
La igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria lleva a la ley de caída universal de los cuerpos (todos los cuerpos caen con la misma aceleración). Desde los tiempos de Galileo esta ley era vista como un mero hecho, sin ningún significado más profundo. Para Einstein, en cambio, la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria indicaba que las fuerzas de inercia y gravitatorias eran de la misma naturaleza. Así como las masas “cercanas” producen fuerzas gravitatorias, las masas “lejanas” producen fuerzas de inercia (siguiendo a Mach).

Por lo tanto, formular satisfactoriamente una teoría de la interacción gravitatoria implicará conocer también cómo son las leyes de la Física en sistemas acelerados. La importancia de estas reflexiones como puntos de partida para tal formulación, sugiere elevar a la categoría de Principio las consecuencias de la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria:

Principio de equivalencia débil

“La trayectoria espacio-temporal de una partícula libremente gravitante no depende más que de las condiciones iniciales” (es decir, no depende de las propiedades de la partícula).¹

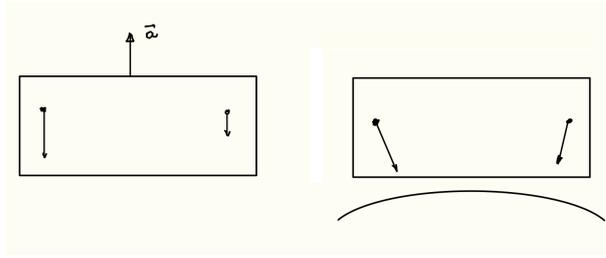
Una consecuencia de la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria es la imposibilidad de distinguir **localmente** un laboratorio acelerado de un laboratorio inercial en presencia de un campo gravitatorio:



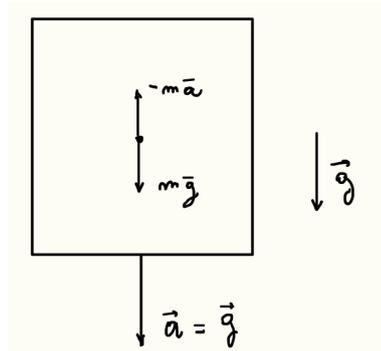
Si $\vec{g} = -\vec{a}$ entonces las fuerzas son iguales en ambos laboratorios. Esta equivalencia es **local** porque si consideramos regiones extendidas detectaremos que el campo gravitatorio converge hacia sus fuentes:²

1. El Principio de equivalencia fuerte dice que la energía gravitatoria interna de un sistema autogravitante contribuye en igual cantidad a su masa inercial y a su masa gravitatoria. Es decir que la energía gravitatoria interna también gravita.

2. También es local en la dimensión temporal. Aun en un laboratorio de pequeñas dimensiones podríamos detectar la convergencia de la gravedad esperando un tiempo suficientemente largo.



Consecuentemente, en un laboratorio en caída libre (es decir, si $\vec{a} = \vec{g}$) el **campo gravitatorio-inercial** se anula localmente:



lo que permite otra versión del Principio de equivalencia débil: “Los efectos de todo campo gravitatorio-inercial sobre el movimiento de las partículas pueden eliminarse localmente con un cambio adecuado de sistema de referencia”.

En cada evento del espacio-tiempo un sistema en caída libre será llamado **localmente inercial**, debido a que en tal sistema la dinámica de la partícula se verá como la conocemos en un sistema inercial de Relatividad Especial.

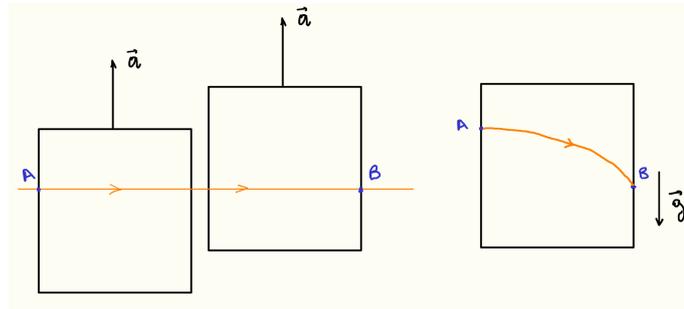
Pero Einstein fue más allá, y pensó que no sólo la Dinámica se desenvolvería en un sistema en caída libre tal como la conocemos en Relatividad Especial sino que lo mismo sucedería con cualquier otra teoría física que tuviese una formulación en el marco de la Relatividad Especial. Concretamente, el electromagnetismo y, en consecuencia, los fenómenos ópticos:

Principio de equivalencia de Einstein

“Los efectos del campo gravitatorio-inercial pueden eliminarse localmente cambiando a un sistema de referencia adecuado donde las leyes de la Física tienen la forma que conocemos en Relatividad Especial.”

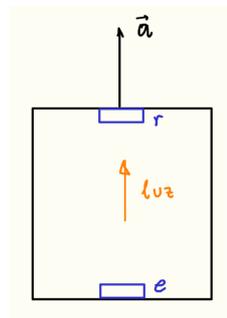
Dicho de otro modo, lo que le suceda a la luz en un laboratorio acelerado deberá sucederle también en un laboratorio inercial (en el sentido newtoniano del término) en presencia de gravedad. Ahora bien, en un laboratorio acelerado un rayo de luz no viaja

en línea recta sino que se deflecta; por lo tanto concluimos que la luz debería deflectarse en presencia de gravedad (**la luz gravita**):



Además, la frecuencia de la luz en un campo gravitatorio debería sufrir los mismos efectos que sufre en un sistema acelerado.

Consideremos un sistema de emisor-receptor separado por una altura H , en movimiento uniformemente acelerado (en sentido newtoniano):



$$z_e = \frac{1}{2} a t^2, \quad z_r = H + \frac{1}{2} a t^2$$

Sean dos crestas de la onda sucesivas separados por un período T :

$$\text{1ra. cresta : } z = c t ,$$

$$\text{2da. cresta : } z = c (t - T) + \frac{1}{2} a T^2$$

pues la 2da. cresta es emitida desde $z_o = z_e(T)$. La 1ra. cresta llega al receptor en un instante t_1 :

$$c t_1 = H + \frac{1}{2} a t_1^2$$

mientras que la 2da. cresta llega al receptor en un instante t_2 :

$$c (t_2 - T) + \frac{1}{2} a T^2 = H + \frac{1}{2} a t_2^2$$

El período de recepción es $T' = t_2 - t_1$, que se obtiene restando estas dos ecuaciones:

$$c (T' - T) + \frac{1}{2} a T^2 = \frac{1}{2} a (t_2^2 - t_1^2)$$

o bien, reemplazando $t_2 = T' + t_1$,

$$c(T' - T) + \frac{1}{2} a T^2 = \frac{1}{2} a T'^2 + a T' t_1$$

Despreciando T, T' frente al tiempo de viaje $t_1 \simeq H/c$ (por cierto H es mucho mayor que la longitud de onda), obtenemos

$$c(T' - T) \simeq \frac{aH}{c} T'$$

y en términos de la frecuencia

$$1 - \frac{\nu'}{\nu} \simeq \frac{aH}{c^2}$$

Según el Principio de equivalencia, cuando un rayo de luz “sube” un campo gravitatorio la frecuencia debería debilitarse (**corrimiento al rojo gravitatorio**) de acuerdo a la relación

$$1 - \frac{\nu'}{\nu} \simeq \frac{gH}{c^2} = \frac{\Delta\phi}{c^2}$$

donde ϕ es el potencial gravitatorio. Este corrimiento fue medido por primera vez en el campo gravitatorio terrestre por Pound y Rebka en 1960. Nótese que la aproximación del tiempo de viaje t_1 por H/c requiere que la velocidad at_1 alcanzada por el receptor debe ser mucho menor que c ; entonces es $aH \ll c^2$. Consecuentemente, la expresión del corrimiento al rojo gravitatorio es válida para $\Delta\phi \ll c^2$ (campo gravitatorio débil). Esta expresión es utilizada por el sistema GPS para comparar la marcha de los relojes en órbita respecto los relojes en la Tierra.

Ya habíamos adelantado que este corrimiento de frecuencias entre emisor y detector en reposo relativo en un campo gravitatorio no puede ser modelado en el espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, podríamos modelarlo aceptando que el campo gravitatorio se expresa a través de una dependencia de la métrica con la posición (es decir, abandonando la geometría de Minkowski). Así el tiempo medido por un reloj fijo al emisor sería

$$\Delta\tau_e = c^{-1} \Delta s_e = c^{-1} \sqrt{g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j} = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_e)} \Delta t_e ,$$

mientras que un reloj fijo al receptor mediría

$$\Delta\tau_r = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_r)} \Delta t_r .$$

Aunque los tiempos coordenados entre crestas sucesivas son iguales como hemos dicho ($\Delta t_e = \Delta t_r$), los relojes miden tiempos distintos; por lo tanto los períodos son distintos:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{T}{T'} = \frac{\sqrt{g_{00}(\vec{r}_e)}}{\sqrt{g_{00}(\vec{r}_r)}}$$

Para obtener $\nu'/\nu \simeq 1 - c^{-2} \Delta\phi$ en campo débil, debería ser

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2} , \quad |\phi| \ll c^2 .$$

En ausencia de gravedad recuperamos el valor minkowskiano.

Principio general de relatividad

La noción de campo gravitatorio-inercial hace que la separación de los sistemas de referencia en “buenos” y “malos” pierda significado. Las leyes de la Física describirán la interacción entre el campo gravitatorio-inercial y el resto de los sistemas físicos. Esas leyes deberían ser utilizables en cualquier sistema de referencia, con tal que se conozca el campo gravitatorio-inercial en el sistema de referencia elegido; en eso consiste la **generalización** del Principio de relatividad. No obstante, en cada evento del espacio-tiempo existirán sistemas localmente inerciales donde el campo gravitatorio-inercial se anula localmente, y las leyes toman la forma que conocemos en Relatividad Especial.

El campo gravitatorio-inercial estará determinado por la distribución y el movimiento de la materia en el universo. No será visto como una fuerza, sino que se manifestará en las leyes de la Física a través del tensor métrico que describe la geometría del espacio-tiempo. Por lo tanto, necesitaremos también una ley que diga cómo la materia del universo determina el tensor métrico. Ese tensor métrico se reducirá localmente a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski cuando adoptemos un sistema localmente inercial.

4 Espacio topológico. Variedad diferenciable. Espacio tangente

Topología

► Espacio topológico : es un par (\mathbb{E}, τ) donde \mathbb{E} es un conjunto cualquiera, y τ es una familia de subconjuntos de \mathbb{E} (que puede ser no numerable) con las siguientes propiedades:

i) $\emptyset, \mathbb{E} \in \tau$.

ii) La intersección de un número finito de elemento de τ pertenece a τ .

iii) La unión de elementos de τ pertenece a τ .

Los elementos de τ son los "abierto" de \mathbb{E} . Se dice que τ es una "topología" sobre \mathbb{E} .

► Ejemplos:

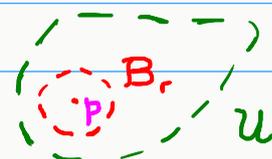
1) Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, y τ el conjunto formado por los intervalos abiertos (a, b) y sus uniones. Esta es la topología "estándar" usual en \mathbb{R} .

2) Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^m$. Los elementos de \mathbb{E} son m -uplas $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$. Se define una "bola" de radio r alrededor de p como el conjunto

$$B_r(p) = \left\{ q \in \mathbb{R}^m / \sum_{i=1}^m (q_i - p_i)^2 < r^2 \right\}$$

Un conjunto U pertenece a la topología estándar de \mathbb{R}^m si

$\forall p \in U \exists r > 0$ tal que $B_r(p) \subseteq U$



3) Sea \mathbb{E} un conjunto cualquiera. $\mathcal{Z} = \{\emptyset, \mathbb{E}\}$ es la topología "indiscreta" o "caótica".

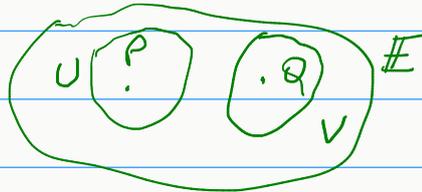
4) Sea \mathbb{E} un conjunto cualquiera. $\mathcal{Z} =$ familia de todos los subconjuntos de \mathbb{E} es la topología "discreta".

5) Topología "inducida" (heredada): sea $\mathbb{E}_2 \subseteq \mathbb{E}_1$, definimos $\mathcal{Z}_2 = \{U \cap \mathbb{E}_2 / U \in \mathcal{Z}_1\}$. (probar que \mathcal{Z}_2 es una topología)

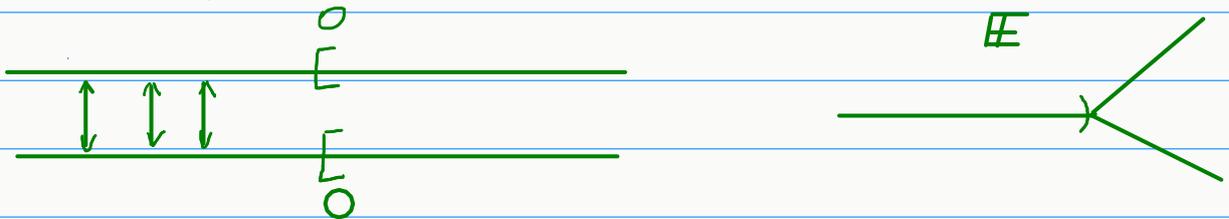
Por ejemplo, la topología usual de \mathbb{R}^2 induce una topología sobre una curva en \mathbb{R}^2 .

► Un subconjunto de \mathbb{E} se dice "cerrado" si su complemento es abierto.

► Espacio de Hausdorff: un espacio topológico es de Hausdorff si dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{E}$ existen dos abiertos U, V tales que $P \in U, Q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.



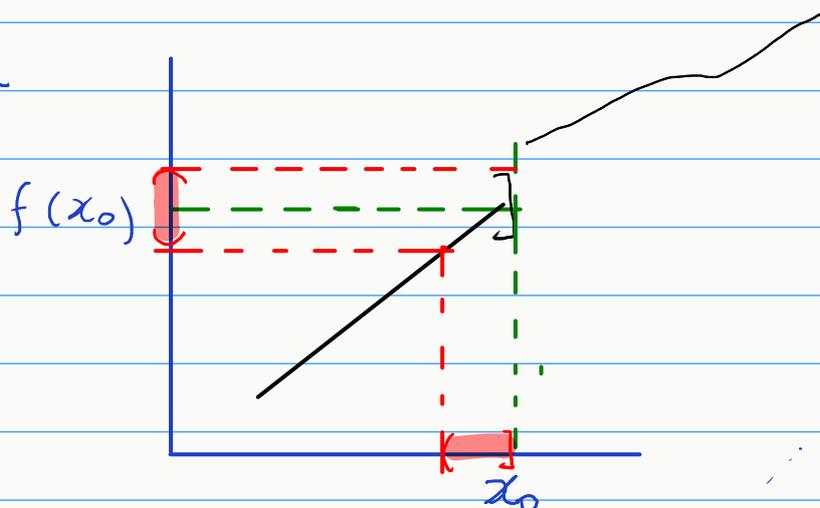
Contraejemplo: Consideremos dos rectas reales con la topología usual, y construyamos \mathbb{E} identificando las semirectas abiertas $x < 0$



Todavía \mathbb{E} tiene dos "ceros", y no es posible encontrar dos abiertos con intersección nula tales que cada "cero" esté contenido en uno solo de ellos.

► Idea de continuidad

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



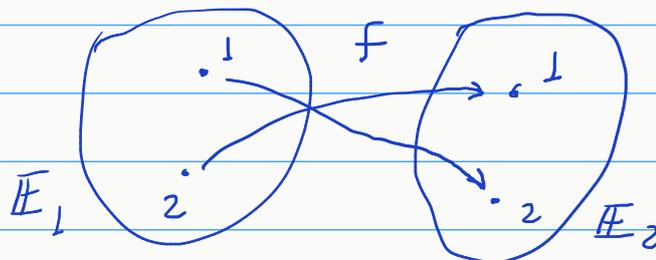
la preimagen de un abierto no es un abierto (con la topología usual de \mathbb{R}): la función no es continua.

► Función continua: sean (E_1, τ_1) y (E_2, τ_2) dos espacios topológicos. Una función $f: E_1 \rightarrow E_2$ se dice continua si la preimagen de todo abierto de τ_2 es un abierto de τ_1 .

► Teorema: f, g son continuas entonces $g \circ f$ es continua.

► Homeomorfismo: es toda biyección bicontinua.

Contraejemplo



$$\tau_1 = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, E_1 \}$$

topología discreta

$$\tau_2 = \{ \emptyset, E_2 \}$$

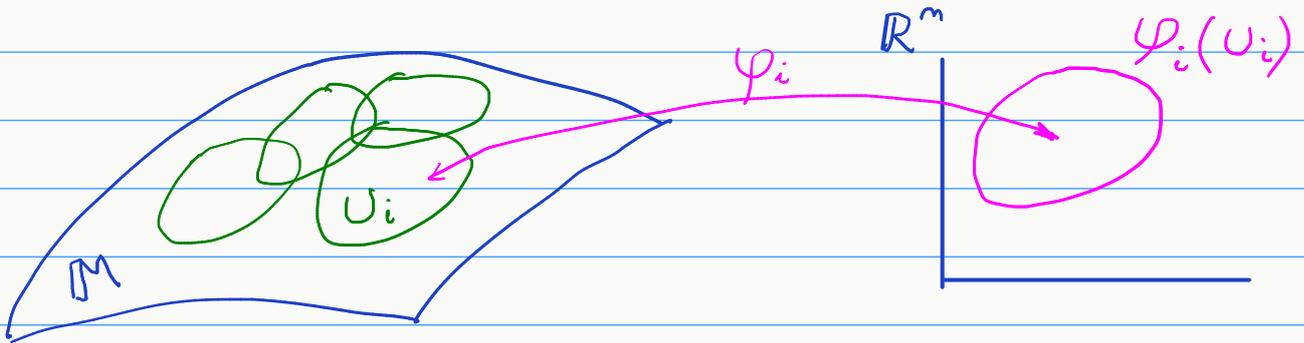
topología indiscreta

f es continua, pero f^{-1} no es continua \Rightarrow
 f no es homeomorfismo

► Variedad topológica : una variedad topológica M ("manifold") de dimensión m es un par $(E, \{U_i, \varphi_i\})$ donde

- i) E es un espacio topológico de Hausdorff
- ii) $\{U_i\}$ es un cubrimiento de E por abiertos
- iii) $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo con la topología de $\varphi_i(U_i)$ inducida por la topología estándar de \mathbb{R}^m

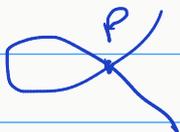
Se suele pedir también que la topología admita una base numerable.



La idea básica es que una **variedad** topológica es localmente como \mathbb{R}^m con su topología estándar, aunque globalmente podrían diferir.

La superficie de una **esfera** es una variedad topológica de $m=2$.

En cambio la curva

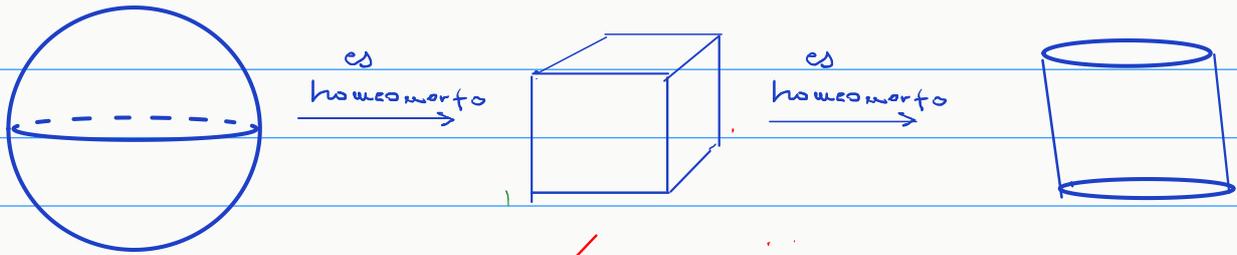


no es una variedad porque el entorno de P no es asimilable a un entorno de \mathbb{R}

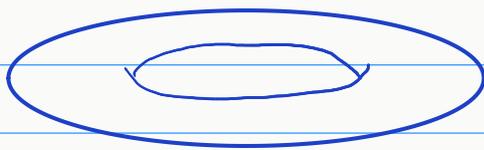
La Topología estudia las propiedades comunes a espacios que son homomorfos entre sí: conexidad, compacidad, número de "agujeros", etc.

Conexidad: un espacio es conexo si no es unión disjunta de dos abiertos.

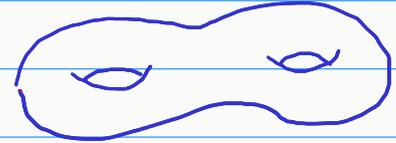
Compacidad: un espacio (o subespacio) es compacto si para cualquier cubrimiento por abiertos existe un subcubrimiento finito. $A \subset \mathbb{R}^m$ (con la topología estándar) es compacto si y sólo si es cerrado y acotado (teorema de Heine-Borel).



NO es homeomorfo \ni



NO es homeomorfo \ni



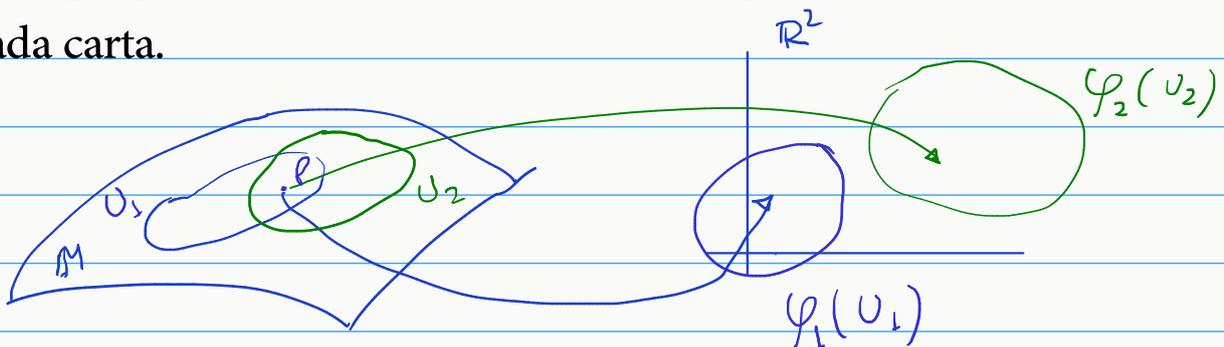
La topología global del toro es distinta de la de la esfera. En cambio, localmente todos estos ejemplos son como \mathbb{R}^2 (son espacios topológicos de 2 dimensiones).

► Carta: cada par (U_i, φ_i) es una carta local (una asignación de coordenadas)

► Atlas: es el conjunto de cartas locales $\{(U_i, \varphi_i)\}$ que cubren M .

► Coordenadas : las cartas sirven para asignar coordenadas a cada punto de \mathbb{E} .

$\varphi_i(P)$ es una n-upla (x_1, x_2, \dots, x_m) de \mathbb{R}^m , que otorga coordenadas a P en la carta (U_i, φ_i) . Como los U_i son abiertos, necesariamente se solapan. Así habrá puntos que pertenecen a distintas cartas, y que reciben distintas coordenadas en cada carta.

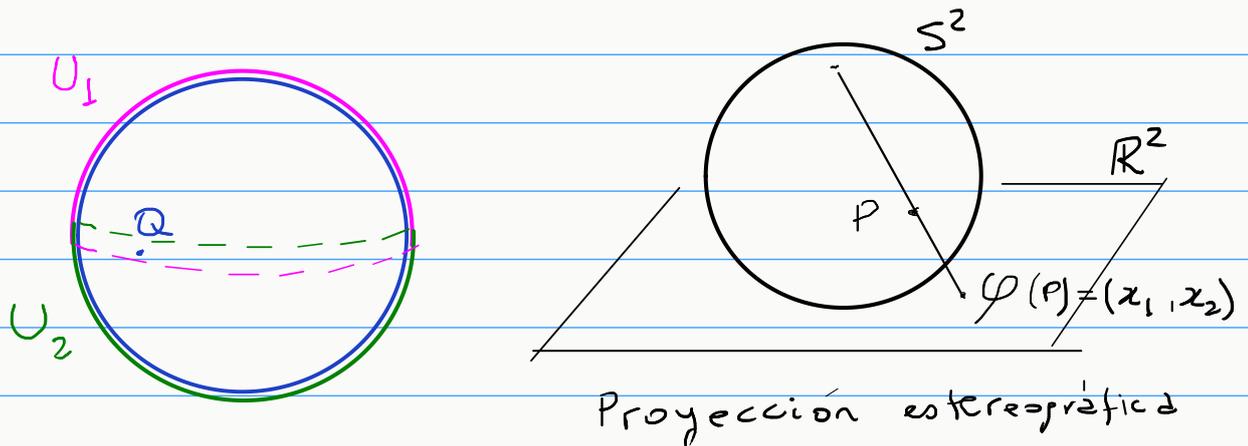


$$\varphi_1(P) = (x_1, \dots, x_m)$$

$$\varphi_2(P) = (y_1, \dots, y_m)$$

Si la topología global de la variedad es como la de \mathbb{R}^m , entonces es posible cubrir la variedad con una única carta. Pero en general no es así.

Por ejemplo, la esfera S^2 precisa al menos dos cartas (dos abiertos) para cubrirla,



que se pueden lograr, por ejemplo, con dos proyecciones estereográficas: una desde el Polo Norte y otra desde el Polo Sur.

En la zona de solapamiento de las cartas conviven dos asignaciones de coordenadas. Un mismo punto Q es descrito por coordenadas (x_1, x_2) y (y_1, y_2) . Podemos considerar las funciones que describen el cambio de coordenadas:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2)$$

Diremos que las cartas son C^k -relacionadas si existen y son continuas las derivadas parciales de orden k de estas funciones (son funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2)

Variedades diferenciables

▶ Variedad C^k : variedad dotada de un "atlas maximal" de cartas C^k -relacionadas.

Dos atlas C^k son compatibles si cada carta de uno de ellos es C^k -relacionada con cada carta del otro.

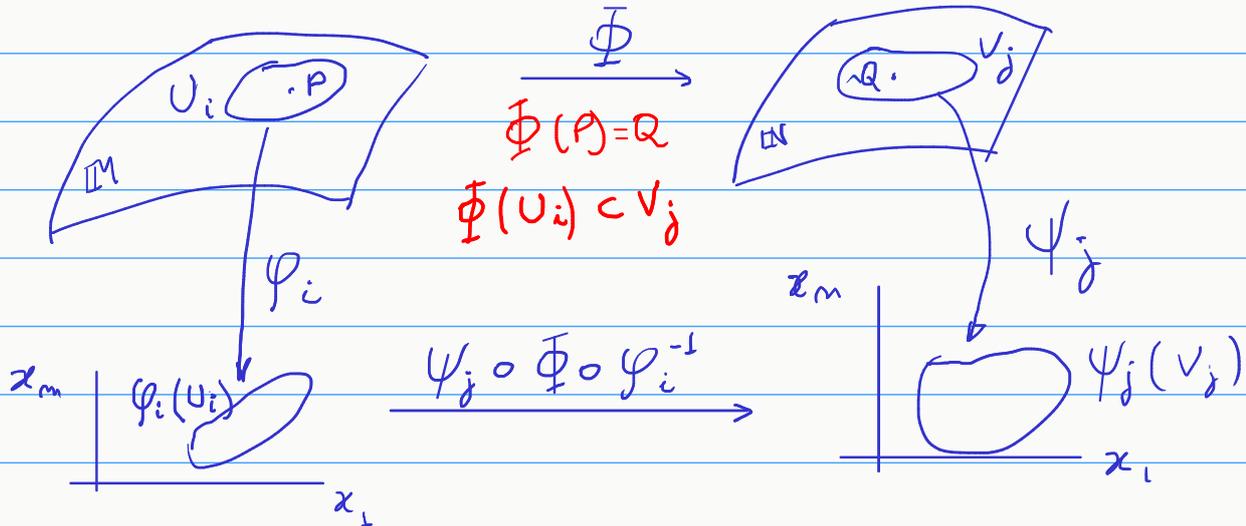
La compatibilidad entre atlas C^k es una relación de equivalencia. La unión de los atlas C^k pertenecientes a una misma clase de equivalencia forma un "atlas maximal C^k ", que es la estructura que caracteriza la variedad C^k .

▶ Variedad diferenciable: es una variedad C^∞ de dimensión constante m .

La idea es introducir en la variedad la posibilidad de derivar funciones. Una función definida sobre M puede llevarse a una función en \mathbb{R}^m por medio de las cartas. Allí se la deriva, y el resultado puede ser retrotraído a M . Como las cartas son C^k -relacionadas, la diferenciabilidad de una función f definida sobre M no es afectada por la carta usada en el procedimiento.

► Difeomorfismo

Sea Φ un mapa continuo entre dos variedades diferenciables \mathbb{M} y \mathbb{N} de dimensiones m y n .



Diremos que Φ es diferenciable en P si $\forall i, j$ las funciones $\psi_j \circ \Phi \circ \varphi_i^{-1}$ son C^∞ en $\varphi_i(P)$. Como estas funciones están definidas entre abiertos de \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n , la noción de diferenciabilidad es la usual.

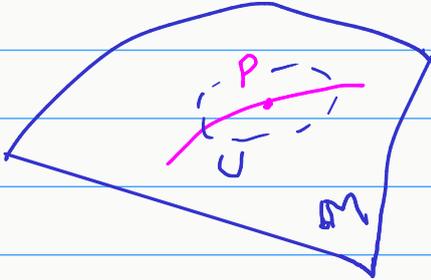
► Un difeomorfismo es un mapeo biyectivo y diferenciable entre variedades de igual dimensión, cuya inversa es también diferenciable.

Dos variedades diferenciables se dicen difeomorfas si existe un difeomorfismo entre las mismas, lo cual habla de una equivalencia entre sus estructuras diferenciables. Dos variedades difeomorfas son una misma en todas aquellas propiedades concernientes exclusivamente a su estructura de variedad diferenciable.

El conjunto de difeomorfismos entre dos variedades forma un grupo ante la composición de mapeos.

Espacio vectorial tangente

Consideremos una curva sobre una variedad diferenciable



$$x^i = x^i(\lambda) \quad i = 1, \dots, m$$

La curva es un objeto geométrico.
Sus ecuaciones paramétricas no son más que su realización en \mathbb{R}^m a través de una carta (U, φ) .

Como objeto geométrico, la curva es un mapeo

$$\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

que a cada valor del parámetro real λ le asigna un punto de M .

La curva está constituida tanto por su "recorrido" como por su parametrización:



Supondremos que el mapeo γ es diferenciable en P . Esto significa que las m funciones $x^i(\lambda)$ son diferenciables en $\lambda = \lambda_P$.

Dada una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, queremos ver cómo cambia f sobre la curva:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df[x^i(\lambda)]}{d\lambda} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda}$$

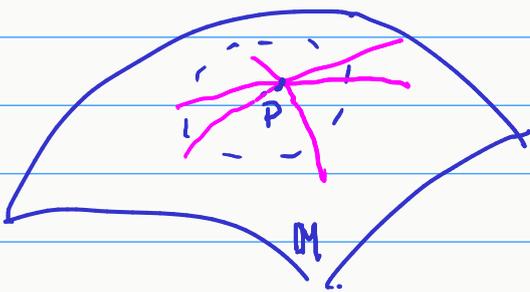
Como la función f es arbitraria, podemos ver el resultado anterior como una relación entre operadores de derivación; en cada punto P de la curva vale que

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda_P} = \left. \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda_P} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(usamos la convención de Einstein para la sumatoria)

En este resultado, el objeto geométrico $d/d\lambda$ —la derivación en la dirección de la curva— queda descompuesto en dos factores dependientes de la carta.

Así la derivación en la dirección de cada curva que pasa por P puede verse como una combinación lineal de las derivadas parciales $\partial/\partial x^i$, que forman entonces una base para este tipo de derivaciones.



Más aún: cualquier combinación $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ puede verse como una derivación en la dirección de una curva que pasa por P ; basta tomar

$$x^i(\lambda) = x^i_P + v^i (\lambda - \lambda_P) + a^i (\lambda - \lambda_P)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda_P} = v^i$$

Las derivaciones en la dirección de las curvas que pasan por P forman un espacio vectorial en P , cuya base es $\{\partial/\partial x^i\}$, que llamamos **espacio vectorial tangente** Π_P .

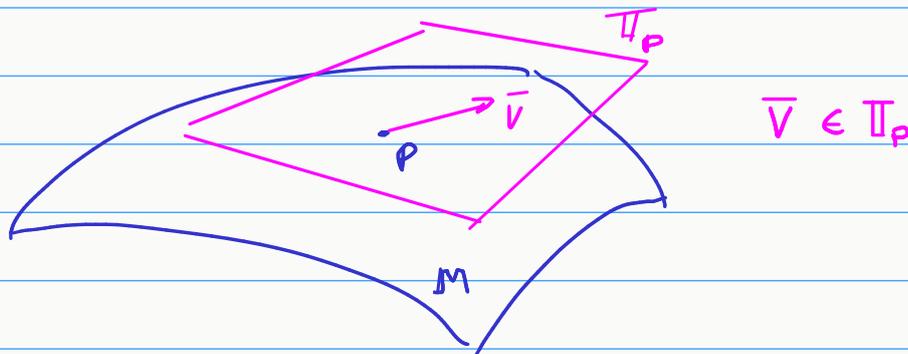
$$\bar{V} \in \Pi_P \Rightarrow \boxed{\bar{V} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}}, \quad v^i \in \mathbb{R}$$

El nombre "tangente" se debe a que las **componentes** v^i de los vectores de en la **base coordenada** $\{\partial/\partial x^i\}$ tienen la forma

$$v^i = \left. \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_P}$$

que en un espacio euclidiano serían las componentes del vector tangente a la curva.

Representamos Π_P y sus elementos así:



Los vectores son derivaciones. Actúan sobre funciones y dan por resultado números:

$$\bar{V}(f) \in \mathbb{R}$$

El número no es más que la derivada de f en la dirección de \bar{V} en P :

$$\boxed{\bar{V}(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_P}$$

5 Bases anholónomas. 1-formas. Espacio cotangente

► Bases holónomas

Por cierto, tendríamos que probar que los vectores que integran la base coordenada $\{\partial/\partial x^i\}$, también llamada **holónoma**, son linealmente independientes.

Es decir,
$$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \iff v^i = 0 \quad \forall i$$

Demostración:

\Leftarrow) trivial

\Rightarrow) Apliquemos el operador $v^i \partial_i$ a las funciones x^j :

$$0 = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} x^j = v^i \delta^j_i = v^j \Rightarrow v^j = 0$$

Las n derivaciones $\partial/\partial x^i$ son linealmente independientes, lo que muestra que \mathbb{T}_p tiene dimensión n .

Las $\partial/\partial x^i$ son derivaciones en la dirección de las curvas coordenadas.

► Campo vectorial: consiste en elegir un $\bar{V} \in \mathbb{T}_p$ en cada $p \in \mathbb{M}$. En un entorno U escribiremos

$$\bar{V}(x^k) = v^i(x^k) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

► Bases anholónomas: no es imprescindible que la base sea coordenada. Cualquier conjunto $\{\bar{E}_a\}_{a=1,\dots,n}$ de n vectores linealmente independientes es una buena base de Π_p .

Así cualquier vector $\bar{V} \in \Pi_p$ puede ser desarrollado como

$$\bar{V} = v^a \bar{E}_a$$

Los propios \bar{E}_a pueden desarrollarse en la base coordenada:

$$\bar{E}_a = e_a^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

entonces: $\bar{V} = v^a e_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, es decir $v^i = v^a e_a^i$

Mientras que los vectores de una base coordenada conmutan:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right),$$

no sucede lo mismo con los vectores de una base anholónoma:

$$\begin{aligned} \bar{E}_b (\bar{E}_a (f)) - \bar{E}_a (\bar{E}_b (f)) &= \bar{E}_b (e_a^i \partial_i f) - \bar{E}_a (e_b^j \partial_j f) = \\ &= e_b^j \partial_j (e_a^i \partial_i f) - e_a^i \partial_i (e_b^j \partial_j f) = \\ &= e_b^j \partial_j e_a^i \partial_i f - e_a^i \partial_i e_b^j \partial_j f \end{aligned}$$

Si nos deshacemos de f :

$$\bar{E}_b \bar{E}_a - \bar{E}_a \bar{E}_b = (e_b^j \partial_j e_a^i - e_a^i \partial_i e_b^j) \partial_i$$

Es importante notar que la distinción entre una base coordenada y una anholónoma requiere conocer el comportamiento de la base en un entorno del punto en cuestión, porque involucra derivadas de la base.

Ejemplo: en el espacio euclidiano de $n=2$ dimensiones solemos usar la base de versores polares:

$$\bar{E}_r = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \bar{E}_\theta = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

que es una base anholónoma. La base holónoma asociada a las coordenadas polares es

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} = \bar{E}_r$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} = r \bar{E}_\theta$$

► Transformación de componentes ante cambio de base

Un cambio de base en Π_p es una transformación lineal:

$$\bar{E}_a = \Lambda^{a'}_a \bar{E}_{a'}$$

Un mismo vector \bar{V} puede ser expresado en ambas bases:

$$\bar{V} = v^a \bar{E}_a = v^a \Lambda^{a'}_a \bar{E}_{a'} = v'^{a'} \bar{E}_{a'}$$

Es decir

$$v'^{a'} = \Lambda^{a'}_a v^a$$

En particular el cambio entre bases coordenadas es

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad \text{es decir} \quad \Lambda^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$$

entonces

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$$

Los textos que no usan lenguaje geométrico definen vector como una n -upla v^i que ante cambio de coordenadas se transforma como acabamos de ver. Pero debemos enfatizar que no es el vector quien se transforma; el vector es un objeto geométrico, independiente de la carta. Lo que se transforma son sus componentes, debido al cambio de base.

Las coordenadas mismas no se transforman como lo hacen las v^i . No hay un vector cuyas componentes sean las coordenadas. El paradigma de vector no es la posición sino la velocidad. En otras palabras, en general \mathbb{M} no es un espacio vectorial.

► Campos vectoriales y líneas de campo

Dado un campo vectorial $\bar{V}(x^k)$, podríamos preguntarnos si es posible encontrar una curva que pase por P , cuyo vector tangente coincida con $\bar{V}(x^k) = v^i(x^k) \partial_i$ en cada punto de la curva.

Deberíamos encontrar una curva $x^i = x^i(\lambda)$ que pase por P tal que

$$\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} = v^i(x^k) \quad i=1, \dots, n$$

Estas ecuaciones son siempre integrables, y tienen solución única (al menos en un entorno de P). La curva así obtenida es la línea de campo de \bar{V} que pasa por P .

1-formas. Espacio cotangente

- ▶ Las formas diferenciales o **1-formas** (también llamadas "**covectores**") son funciones lineales reales definidas sobre \mathbb{T}_P ,

$$\tilde{\omega} : \mathbb{T}_P \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dado $\bar{v} \in \mathbb{T}_P$, es $\tilde{\omega}(\bar{v}) \in \mathbb{R}$.

Notación alternativa: $\tilde{\omega}(\bar{v}) \equiv \langle \tilde{\omega}, \bar{v} \rangle$

- ▶ Linealidad:

$$\tilde{\omega}(\alpha \bar{v} + \beta \bar{u}) = \alpha \tilde{\omega}(\bar{v}) + \beta \tilde{\omega}(\bar{u})$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \bar{v}, \bar{u} \in \mathbb{T}_P$$

Al igual que los vectores, las 1-formas son objetos geométricos, independientes de la carta. Asimismo, el número real que resulta de aplicar una 1-forma a un vector es independiente de la carta.

- ▶ Espacio dual o cotangente

Para convertir el conjunto de 1-formas en un espacio vectorial debemos definir la combinación lineal de 1-formas. Definimos

$$\langle \alpha \tilde{\omega} + \beta \tilde{\eta}, \bar{v} \rangle \equiv \alpha \langle \tilde{\omega}, \bar{v} \rangle + \beta \langle \tilde{\eta}, \bar{v} \rangle$$

El espacio vectorial de 1-formas se denomina **espacio dual o cotangente** en P , y se indica \mathbb{T}_P^* .

En el cálculo con matrices las columnas actúan como vectores y las filas como 1-formas. En ese caso hay una operación que conecta ambos espacios: la trasposición. En nuestro caso no tenemos aún ninguna operación que conecte el espacio tangente con el espacio cotangente.

Veremos cómo se define una base coordenada en \mathbb{T}_P^* .

▷ Diferencial de una función

Dada una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definimos una 1-forma que llamaremos el diferencial de f :

$$\langle \tilde{d}f, \bar{v} \rangle \equiv \tilde{d}f(\bar{v}) \stackrel{\text{definición}}{=} \bar{v}(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \forall \bar{v} \in T_p$$

El número real que resulta de aplicar $\tilde{d}f$ al vector \bar{v} es la derivada de f en la dirección de \bar{v} . Si $\bar{v} = \frac{d}{ds} \Rightarrow \tilde{d}f(\bar{v}) = \left. \frac{df}{ds} \right|_p$.

Si f es la i -ésima coordenada de una carta:

$$\langle \tilde{d}x^i, \bar{v} \rangle = v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = v^j \delta_j^i = v^i$$

Lo que permite escribir $\tilde{d}f$ como:

$$\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tilde{d}x^i$$

En efecto, así resulta:

$$\langle \tilde{d}f, \bar{v} \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i} \tilde{d}x^i, \bar{v} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \tilde{d}x^i, \bar{v} \rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \checkmark$$

La notación puede sugerir que $\tilde{d}f$ es infinitesimal. Pero $\tilde{d}f$ es una 1-forma. Es una "máquina" lineal que espera un vector para dar un número real. Ese número es el valor de la derivada de f en la dirección de \bar{v} .

Como las componentes de $\tilde{d}f$ en una base coordenada son $\partial f / \partial x^i$, $\tilde{d}f$ se emparenta con la noción de gradiente. Como vemos el gradiente no es un vector sino un covector. Para ver el gradiente como vector necesitaremos una estructura adicional que vincule los espacios tangente y cotangente.

De la relación $v^i = \langle \tilde{dx}^i, \bar{v} \rangle = \langle \tilde{dx}^i, v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = v^j \langle \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$

también se concluye que

$$\langle \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta_j^i$$

Esta es una relación de dualidad entre las bases coordenadas $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ de Π_P y $\{\tilde{dx}^i\}$ de Π_P^* .

Para probar que $\{\tilde{dx}^i\}_{i=1, \dots, m}$ es una base Π_P^* debemos ver la independencia lineal de sus elementos; esto es

$$a_i \tilde{dx}^i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \quad \forall i$$

Demostración:

\Leftarrow) trivial

$$\Rightarrow) 0 = \langle a_i \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_i \langle \tilde{dx}^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_i \delta_j^i = a_j$$

En general cualquier 1-forma $\tilde{\omega} \in \Pi_P^*$ se puede desarrollar en la base coordenada $\{\tilde{dx}^i\}$:

$$\tilde{\omega} = \omega_i \tilde{dx}^i$$

Nótese la ubicación de los índices

► Base anholónoma dual

La dualidad se puede definir también entre bases anholónomas. n 1-formas linealmente independientes $\{\tilde{E}^a\}$ forman una base de \mathbb{T}_p^* dual a la base $\{\bar{E}_a\}$ de \mathbb{T}_p si

$$\langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = \delta_b^a$$

Los \tilde{E}^a se pueden expandir en la base coordenada:

$$\tilde{E}^a = e_i^a \tilde{dx}^i$$

Entonces $\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a = \omega_a e_i^a \tilde{dx}^i \Rightarrow \omega_i = \omega_a e_i^a$

Nótese que la dualidad implica que:

$$\delta_b^a = \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = e_i^a e_b^i$$

Los componentes ω_a corresponden a aplicar $\tilde{\omega}$ a \bar{E}_a :

$$\tilde{\omega}(\bar{E}_b) = \langle \tilde{\omega}, \bar{E}_b \rangle = \langle \omega_a \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = \omega_a \underbrace{\langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle}_{\delta_b^a} = \omega_b$$

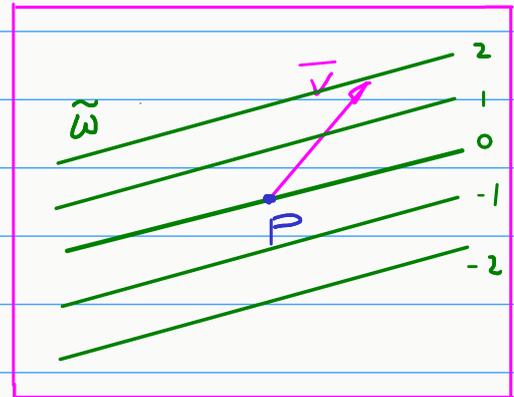
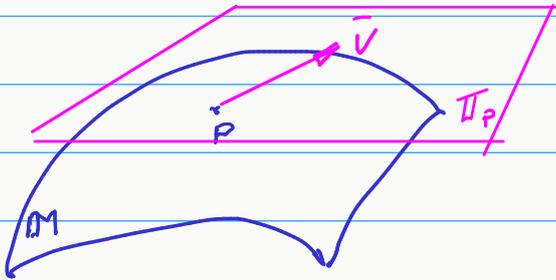
En términos de los respectivos componentes de $\tilde{\omega}$ y \bar{V} es:

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle = \omega_a V^b \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = \omega_a V^b \delta_b^a = \omega_a V^a$$

$$\langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle = \omega_a V^a$$

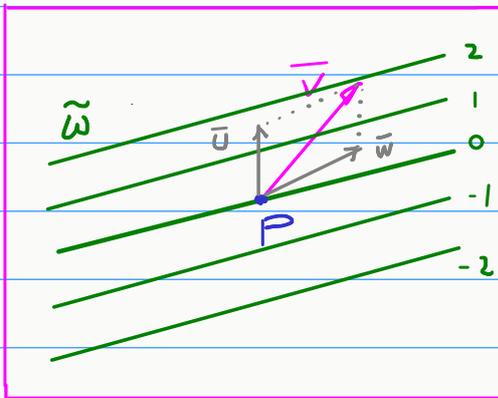
Nótese que usamos la dualidad

► **Representación gráfica de una 1-forma:** así como un vector se representa con una flecha asociada a la curva sobre la cual opera en forma de derivada, ¿cómo se representa un operador que toma un vector para dar un número?



$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = 2$$

La representación gráfica respeta la linealidad:



$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = 2$$

Por ejemplo:

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) = \tilde{\omega}(\bar{U} + \bar{W})$$

$$= \tilde{\omega}(\bar{U}) + \tilde{\omega}(\bar{W})$$

$$= 1,5 + 0,5 = 2$$

En dimensiones superiores usaremos un conjunto de hipersuperficies planas y paralelas; la hipersuperficie que contiene a P tendrá la etiqueta cero.

Nótese que no podemos representar la 1-forma mediante una flecha porque dos flechas no dan un número. Para que dos vectores den un número precisaríamos un producto interno de vectores, que requiere de un tensor métrico.

▶ Campo de 1-formas: consiste en elegir una $\tilde{\omega} \in \mathbb{T}_p^*$ en cada $P \in M$. En un entorno U escribiremos $\tilde{\omega}(x^k) = \omega_i(x^k) \tilde{dx}^i$.

▶ Normal a una hipersuperficie: estamos acostumbrados a caracterizar una hipersuperficie (un subespacio de dimensión $m-1$) por medio de un vector normal a la misma. Sin embargo todavía no hemos introducido una noción de perpendicularidad. Por lo tanto la noción de vector normal no existe aún. En cambio podemos definir una 1-forma normal $\tilde{\eta}$ tal que resulta cero cuando es aplicada a vectores tangentes a la hipersuperficie.

▶ Transformación de componentes ante cambio de base

Un cambio de base en \mathbb{T}_p es $\bar{E}_a = \Lambda^{a'}_a \bar{E}_{a'}$

¿Cómo debe ser el cambio de base en \mathbb{T}_p^* para preservar la dualidad entre las bases de \mathbb{T}_p y \mathbb{T}_p^* ?

$$\text{Sea } \tilde{E}^a = \Lambda^a_{a'} \tilde{E}^{a'}$$

en seguida veremos por qué se justifica usar el mismo símbolo Λ

La dualidad requiere que

$$\begin{aligned} \delta^a_b &= \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = \langle \Lambda^a_{a'} \tilde{E}^{a'}, \Lambda^{b'}_b \bar{E}_{b'} \rangle = \\ &= \Lambda^a_{a'} \Lambda^{b'}_b \underbrace{\langle \tilde{E}^{a'}, \bar{E}_{b'} \rangle}_{\delta^{a'}_{b'}} = \Lambda^a_{a'} \Lambda^{a'}_b \end{aligned}$$

también vale que

$$\delta^{a'}_{b'} = \Lambda^{a'}_a \Lambda^a_{b'}$$

$\Lambda^a_{a'}$ es la inversa de $\Lambda^{a'}_a$

Una misma 1-forma $\tilde{\omega}$ puede ser expresada en distintas bases:

$$\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a = \omega_a \Lambda^a_{a'} \tilde{E}^{a'} = \omega_{a'} \tilde{E}^{a'}$$

Es decir $\omega_{a'} = \Lambda^a_{a'} \omega_a$ o también $\Lambda^{a'}_a \omega_{a'} = \omega_a$

► Casos particulares

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \rightarrow \Lambda^{i'}_i$$

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \Rightarrow \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \Lambda^{i'}_j \Rightarrow \boxed{\tilde{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \tilde{d}x^{i'}}$$



$$\boxed{\omega_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \omega_i}$$

$$\bar{E}_a = e^i_a \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \Lambda^i_a$$

$$\tilde{E}^a = e^a_i \tilde{d}x^i \rightarrow \Lambda^a_i$$

Históricamente los covectores o 1-formas fueron llamados "vectores covariantes", porque sus componentes se transforman como los vectores de la base de \mathcal{T}_p , mientras que los vectores eran llamados "vectores contravariantes". Estas denominaciones oscurecen el carácter de estos objetos. Las componentes de los vectores y covectores se transforman de manera inversa a sus respectivas bases para garantizar que se comporten como objetos geométricos, independientes de cartas y de bases.

6 Tensores. p-formas. Áreas y volúmenes

Tensores

La relación $\langle \tilde{\omega}, \bar{v} \rangle = \omega_a v^a$,

y en particular $\langle \tilde{E}^a, \bar{v} \rangle = v^a$, $\langle \tilde{\omega}, \bar{E}_a \rangle = \omega_a$,

puede verse de dos maneras:

i) $\tilde{\omega}$ es una "máquina" lineal que espera un vector para dar un número $\tilde{\omega}: T_p \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}(\bar{v}) \in \mathbb{R}$

ii) pero también podríamos decir que \bar{v} es una máquina lineal que espera una 1-forma para dar un número:
 $\bar{v}: T_p^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{v}(\tilde{\omega}) \in \mathbb{R}$

Entonces podemos definir máquinas lineales más generales, que tengan entradas ("ranuras") para varios vectores y 1-formas. Cuando estas ranuras se completan, la máquina da un número. Esta es la idea de "tensor". Un tensor de tipo $\binom{r}{s}$ tiene r entradas o ranuras para 1-formas y s ranuras para vectores.

► Tensor: un tensor T es una aplicación lineal

$$T: \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r \text{ factores}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{s \text{ factores}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Las 1-formas son tensores $\binom{0}{1}$, y los vectores son tensores $\binom{1}{0}$.

Linealidad: $T(\dots, \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}, \dots) = \alpha T(\dots, \bar{v}, \dots) + \beta T(\dots, \bar{u}, \dots)$

para cualquier ranura de vectores, y la misma para cualquier ranura de 1-formas.

Podemos definir combinaciones lineales de tensores del mismo tipo para hacer de ellos un espacio vectorial en P :

$$\left(\alpha T_1 + \beta T_2 \right) (\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) \doteq \alpha T_1(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) + \beta T_2(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s)$$

► **Producto tensorial:** a partir de vectores y 1-formas podemos construir tensores de rango más alto mediante el producto tensorial \otimes . Por ejemplo, $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ es un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ definido como:

$$\bar{V} \otimes \tilde{\omega} (\tilde{\eta}, \bar{U}) = \bar{V}(\tilde{\eta}) \tilde{\omega}(\bar{U}) = \langle \tilde{\eta}, \bar{V} \rangle \langle \tilde{\omega}, \bar{U} \rangle = V^a \omega_b \eta_a U^b$$

En particular $\bar{V} \otimes \tilde{\omega} (\tilde{E}^a, \bar{E}_b) = V^a \omega_b$

son las componentes de $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$

Siempre se obtienen las componentes saturando las ranuras con elementos de las bases: $\bar{V}(\tilde{E}^a) = \langle \tilde{E}^a, \bar{V} \rangle = V^b \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = V^a$, etc.

De hecho alcanza con saber cómo actúa un tensor sobre los elementos de las bases de \mathbb{T}_p y \mathbb{T}_p^* para saber cómo actúa sobre cualquier colección de entradas (por linealidad).

Nótese que $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ se puede desarrollar en términos de sus componentes $V^a \omega_b$:

$$\bar{V} \otimes \tilde{\omega} = V^a \omega_b \bar{E}_a \otimes \tilde{E}^b$$

En efecto $\bar{V} \otimes \tilde{\omega} (\tilde{\eta}, \bar{U}) = V^a \omega_b \bar{E}_a(\tilde{\eta}) \tilde{E}^b(\bar{U}) = V^a \omega_b \eta_a U^b$

► Espacio vectorial $\mathbb{T}_s^r(\mathcal{P})$: está formado por los tensores de tipo $\binom{r}{s}$ en \mathcal{P} .
 Por lo que acabamos de ver, cualquier tensor $\binom{r}{s}$ puede expresarse como

$$T = T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s} \bar{E}_{b_1} \otimes \dots \otimes \bar{E}_{b_r} \otimes \tilde{E}^{a_1} \otimes \dots \otimes \tilde{E}^{a_s}$$

donde los componentes $T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$ se obtienen como

$$T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s} = T(\bar{E}_{a_1}, \dots, \bar{E}_{a_s}; \tilde{E}^{b_1}, \dots, \tilde{E}^{b_r})$$

Vemos que $\mathbb{T}_s^r(\mathcal{P})$ es un producto tensorial de espacios:

$$\mathbb{T}_s^r(\mathcal{P}) = \underbrace{\mathbb{T}_{\mathcal{P}} \otimes \dots \otimes \mathbb{T}_{\mathcal{P}}}_{r \text{ factores}} \otimes \underbrace{\mathbb{T}_{\mathcal{P}}^* \otimes \dots \otimes \mathbb{T}_{\mathcal{P}}^*}_{s \text{ factores}}$$

Dimensión: como cada factor tiene dimensión m , la dimensión de $\mathbb{T}_s^r(\mathcal{P})$ es m^{r+s} . En efecto, cada tensor está caracterizado por m^{r+s} componentes $T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$.

► Transformación de las componentes ante cambio de base

$$\bar{E}_b = \Lambda^b_{b'} \bar{E}_{b'}, \quad \tilde{E}^a = \Lambda^a_{a'} \tilde{E}^{a'}, \quad \text{entonces}$$

$$T^{b'_1 \dots b'_r}_{a'_1 \dots a'_s} = \Lambda^{b'_1}_{b_1} \dots \Lambda^{b'_r}_{b_r} \Lambda^{a_1}_{a'_1} \dots \Lambda^{a_s}_{a'_s} T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$$

► Contracción de índices: es una operación que consiste en igualar uno de los índices superiores (o contravariantes) con uno de los índices inferiores (o covariantes) y sumar las componentes que así resultan. Veamos que

la contracción de índices produce un tensor de tipo $\binom{r-1}{s-1}$. Por ejemplo, si en la expresión anterior contraemos el último índice contravariante con el primero covariante resulta

$$T^{b_1 \dots a_1}_{a_1 \dots a_s} = \Lambda^{b_1}_{b_1} \dots \Lambda^{a_1}_{b_r} \Lambda^{a_1}_{a_1} \dots \Lambda^{a_s}_{a_s} T^{b_1 \dots b_r}_{a_1 \dots a_s}$$

$\delta^{a_1}_{b_r}$

Entonces

$$T^{b_1 \dots a_1}_{a_1 \dots a_s} = \underbrace{\Lambda^{b_1}_{b_1} \dots \Lambda^{b_{r-1}}_{b_{r-1}}}_{r-1 \text{ factores}} \underbrace{\Lambda^{a_2}_{a_2} \dots \Lambda^{a_s}_{a_s}}_{s-1 \text{ factores}} T^{b_1 \dots a_1}_{a_1 \dots a_s}$$

que es la ley de transformación de un tensor $\binom{r-1}{s-1}$. Como vemos, la contracción está bien definida porque las componentes del tensor se refieren a bases duales.

Ejemplos:

1) Las componentes de un tensor $\binom{0}{2}$ se transforman según

$$T_{a'b'} = \Lambda^{a'}_{a'} \Lambda^{b'}_{b'} T_{ab} \quad \text{ó} \quad T_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_{ij}$$

2) si T^{ab}_{cde} son las componentes de un tensor $\binom{2}{3}$ entonces T^{ab}_{cbe} son componentes de un tensor $\binom{1}{2}$

3) $T^{ab}_{cde} A^{fg}$ es un tensor $\binom{4}{3}$ (producto tensorial), y

$T^{ab}_{cde} A^{fc}$ es un tensor $\binom{3}{2}$ (contracción).

$T^{ab}_{cde} A^{fd}$ es otro tensor $\binom{3}{2}$, salvo si existe una simetría $T^{ab}_{cde} = T^{ab}_{dce}$ entre las componentes del tensor T .

▶ **Entradas simétricas:** dos ranuras del mismo tipo se dicen simétricas si la máquina lineal es indiferente al intercambio de los argumentos de esas ranuras. Por ejemplo, si T es de tipo $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T(\tilde{\epsilon}, \tilde{\omega}, \tilde{\eta}) = T(\tilde{\epsilon}, \tilde{\eta}, \tilde{\omega}), \quad \forall \tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}$$

entonces la segunda y tercera ranuras son simétricas. En componentes queda:

$$T^{abc} \epsilon_a \omega_b \eta_c = T^{abc} \epsilon_a \eta_b \omega_c \quad \forall \tilde{\omega}, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}$$

$$\underbrace{T^{abc} \epsilon_a \eta_b \omega_c}_{T^{acb} \epsilon_a \eta_c \omega_b} \quad (;\text{son índices mudos!})$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{abc} = T^{acb}}$$

▶ **Entradas antisimétricas:** dos ranuras del mismo tipo se dicen antisimétricas si el resultado de la máquina lineal cambia de signo ante el intercambio de los argumentos de esas ranuras. Por ejemplo, si T es de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T(\tilde{\epsilon}; \tilde{v}, \tilde{u}) = -T(\tilde{\epsilon}; \tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{\epsilon}, \tilde{u}, \tilde{v}$$

En componentes queda

$$T^a{}_{bc} \epsilon_a v^b u^c = - \underbrace{T^a{}_{bc} \epsilon_a u^b v^c}_{T^{ac}{}_{cb} \epsilon_a u^c v^b}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^a{}_{bc} = -T^a{}_{cb}}$$

A partir de un tensor cualquiera podemos definir nuevos tensores simetrizando o antisimetrizando grupos de índices del mismo tipo. Estas operaciones se indican con $()$ y $[\]$ respectivamente. Por ejemplo:

$$T \dots (ab) \dots \equiv \frac{1}{2} \left(T \dots ab \dots + T \dots ba \dots \right)$$

$$T \dots [ab] \dots \equiv \frac{1}{2} \left(T \dots ab \dots - T \dots ba \dots \right)$$

Ejercicio: probar que las cantidades anteriores transforman como componentes de un tensor.

En general, si simetrizamos o antisimetrizamos un grupo de p índices del mismo tipo, habrá que combinar $p!$ términos que corresponden a las $p!$ permutaciones de estos índices. En la simetrización todos los términos se combinan con signo positivo, y el resultado se divide por $p!$.

En la antisimetrización cada término se combina con signo positivo o negativo según si proviene de una permutación par o impar de los índices; el resultado se divide por $p!$. Por ejemplo:

$$T \dots [abc] \dots = \frac{1}{6} \left(T \dots abc \dots - T \dots acb \dots + T \dots bca \dots - T \dots bac \dots + T \dots cba \dots - T \dots cab \dots \right)$$

$T \dots a_1 \dots a_s$ se dice totalmente simétrico en sus índices covariantes si $T \dots a_1 \dots a_s = T \dots (a_1 \dots a_s)$. Análogamente para el caso antisimétrico.

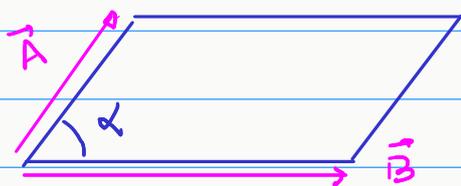
Ejercicios:

i) Mostrar que $T^{\dots ab\dots} = T^{\dots (ab)\dots} + T^{\dots [ab]\dots}$

ii) Si $S^{\dots ab\dots} = S^{\dots ba\dots}$ y $A^{\dots ab\dots} = -A^{\dots ba\dots}$
 mostrar que $S^{\dots ab\dots} A^{\dots ab\dots} = 0$

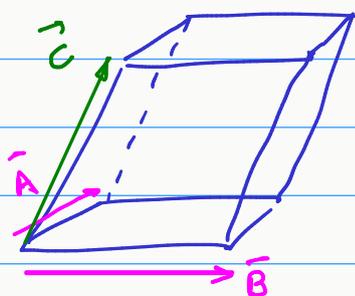
iii) Si $S^{\dots abc\dots} = S^{\dots (abc)\dots}$, entonces para cualquier T vale que
 $S^{\dots abc\dots} T^{\dots abc\dots} = S^{\dots abc\dots} T^{\dots (abc)\dots}$
 (idem para el caso antisimétrico)

► Áreas y volúmenes: No tenemos aún nociones de área y volumen en una variedad. Si recurrimos a las nociones respectivas en espacios euclidianos vemos que las mismas se vinculan a máquinas lineales completamente antisimétricas,



Área = base x altura = $|\vec{A} \times \vec{B}|$

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$



Volumen = $|\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})|$

$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B})$
 $= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$

Esto nos motiva a dedicar especial atención a los tensores $\binom{0}{p}$ totalmente antisimétricos.

p-formas

- ▶ Llamamos p-formas a los tensores $\binom{0}{p}$ totalmente antisimétricos. Decimos que p es el grado de la forma.
- ▶ Como las componentes que tienen dos índices iguales deben anularse, las únicas componentes no nulas tendrán todos los índices distintos; por lo tanto debe ser $p \leq m$.
- ▶ La dimensión del espacio de p-formas es igual al número de componentes independientes que éstas pueden tener. Esto es igual al número de maneras de elegir p índices distintos entre m, pues las distintas componentes que comparten los mismos índices en distinto orden están ligadas por la antisimetría. La dimensión entonces es $\binom{m}{p}$.

Ejemplos:

i) Las 0-formas son las funciones $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

ii) El espacio de m-formas tiene dimensión 1. La única componente independiente de una m-forma $\tilde{\omega}$ es $\omega_{12\dots m}$. Las restantes se obtienen por antisimetría.

Para comenzar, consideremos una 2-forma en una variedad de dimensión 2:

$$\tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 + \omega_{21} \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1 = \omega_{12} (\tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 - \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1)$$

$$\hookrightarrow \omega_{21} = -\omega_{12}$$

La expresión obtenida muestra que es útil definir el producto tensorial totalmente antisimetrizado o producto "wedge" entre 1-formas:

$$\boxed{\tilde{\epsilon} \wedge \tilde{\eta} \doteq \tilde{\epsilon} \otimes \tilde{\eta} - \tilde{\eta} \otimes \tilde{\epsilon}} \implies \boxed{\tilde{\epsilon} \wedge \tilde{\eta} = -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\epsilon}}$$

$\tilde{\epsilon}, \tilde{\eta}$ son 1-formas

que es un producto asociativo:

$$(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) \wedge \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma} - \tilde{\beta} \otimes \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\gamma} + \dots, \text{ (3! términos)}$$

El ejemplo anterior muestra que una p-forma cualquiera se escribe

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega_{|a_1 \dots a_p|} \tilde{E}^{a_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{a_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \dots a_p} \tilde{E}^{a_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{a_p} \end{aligned}$$

donde $\omega_{a_1 \dots a_p} = \omega_{[a_1 \dots a_p]}$ son las componentes de $\tilde{\omega}$.

Las barras verticales en la primera línea significa que la suma se extiende sólo a los términos tales que $a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Por ejemplo, para una 2-forma en 2 dimensiones es

$$\tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 + \omega_{21} \tilde{E}^2 \wedge \tilde{E}^1)$$

Si no usamos las barras verticales repetiremos $p!$ veces cada término de la suma; de ahí que sea necesario dividir por $p!$. Pero este factor no es parte del valor de la componente. Para convencernos, calculemos el

valor de una componente saturando las entradas de la p-forma con los elementos de la base. En el ejemplo de la 2-forma la componente 21 es

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \tilde{\omega}(\bar{E}_2, \bar{E}_1) = \omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2(\bar{E}_2, \bar{E}_1) = \omega_{12} (\tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 - \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1)(\bar{E}_2, \bar{E}_1) \\ &= \omega_{12} \left(\underbrace{\tilde{E}^1(\bar{E}_2)}_0 \underbrace{\tilde{E}^2(\bar{E}_1)}_0 - \underbrace{\tilde{E}^2(\bar{E}_2)}_1 \underbrace{\tilde{E}^1(\bar{E}_1)}_1 \right) = -\omega_{12} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Si $\tilde{\omega}$ es una p-forma y $\tilde{\eta}$ es una q-forma entonces

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = (-1)^{pq} \tilde{\eta} \wedge \tilde{\omega}$$

En particular,

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0 \quad \text{si } \tilde{\omega} \text{ es de grado impar}$$

Demostración)

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \omega_{|i_1 \dots i_p|} \eta_{|j_1 \dots j_q|} \tilde{E}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{i_p} \wedge \tilde{E}^{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{j_q}$$

Para construir $\tilde{\eta} \wedge \tilde{\omega}$ los últimos q factores \tilde{E}^i deben pasar adelante, atravesando los primeros p factores \tilde{E}^i . Son p·q permutaciones, y cada una de ellas produce un cambio de signo.

Ejercicio: calculemos el producto wedge entre una 1-forma y una 2-forma, y expresemos las componentes de la 3-forma resultante.

$\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a$ es una 1-forma de componentes ω_a

$\tilde{\eta} = \frac{1}{2} \eta_{bc} \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$ es una 2-forma de componentes η_{bc}

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \frac{1}{2} \omega_a \eta_{bc} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c = \frac{1}{3!} \left(\frac{3!}{2} \right) \omega_{[a} \eta_{bc]} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$$

sólo la parte antisimétrica contribuye a la suma

$$\Rightarrow (\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{abc} = 3 \omega_{[a} \eta_{bc]}$$

En general, para una p-forma $\tilde{\omega}$ y una q-forma $\tilde{\eta}$ es

$$(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{a_1 \dots a_{p+q}} = \binom{p+q}{p} \omega_{[a_1 \dots a_p} \eta_{a_{p+1} \dots a_{p+q}]}$$

pues habrá que multiplicar y dividir por $(p+q)!$ para aislar la componente.

Ejemplo del ejercicio anterior: $\tilde{\omega} = 7 \tilde{d}x - 5 \tilde{d}y$, $\tilde{\eta} = 13 \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z$

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = 7 \times 13 \underbrace{\tilde{d}x \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z}_0 - 5 \times 13 \tilde{d}y \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z = 65 \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$$

$$(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{123} = 65$$

Comparemos con $(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{123} = 3 \omega_{[1} \eta_{23]} = \frac{3}{3!} (\omega_1 \overset{0}{\eta_{23}} - \omega_1 \overset{0}{\eta_{32}} + \omega_2 \eta_{31} - \omega_2 \eta_{13} + \omega_3 \overset{0}{\eta_{12}} - \omega_3 \overset{0}{\eta_{21}}) = -\frac{3 \cdot 2}{3!} \omega_2 \eta_{13} = 65 \checkmark$

7 Derivada exterior. Formas cerradas y exactas. Lema de Poincaré

Los tensores son objetos geométricos. Son máquinas lineales que se aplican a vectores y 1-formas para dar números que son independientes de la carta o de la base elegida para hacer el cálculo correspondiente.

Queremos definir una derivación de tensores que preserve su carácter de objeto geométrico. Veremos que, en general, esto no es posible a menos que dotemos la variedad con una estructura adicional para lograr ese objetivo. Sin embargo, es posible definir un cálculo diferencial e integral de p-formas sin más estructura que aquella que es propia de una variedad diferenciable.

► Derivada exterior de p-formas: habíamos definido un operador d que se aplica a una función f (una 0-forma) para dar la 1-forma $\tilde{d}f$:

$$d: \Pi^0 \rightarrow \Pi^1 \text{ tal que } \tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tilde{d}x^i$$

Podemos generalizarlo a p-formas de la siguiente manera:

$$d: \Pi_p^0 \rightarrow \Pi_{p+1}^0$$

Dada una p-forma $\tilde{\omega} = \frac{1}{p!} \omega_{jk\dots l} \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^l$

Definimos la (p+1)-forma

$$\tilde{d}\omega = \frac{1}{p!} \partial_i \omega_{jk\dots l} \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^l$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} \underbrace{\left\{ (p+1) \partial_{[i} \omega_{jk\dots l]} \right\}}_{\text{Componentes}} \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^l$$

Una definición operativa, como la dada para $\tilde{\omega}$, NO es satisfactoria mientras no se demuestre que el objeto así definido se comporta como una $(p+1)$ -forma, cosa que haremos enseguida.

Ejemplo: sea la 1-forma $\tilde{A} = A_j \tilde{dx}^j$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{dA} &= \partial_i A_j \tilde{dx}^i \wedge \tilde{dx}^j = \partial_i A_j (\tilde{dx}^i \otimes \tilde{dx}^j - \tilde{dx}^j \otimes \tilde{dx}^i) \\ &= (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \tilde{dx}^i \otimes \tilde{dx}^j \end{aligned}$$

lo que muestra que los componentes de \tilde{dA} son $\partial_i A_j - \partial_j A_i$. Este resultado se obtiene también así:

$$\tilde{dA} = \partial_i A_j \tilde{dx}^i \wedge \tilde{dx}^j = \frac{1}{2} \underbrace{\{ 2 \partial_{[i} A_{j]} \}}_{\text{Componentes}} \tilde{dx}^i \wedge \tilde{dx}^j$$

$$(\tilde{dA})_{ij} = 2 \partial_{[i} A_{j]} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

Si \tilde{A} es el cuadripotencial electromagnético (en $n=4$) entonces la 2-forma $\tilde{F} = \tilde{dA}$ es el tensor de campo electromagnético.

Para ver que la definición operativa de $\tilde{\omega}$ da por resultado un objeto geométrico, demostraremos que la definición es independiente de la carta. Por simplicidad lo veremos para el caso $p=1$, pero el procedimiento es fácilmente generalizable a valores superiores de p .

► Demostración: $\partial \omega \Rightarrow \tilde{\omega} = \omega_j \tilde{d}x^j = \omega_j \tilde{d}x^{i'}$

Entonces

$$\begin{aligned} \partial_{i'} \omega_j \tilde{d}x^{i'} \wedge \tilde{d}x^{j'} &= \partial_{i'} \left(\omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \right) \tilde{d}x^{i'} \wedge \tilde{d}x^{j'} = \\ &= \left(\underbrace{\partial_{i'} \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}}_{\substack{\text{antisimétrico en } i'j'}} + \omega_j \underbrace{\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{i'}}}_{\substack{\text{simétrico en } i'j'}} \right) \tilde{d}x^{i'} \wedge \tilde{d}x^{j'} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \partial_{i'} \omega_j \tilde{d}x^{i'} \wedge \tilde{d}x^{j'} = \partial_i \omega_j \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j \quad \checkmark \end{aligned}$$

Vemos que el resultado es tensorial gracias a que restringimos la derivación a tensores totalmente antisimétricos.

► Ejemplos:

1) Sea una 1-forma $\tilde{\omega}$ en una variedad de $m=3$ dimensiones

$$\tilde{\omega} = \omega_x \tilde{d}x + \omega_y \tilde{d}y + \omega_z \tilde{d}z$$

$$\tilde{d}\tilde{\omega} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \underbrace{\tilde{d}x \wedge \tilde{d}x}_0 + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \tilde{d}y \wedge \tilde{d}x + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \tilde{d}z \wedge \tilde{d}x$$

$$+ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \underbrace{\tilde{d}y \wedge \tilde{d}y}_0 + \dots$$

$$+ \dots$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) \tilde{d}x \wedge \tilde{d}z + \dots$$

En este caso $\tilde{d}\tilde{\omega}$ se asocia con la noción de **rotor**. Pero no es un vector sino una 2-forma.

2) Sea una 2-forma $\tilde{\omega}$ en una variedad de $m=3$ dimensiones

$$\tilde{\omega} = \omega_{xy} \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} + \omega_{xz} \tilde{dx} \wedge \tilde{dz} + \omega_{yz} \tilde{dy} \wedge \tilde{dz}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}\tilde{\omega} &= \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} \tilde{dz} \wedge \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} + \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y} \tilde{dy} \wedge \tilde{dx} \wedge \tilde{dz} + \\ &+ \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} \wedge \tilde{dz} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} \right) \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} \wedge \tilde{dz}$$

(Note: A green circle highlights the term $-\frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y}$ with an arrow pointing to $-\omega_{zx}$ above it.)

En este caso $\tilde{d}\tilde{\omega}$ se asocia con la noción de **divergencia**. Pero no es un escalar sino una 3-forma.

► **Nilpotencia de la derivada exterior:** se satisface que

$$d^2 \equiv d \circ d \equiv 0$$

Por ejemplo:

$$d^2 f = d \left(\partial_j f \tilde{dx}^j \right) = \underbrace{\partial_i \partial_j f}_{\text{simétrico}} \underbrace{\tilde{dx}^i \wedge \tilde{dx}^j}_{\text{antisimétrico}} = 0$$

De acuerdo a los ejemplos anteriores, la nilpotencia abarca propiedades

como **rot (grad) $\equiv 0$** , **div (rot) $\equiv 0$** .

Otras propiedades:

$$i) d(\tilde{\omega} + \tilde{\eta}) = d\tilde{\omega} + d\tilde{\eta}$$

$$ii) d(fg) = f d\tilde{g} + g d\tilde{f}$$

$$iii) d(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}) = d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} + (-1)^p \tilde{\omega} \wedge d\tilde{\eta} \quad \tilde{\omega} \text{ es una } p\text{-forma}$$

El $(-1)^p$ aparece porque en la derivación de los componentes de $\tilde{\eta}$ en el miembro izquierdo, $\partial_i \eta_{jk\dots} \tilde{dx}^i$, el factor \tilde{dx}^i debe atravesar los p factores \tilde{dx}^l asociados a $\tilde{\omega}$, para así construir el segundo término del miembro derecho.

Como puede verse, la derivada exterior de p -formas tiene las propiedades esperadas para una derivación: linealidad y regla de Leibniz.

Formas exactas y cerradas

i) una p -forma se dice exacta si se puede escribir como la derivada exterior de una $(p-1)$ -forma:

$$\tilde{\alpha} \text{ es exacta} \Rightarrow \tilde{\alpha} = d\tilde{\beta}$$

ii) una p -forma se dice cerrada si su derivada exterior se anula:

$$\tilde{\alpha} \text{ es cerrada} \Rightarrow d\tilde{\alpha} = 0$$

Toda p -forma exacta es también cerrada, debido a la nilpotencia de d .
La cuestión inversa es más interesante.

Supongamos que un conjunto de ecuaciones diferenciales fue condensado en una única ecuación entre p -formas,

$$\tilde{d}\tilde{\omega} = \tilde{\eta}$$

donde $\tilde{\omega}$ es una $(p-1)$ -forma incógnita. Una ecuación así podría tratarse de la relación entre un campo $\tilde{\omega}$ y su fuente $\tilde{\eta}$; o entre un potencial $\tilde{\omega}$ y su respectivo campo $\tilde{\eta}$. La nilpotencia de \tilde{d} implica que para que la ecuación tenga solución es condición necesaria que $\tilde{\eta}$ sea cerrada; en efecto

$$\tilde{d}\tilde{\omega} = \tilde{\eta} \Rightarrow \tilde{d}\tilde{\eta} = \tilde{d}\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$$

Aun si la condición necesaria se cumple, no hay garantía de que exista la solución. La solución $\tilde{\omega}$ existe si la forma cerrada $\tilde{\eta}$ es además exacta.

► $\tilde{\omega}$ no es única: $\tilde{\omega} + \tilde{d}\tilde{\alpha}$ es también solución \forall $(p-2)$ -forma $\tilde{\alpha}$.

Ejemplo: $p=1$, $n=2$

segn las ecuaciones $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \eta_x$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \eta_y$

que se resumen en $\tilde{d}f = \tilde{\eta}$

La condición necesaria para que exista solución f es $\tilde{d}\tilde{\eta} = 0 = \tilde{d}(\eta_x \tilde{d}x + \eta_y \tilde{d}y) = \left(\frac{\partial \eta_y}{\partial x} - \frac{\partial \eta_x}{\partial y}\right) \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \eta_y}{\partial x} = \frac{\partial \eta_x}{\partial y}}$$

que corresponde a la igualdad de las derivadas cruzadas de f

¿Es suficiente que $\tilde{\eta}$ sea cerrada para que resulte también exacta? (es decir, para que nuestra ecuación diferencial tenga solución).

Puede sorprender que esta cuestión involucre la topología global de la variedad. En efecto, la respuesta es **SÍ localmente**. Pero la existencia de una solución global depende de la topología global de la variedad.

Pongamos esta cuestión en términos más familiares:

El campo $\vec{B} = \frac{a}{r} \hat{\theta}$ está definido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

y tiene $\nabla \times \vec{B} = 0$ (es el campo magnético de un hilo)

Que el rotor de un gradiente se anule siempre no significa que el campo irrotacional \vec{B} se pueda escribir como $\vec{B} = \nabla \phi$ para un potencial escalar ϕ ("que $\tilde{\eta}$ sea cerrada no significa que sea exacta").

Si suponemos que podemos escribir $\vec{B} = \nabla \phi$ entonces tendríamos

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + cte = a\theta + cte$$

$\uparrow \int dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$

Pero θ no es una función univaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Así el potencial ϕ sólo puede ser definido localmente en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para tener solución global hay que cambiar la topología global de la variedad.



Esto noquita que para otros campos sí exista un potencial escalar bien definido en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Por ejemplo, el campo eléctrico de una carga puntual $\vec{E} = \frac{a}{r^2} \hat{r}$ cumple que $\nabla \times \vec{E} = 0$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, y está asociado al potencial $\phi = -\frac{a}{r} + cte.$

Un ejemplo aún más simple: si $n=1$ cualquier 1-forma es cerrada (no hay 2-formas en $n=1$); ¿Es también globalmente exacta?

Sea $\tilde{d}f = x \tilde{d}x \Rightarrow f = \frac{x^2}{2} + cte$ (localmente)

Si M fuera un anillo f no estaría globalmente bien definida.

▶ **Cohomología:** estudia las propiedades topológicas globales de la variedad que determinan las relaciones entre formas exactas y cerradas.

▶ **Lema de Poincaré**

Para algunos autores el lema de Poincaré es la propiedad $d(\tilde{d}\omega) = 0$, y llaman "lema de Poincaré inverso" a lo que sigue.

En un entorno contraíble a un punto, una solución particular de $\tilde{d}\omega = \tilde{\eta}$ es

$$\omega_{j\dots k}(x^1, \dots, x^m) = \int_0^1 t^{p-1} \eta_{ij\dots k}(tx^1, \dots, tx^m) x^i dt$$

donde p es el grado de $\tilde{\eta}$.

Esto significa que la solución global existe cuando la variedad entera es contraíble a un punto.

Nótese que el argumento de $\tilde{\eta}$ en el integrando va al origen cuando $t \rightarrow 0$.

Ejercicio: demostrar la expresión anterior para el caso $p=1$ (ayuda: no olvidar utilizar que $\tilde{\eta}$ debe ser cerrada). Ver solución en las últimas hojas.

Ejemplo: sea $\tilde{\omega} = y \tilde{d}x + x \tilde{d}y$ en $m=2$

entonces $\omega = \int_0^1 (t y x + t x y) dt = xy$

► Definición: un conjunto de m 1-formas linealmente independientes,

$$\tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\alpha}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^m \neq 0,$$

se dice "cerrado" si

$$\tilde{d}\tilde{\alpha}^k \wedge \tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\alpha}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^m = 0 \quad \forall k$$

► Teorema de Frobenius: $\{\tilde{\alpha}^i\}_{i=1, \dots, m}$ es cerrado si y sólo si existen funciones $\{P_j^i, Q^i\}$ tales que

$$\tilde{\alpha}^i = \sum_{j=1}^m P_j^i \tilde{d}Q^j \quad \forall i$$

Esta es una de las varias formas en las que se presenta este teorema, y es útil para el caso en que un sistema de ecuaciones diferenciales puede reformularse como la anulaci3n de m 1-formas independientes $\tilde{\alpha}^i$. Si el sistema es cerrado entonces tiene soluci3n, pues las ecuaciones se satisfacen sobre la subvariedad donde las Q^i son constantes.

► Ejemplo: las ecuaciones para las l3neas de campo de $\bar{V}(x) = v^i(x) \partial_i$ son

$$\frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} = v^i(x) \quad i=1, \dots, m$$

que pueden verse como la anulación de m 1-formas linealmente independientes $\tilde{\alpha}^i = \tilde{d}x^i - v^i(x) \tilde{d}\lambda$ en un espacio de $m+1$ dimensiones con coordenadas x^i, λ .

El conjunto $\{\tilde{\alpha}^i\}$ es cerrado pues las $\tilde{d}x^i$ son 2-formas; luego $\tilde{d}\tilde{\alpha}^k \wedge \tilde{\alpha}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^m$ sería una $(m+2)$ -forma, que se anula automáticamente en un espacio de dimensión $m+1$.

Por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene solución.

► Ejemplo: si $m=1$ el teorema queda: $\tilde{U} \wedge \tilde{d}\tilde{U} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = P \tilde{d}Q$

En dimensión $m=2$ siempre resulta $\tilde{U} \wedge \tilde{d}\tilde{U} = 0$ (no hay 3-formas)

Entonces en $m=2$ toda 1-forma \tilde{U} se puede escribir como

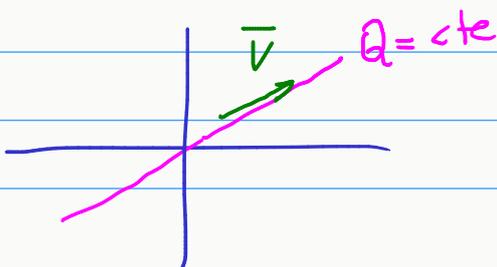
$$\tilde{U} = P \tilde{d}Q \quad (\text{en } m=2)$$

Por ejemplo, el campo de velocidades de una rotación rígida

$$\tilde{U} = \Omega (-y \tilde{d}x + x \tilde{d}y)$$

$$\Rightarrow P = \Omega x^2, \quad Q = \frac{y}{x}$$

¿Qué significa que \tilde{U} se anula sobre el subespacio $Q = \text{cte}$?



\tilde{U} se anula cuando se aplica a un vector tangente a ese subespacio. Esos vectores son radiales mientras que \tilde{U} "es azimutal".

La anulaci3n de $\tilde{\nu}$ sobre las rectas $Q = \text{cte}$, es decir $y = \text{cte } x$, implica la soluci3n de la ecuaci3n $-y dx + x dy = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = \text{cte } x$$

► Soluci3n del Ejercicio. Queremos ver que $\tilde{d}\omega = \tilde{\eta}$; entonces derivemos la 0-forma ω :

$$\omega = \int_0^1 [\eta_1(tx, ty) x + \eta_2(tx, ty) y] dt$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \int_0^1 \left\{ \eta_1(tx, ty) + \left[\frac{\partial \eta_1(x, y)}{\partial x} x \right]_{\substack{x=tx \\ y=ty}} + \left[\frac{\partial \eta_2(x, y)}{\partial x} y \right]_{\substack{x=tx \\ y=ty}} \right\} dt$$

Ahora usemos que $\tilde{\eta}$ es cerrada: $\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$

Entonces

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \eta_1(tx, ty)] dt = [t \eta_1(tx, ty)]_0^1 = \eta_1(x, y)$$

Del mismo modo es $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \eta_2(x, y)$

Entonces $\tilde{d}\omega = \tilde{\eta}$ ✓

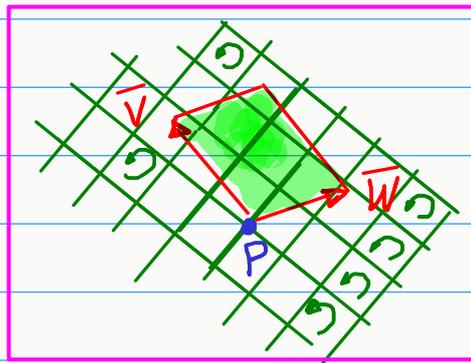
8 Integración. Teorema de Stokes

► Representación gráfica de una 2-forma. Nociones de área y volumen

Una 2-forma $\tilde{\alpha}$ es una máquina lineal que toma dos vectores \bar{v} , \bar{w} para dar un número. Si los vectores son linealmente dependientes el resultado es nulo.

En $m=2$ una 1-forma se representa mediante líneas paralelas en el plano tangente (o hiperplanos paralelos en dimensión arbitraria). Una 2-forma se representa mediante una cuadrícula (o hipertubos, en dimensión arbitraria)

El valor de $\tilde{\alpha}(\bar{v}, \bar{w})$ corresponde al número de celdas abarcadas por el paralelogramo formado por los vectores:



$\tilde{\alpha}(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow$ cantidad de celdas abarcadas por el paralelogramo

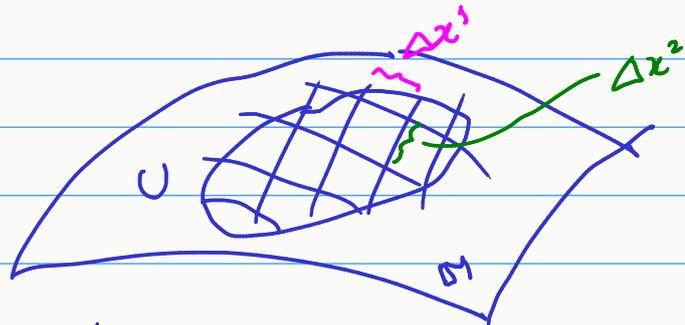
Se cumple la linealidad: $\tilde{\alpha}(\lambda \bar{v}, \bar{w}) = \lambda \tilde{\alpha}(\bar{v}, \bar{w})$ en ambos argumentos. El giro σ sirve para determinar el signo de $\tilde{\alpha}(\bar{v}, \bar{w})$ y satisfacer la antisimetría $\tilde{\alpha}(\bar{v}, \bar{w}) = -\tilde{\alpha}(\bar{w}, \bar{v})$.

Vemos que una 2-forma introduce una noción de área en una variedad de 2 dimensiones. Del mismo modo cada n-forma se asocia con una noción de volumen n-dimensional.

La introducción de una métrica seleccionará un volumen natural.

► Integración en una variedad diferenciable

La idea que una n-forma es una noción de volumen nos pone en el camino de definir el cálculo integral en una variedad diferenciable. Para reforzar esta idea, consideremos una región U de la variedad que es cubierta por una carta $\{x^i\}$. Podemos dividir la región U en celdas infinitesimales de lados Δx^i tomados sobre las líneas coordenadas:



Las diferencias de coordenadas Δx^i no se comportan como componentes de vectores, pero sí lo hacen si son infinitesimales: $\Delta x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Delta x^i$ cuando $\Delta x^i \rightarrow 0$. Dado un campo de n-formas $\tilde{\omega}$ podemos evaluarlo en n vectores infinitesimales tangentes a las líneas coordenadas, definidos en cada punto de la región U como

$$\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \Delta x^m \frac{\partial}{\partial x^m}$$

Entonces obtenemos

$$\tilde{\omega} \left(\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \Delta x^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \omega_{12\dots m} \Delta x^1 \Delta x^2 \dots \Delta x^m$$

que podemos verlo como un volumen de la celda respectiva en la variedad, definido a través de la n-forma $\tilde{\omega}$. Todo esto sirve de preámbulo para definir la integral de una n-forma en una región de la variedad como

$$\int_U \tilde{\omega} = \int \omega_{12\dots m}(x) dx^1 dx^2 \dots dx^m \in \mathbb{R}$$

esta integral se realiza en \mathbb{R}^m , en el recinto $\varphi(U)$

De esta manera el cálculo integral sobre \mathcal{M} se reduce al cálculo integral sobre \mathbb{R}^m . Para que esta definición operativa sea aceptable debemos probar su carácter geométrico, es decir la independencia de la definición de la carta elegida para cubrir la región U . Lo esencial de la demostración es que la componente de un n-forma se transforma con el Jacobiano del cambio de coordenadas. Veámoslo en $m = 2$:

Consideremos el cambio de carta $\{x^1, x^2\} \rightarrow \{y^1, y^2\}$

$$\text{Entonces } \tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \omega_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \tilde{dy}^1 + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \tilde{dy}^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \tilde{dy}^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \tilde{dy}^2 \right)$$

$$= \omega_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right) \tilde{dy}^1 \wedge \tilde{dy}^2 = \omega_{12} J \tilde{dy}^1 \wedge \tilde{dy}^2$$

Es decir que

$$\omega_{1'2'} = J \omega_{12}$$

En lenguaje corriente se dice que $\omega_{12\dots m}$ es una "densidad".

Entonces si calculamos $\int \tilde{\omega}$ usando la carta $\{y^1, y^2\}$,

$$\int \tilde{\omega} = \underbrace{\int \omega_{1'2'} dy^1 dy^2}_{\text{en } \mathbb{R}^2} = \underbrace{\int \omega_{12} J dy^1 dy^2}_{\text{en } \mathbb{R}^2}$$

Del cálculo integral en \mathbb{R}^m sabemos que

$$J dy^1 dy^2 = dx^1 dx^2$$

Por lo tanto $\int \tilde{\omega}$ es independiente de la carta. ✓

En realidad podría ocurrir un cambio de signo si J fuese negativo. Esto se solucionaría con una permutación impar del ordenamiento de las coordenadas nuevas, evitando así pasar de una base "derecha" a una base "izquierda". Lo usual es definir una orientación en U y usar sólo bases derechas:

► Dada una n -forma $\tilde{\omega}$ continua y no nula, decimos que una base $\{\bar{E}_a\}$ es derecha respecto de $\tilde{\omega}$ en la región U si $\tilde{\omega}(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) > 0 \quad \forall P \in U$.

La integración así definida puede extenderse a todo M si M es orientable (es decir, si una terna derecha puede definirse continuamente en todo M).

(de Rham extendió la integración a variedades no orientables, como la cinta de Moebius).

► Una p -forma se integra en una subvariedad de dimensión p . Para ello la p -forma se "restringe" a la subvariedad. La p -forma restringida actúa sólo sobre vectores tangentes a la subvariedad.

Por ejemplo, para integrar una 1-forma $\tilde{\omega}$ sobre una curva \mathcal{C} cuyo vector tangente es $d/d\lambda$ es esencial saber qué "volumen" le otorga $\tilde{\omega}$ a una celda $\Delta\lambda$. Para ello hay que aplicar $\tilde{\omega}$ al vector $\Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}$:

$$\tilde{\omega}\left(\Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\right) = \Delta\lambda \tilde{\omega}\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \Delta\lambda \alpha_i \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}$$

donde $x^i(\lambda)$ son las ecuaciones paramétricas de \mathcal{C} .

Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \tilde{\omega} = \int_{\varphi(\mathcal{C})} \alpha_i \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$$

es el "trabajo"

Podemos decir que

$$\tilde{\omega}|_{\mathcal{C}} = \alpha_i \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \tilde{d}\lambda = \tilde{\omega}\left(\frac{d}{d\lambda}\right) \tilde{d}\lambda$$

donde $\tilde{d}\lambda$ es una 1-forma definida sobre la subvariedad \mathcal{C} , y es tal que $\tilde{d}\lambda(d/d\lambda) = d\lambda/d\lambda = 1$. Cualquier vector tangente a \mathcal{C} tiene la forma $\bar{v} = v(\lambda) d/d\lambda$, por lo tanto $\tilde{\alpha}|_{\mathcal{C}}(\bar{v}) = v(\lambda) \alpha_i \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}$.

Asimismo una 2-forma se integra en una subvariedad S de 2 dimensiones. Parametrizamos la subvariedad con dos parámetros λ, μ , que actúan como coordenadas sobre la subvariedad. Como sucede sobre una curva \mathcal{C} , los respectivos vectores $\partial/\partial\lambda$, $\partial/\partial\mu$, tangentes a cada línea coordenada en cada punto de la subvariedad, resultan de derivar las ecuaciones paramétricas de la superficie S , $x^i = x^i(\lambda, \mu)$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial x^i(\lambda, \mu)}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{\partial x^i(\lambda, \mu)}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial x^i}$$



El "volumen" que $\tilde{\alpha}$ otorga a la celda definida por los vectores $\Delta\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}$, $\Delta\mu \frac{\partial}{\partial\mu}$ es

$$\tilde{\alpha}\left(\Delta\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}, \Delta\mu \frac{\partial}{\partial\mu}\right) = \Delta\lambda \Delta\mu \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial x^i}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial\mu} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Delta\lambda \Delta\mu \alpha_{|ij|} \left(\frac{\partial x^i}{\partial\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial\mu} - \frac{\partial x^j}{\partial\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial\mu}\right)$$

Entonces

$$\int_S \tilde{\alpha} = \int_{\varphi(S)} \alpha_{|ij|} \left(\frac{\partial x^i}{\partial\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial\mu} - \frac{\partial x^j}{\partial\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial\mu}\right) d\lambda d\mu$$

La 2-forma $\tilde{\alpha}$ restringida a S es $\tilde{\alpha}|_S = \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\mu}\right) \tilde{d}\lambda \wedge \tilde{d}\mu$, donde $\tilde{d}\lambda$ y $\tilde{d}\mu$ son 1-formas definidas sobre S tales que $\tilde{d}\lambda(\partial/\partial\lambda) = 1$, $\tilde{d}\lambda(\partial/\partial\mu) = 0 = \tilde{d}\mu(\partial/\partial\lambda)$, $\tilde{d}\mu(\partial/\partial\mu) = 1$.

► Nótese que una 0-forma f no puede ser integrada a menos que se la multiplique por una p -forma, en cuyo caso se integrará en una subvariedad de dimensión p .

▶ La orientación de una subvariedad puede ser externamente inducida mediante la n -forma $\tilde{\omega}$ que usamos para definir bases derechas en \mathbb{M} . Para ello ocupamos las $m-p$ primeras ranuras de $\tilde{\omega}$ con $m-p$ vectores linealmente independientes **NO** tangentes a la subvariedad. Las restantes p ranuras serán ocupadas por vectores tangentes a la subvariedad, y pueden usarse para definir una orientación exterior de la misma. Si el procedimiento puede extenderse continuamente a toda la subvariedad, entonces la subvariedad es orientable. Por supuesto, así definida la orientación derecha depende de cómo se eligen los $m-p$ primeros vectores.

▶ Notación: el procedimiento de ocupar la primera ranura de una p -forma $\tilde{\omega}$ con un dado vector \bar{x} para generar una $(p-1)$ -forma se denota de distintas maneras en la literatura:

$$\tilde{\omega}(\bar{x}, \dots) = i_{\bar{x}} \tilde{\omega} = \bar{x} \lrcorner \tilde{\omega}$$

▶ **Teorema de Stokes**

El teorema fundamental del cálculo dice que

$$\int_a^b df = f(b) - f(a)$$

donde f es una función escalar o 0-forma.

En una variedad diferenciable de m dimensiones, el teorema de Stokes generalizado dice que

$$\int_U d\tilde{\eta} = \int_{\partial U} \tilde{\eta}$$

donde $\tilde{\eta}$ es una $(m-1)$ -forma derivable con continuidad, y ∂U es el borde de la región U (en la integral, $\tilde{\eta}$ está restringida a ∂U).

La definición precisa de "borde" y su orientación requiere del concepto de "simplex" (ver Flanders p. 57). En una carta $\{x^i\}$ tal que $x^1=0$ es el borde y U ocupa la región $x^1 \leq 0$, entonces $\{x^2, x^3, \dots, x^m\}$ son coordenadas en ∂U apropiadamente orientadas para la aplicación del teorema de Stokes.

▶ Si M no tiene borde resulta $\int_M d\tilde{\eta} = 0 \neq \tilde{\eta}$

▶ El borde de un borde es cero: $\int_{\partial\partial U} \tilde{\beta} = \int_{\partial U} d\tilde{\beta} = \int_U d(d\tilde{\beta}) = 0$

Ejemplo: en $n=2$ sea $\tilde{\eta} = \eta_1 \tilde{dx}^1 + \eta_2 \tilde{dx}^2$

$$d\tilde{\eta} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2} \tilde{dx}^2 \wedge \tilde{dx}^1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x^1} \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2} \right) \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2$$

$$\text{Entonces } \int_{\varphi(U)} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \int_{\varphi(\partial U)} \left(\eta_1 \frac{dx^1}{d\lambda} + \eta_2 \frac{dx^2}{d\lambda} \right) d\lambda$$

pue es el teorema de Stokes usual en \mathbb{R}^2 .

▶ El teorema de la divergencia forma parte del teorema de Stokes generalizado.

En primer lugar veamos cómo definir la divergencia de un vector con los elementos que contamos hasta aquí. Dado un vector \bar{v} y un volumen (n-forma) $\tilde{\omega}$ definimos la divergencia como la 0-forma o escalar tal que

$$\left(\text{div}_{\tilde{\omega}} \bar{v} \right) \tilde{\omega} = d[\tilde{\omega}(\bar{v}, \dots)]$$

Es claro que la expresión $\partial_i v^i$ no serviría como definición porque no es escalar ante transformaciones generales de coordenadas. Por lo tanto nos interesa saber a qué combinación de derivadas de las componentes de \bar{v} corresponde esta definición.

Veamos el caso $m=2$: $\tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 = \omega (\tilde{dx}^1 \otimes \tilde{dx}^2 - \tilde{dx}^2 \otimes \tilde{dx}^1)$

$$\tilde{\omega}(\bar{v}_i) = \omega (v^1 \tilde{dx}^2 - v^2 \tilde{dx}^1)$$

$$\begin{aligned} d[\tilde{\omega}(\bar{v}_i)] &= \partial_1(\omega v^1) \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 - \partial_2(\omega v^2) \tilde{dx}^2 \wedge \tilde{dx}^1 \\ &= (\partial_1(\omega v^1) + \partial_2(\omega v^2)) \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 \end{aligned}$$

Reemplazando en la definición:

$$\text{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V} = \frac{1}{\omega} \partial_i (\omega v^i)$$

Se puede ver que este resultado vale en cualquier dimensión m (en ese caso $\omega = \omega_{12 \dots m}$).

Entonces el teorema de Stokes generalizado dice que

$$\int_U (\text{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V}) \tilde{\omega} = \int_U d[\tilde{\omega}(\bar{v}_1, \dots)] = \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\bar{v}_1, \dots)$$

\uparrow Definición
 \uparrow Stokes

Para ver en este resultado la forma usual del teorema de la divergencia deberíamos mostrar que el miembro de la derecha tiene características de flujo del vector \bar{V} . Consideremos una 1-forma \tilde{m} normal a ∂U , y una $(m-1)$ -forma $\tilde{\alpha}$ tal que

$$\tilde{\omega} = \tilde{m} \wedge \tilde{\alpha}$$

En general se prueba que si $\tilde{\beta}$ es una p-forma vale que (Schutz, 4.16 y

ejercicio 4.9)
$$(\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha})(\bar{v}, \dots) = \tilde{\beta}(\bar{v}, \dots) \wedge \tilde{\alpha} + (-1)^p \tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\bar{v}, \dots)$$

Entonces, en nuestro caso,

$$\tilde{\omega}(\bar{v}, \dots) = \tilde{m}(\bar{v}) \tilde{\alpha} - \tilde{m} \wedge \tilde{\alpha}(\bar{v}, \dots)$$

El segundo término se anula cuando restringimos a ∂U : $\tilde{m}|_{\partial U} = 0$

Entonces
$$\tilde{\omega}(\bar{v}, \dots)|_{\partial U} = \tilde{m}(\bar{v}) \tilde{\alpha}|_{\partial U}$$

El teorema queda:

$$\int_U (\text{div}_{\tilde{\omega}} \bar{v}) \tilde{\omega} = \int_{\partial U} \tilde{m}(\bar{v}) \tilde{\alpha}$$

donde $\tilde{m}(\bar{v}) = m_i v^i$; $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$ es un volumen inducido en ∂U por $\tilde{\omega}$.

Como \tilde{m} está definido a menos de una constante (no tenemos manera de normalizarla todavía), lo mismo sucede con el volumen inducido $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$. Las restantes ambigüedades que surgen de la descomposición $\tilde{\omega} = \tilde{m} \wedge \tilde{\alpha}$ son inocuas para $\tilde{\alpha}|_{\partial U}$.

- **Volumen métrico:** la arbitrariedad asociada a $\tilde{\omega}$ en la definición de la divergencia de un vector desaparecen si existe una noción de volumen natural. Eso es lo que sucede en espacios que poseen métrica, como el espacio euclidiano o el espacio-tiempo de Minkowski.

En un espacio euclidiano existen coordenadas privilegiadas, las coordenadas cartesianas, en cuya base el tensor métrico es diagonal con componentes iguales a 1. El volumen natural es el volumen métrico

$$\tilde{\Omega} = d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y} \wedge d\tilde{Z} \quad (m=3)$$

En el espacio-tiempo de Minkowski la geometría privilegia también las coordenadas cartesianas $\{X, Y, Z\}$, que miden distancias, junto con el tiempo T medido por relojes en reposo. En esa base coordenada el tensor métrico toma su forma más simple: $g_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, y el intervalo resulta $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = c^2 (dT)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2$.

El volumen métrico del espacio-tiempo de Minkowski es la 4-forma

$$\tilde{\Omega} = c d\tilde{T} \wedge d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y} \wedge d\tilde{Z}$$

Pero, ¿cómo se escribe este mismo volumen métrico en una carta arbitraria? Sabemos que la componente de una n -forma es una densidad: transforma con el Jacobiano del cambio de coordenadas, es decir que

$$\tilde{\Omega} = J d\tilde{x}^0 \wedge d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3$$

donde J es el determinante de la matriz del cambio de coordenadas

$$\{cT, X, Y, Z\} \rightarrow \{\tilde{x}^i\}$$

Veamos que J coincide con $\sqrt{|\det g_{ij}|}$ en la nueva base:

$$g_{ij} = \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \frac{\partial X^J}{\partial x^j} \underbrace{g_{IJ}}_{\text{diag}(1, -1, -1, -1)}$$

Entonces $\det g_{ij} = \left(\det \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \right)^2 \underbrace{\det g_{IJ}}_{-1}$

Es decir que $|\det g_{ij}| = J^2$

El volumen métrico es

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{|\det g_{ij}|} \tilde{dx}^0 \wedge \tilde{dx}^1 \wedge \tilde{dx}^2 \wedge \tilde{dx}^3$$

Este resultado será válido también en Relatividad General

En los espacios que posean métrica usaremos $\omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}$ en la definición de la divergencia de un vector.

9 Aplicaciones del cálculo exterior.

Operador estrella de Hodge.

Derivada de Lie

► Aplicaciones del cálculo exterior

1) Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $f(x,y)$ una función en \mathbb{R}^2 , que puede ser compleja. Hagamos el cambio de carta

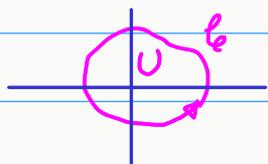
$$\{x, y\} \rightarrow \{z, \bar{z}\}$$

donde $z = \frac{x+iy}{2}$, $\bar{z} = \frac{x-iy}{2}$

Entonces
$$\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \tilde{d}y = \frac{\partial f}{\partial x} (\tilde{d}z + \tilde{d}\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\tilde{d}z - \tilde{d}\bar{z}}{i}$$

es decir
$$\tilde{d}f = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial z}} \tilde{d}z + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \tilde{d}\bar{z}$$

Aplicamos el teorema de Stokes generalizado:



$$\oint_C f \tilde{d}z = \int_U d[f \tilde{d}z] = \int_U \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \tilde{d}\bar{z} \wedge \tilde{d}z$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1\text{-forma}}$

Si f es analítica (u "holomorfa") en U (incluyendo ∂) entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$; esto significa que f es una genuina función de una variable compleja z más que una mera función de dos variables reales. En ese caso

$$\boxed{\oint_C f \tilde{d}z = 0}$$

Cuando f no es analítica en U tendremos, por ejemplo, $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ para cualquier ∂ que encierre el origen.

▶ Operador estrella de Hodge

En los espacios que poseen métrica definimos un operador $*$ que toma una p -forma y la convierte en una $(m-p)$ -forma:

$$\begin{aligned}
 (*\tilde{\beta})_{i_{p+1}\dots i_m} &\doteq \frac{1}{p!} \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1\dots i_p i_{p+1}\dots i_m} \beta^{i_1\dots i_p} \\
 &= \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1\dots i_p i_{p+1}\dots i_m} \beta^{i_1\dots i_p}
 \end{aligned}$$

es una dualidad entre dos espacios de igual dimensión

donde $\beta^{i_1\dots i_p} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \beta_{j_1\dots j_p}$

siendo g^{ij} la inversa de la métrica: $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$, y

▶ Símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon_{j_1\dots j_m} \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } j_1\dots j_m \text{ es permutación par de } 12\dots m \\ -1 & \text{si } j_1\dots j_m \text{ es permutación impar de } 12\dots m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que $\sqrt{|g|} \epsilon_{j_1\dots j_m}$ tiene carácter tensorial pues son las componentes del volumen métrico:

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|} \tilde{dx}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^m = \frac{1}{m!} \sqrt{|g|} \epsilon_{j_1\dots j_m} \tilde{dx}^{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^{j_m}$$

lo cual garantiza el carácter tensorial de $*\tilde{\beta}$.

▶ Propiedad: sean dos p -formas $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$

$$\tilde{\alpha} \wedge *\tilde{\beta} = \alpha_{i_1\dots i_p} \beta^{i_1\dots i_p} \tilde{\Omega}$$

↑ p -formas ↑ $(m-p)$ -formas ↑ volumen métrico

Demostración:

$$\tilde{\alpha} \wedge * \tilde{\beta} = \alpha_{|i_1 \dots i_p|} \sqrt{|g|} \varepsilon_{j_1 \dots j_p | i_{p+1} \dots i_m} \beta^{|j_1 \dots j_p|}$$

$$\tilde{dx}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^{i_p} \wedge \tilde{dx}^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^{i_m}$$

En esta suma múltiple los únicos términos que sobreviven son aquellos con $|j_1 \dots j_p| = |i_1 \dots i_p|$. En efecto, $|j_1 \dots j_p|$ debe ser complementario de $|i_{p+1} \dots i_m|$ en el símbolo de Levi-Civita; y este a su vez es complementario de $|i_1 \dots i_p|$ en la base.

Por lo tanto, cada término de la suma múltiple corresponde a una posible elección de $|i_1 \dots i_p|$. Además cada término contiene el volumen métrico, que aparece como

$$\sqrt{|g|} \varepsilon_{|i_1 \dots i_p| |i_{p+1} \dots i_m|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$$

$$= \sqrt{|g|} \tilde{dx}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{dx}^m = \tilde{\Omega}$$

(no hay términos repetidos porque el orden de los índices está congelado). Así resulta la propiedad que queríamos demostrar. ✓

► Propiedades i) $\tilde{\alpha} \wedge * \tilde{\beta} = \tilde{\beta} \wedge * \tilde{\alpha}$ $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ p-formas

ii) $* 1 = \tilde{\Omega}$

iii) $* * = (-1)^{p(m-p)+s}$ s : número de signos $(-)$ en la métrica diagonalizada

El factor $(-1)^s$ aparece porque aplicando dos veces el operador se forma el factor $|g|$; a su vez con las inversas de la métrica se forma el factor $\det(g^{ij}) = g^{-1}$, siendo $|g|/g = (-1)^s$.

▶ Ejemplo: el tensor de campo electromagnético $\tilde{F} = d\tilde{A}$ es una 2-forma cuyas componentes son $\tilde{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, donde \tilde{A} es el cuadripotencial.

Entonces

$$(*\tilde{F})_{kl} = \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijkl} F^{ij}$$

$$(*\tilde{F})_{kl} = \sqrt{|g|} \begin{pmatrix} 0 & F^{23} & -F^{13} & F^{12} \\ \dots & 0 & F^{03} & -F^{02} \\ \dots & \dots & 0 & F^{01} \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto: $(*\tilde{F})_{01} = \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} (\varepsilon_{2301} F^{23} + \varepsilon_{3201} F^{32}) = \sqrt{|g|} F^{23}$, etc.

Nótese que: $\tilde{F} \wedge *\tilde{F} = F_{|ij|} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^j \wedge \sqrt{|g|} (F^{23} d\tilde{x}^0 \wedge d\tilde{x}^1 + \dots)$

$$= F_{23} F^{23} \underbrace{\sqrt{|g|} d\tilde{x}^0 \wedge d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3}_{\tilde{\Omega}} + \dots$$

$$= F_{|ij|} F^{|ij|} \tilde{\Omega}$$

▶ Para calcular $*\tilde{F}$ en Minkowski es útil la siguiente tabla:

$$*(cdT \wedge dX) = -dY \wedge dZ$$

$$*(cdT \wedge dY) = -dZ \wedge dX$$

$$*(cdT \wedge dZ) = -dX \wedge dY$$

$$*(dX \wedge dY) = cdT \wedge dZ$$

$$*(dZ \wedge dX) = cdT \wedge dY$$

$$*(dY \wedge dZ) = cdT \wedge dX$$

► Electromagnetismo: la acción del campo electromagnético es

$$S[\tilde{A}] = -\frac{1}{2\mu_0 c} \int \tilde{F} \wedge * \tilde{F} - \frac{1}{c} \int \tilde{A} \wedge * \tilde{j} \quad \text{donde } \tilde{F} = d\tilde{A}$$

La variación de la acción respecto de \tilde{A} es

$$\delta S = -\frac{1}{2\mu_0 c} \int (d\delta\tilde{A} \wedge * \tilde{F} + \underbrace{\tilde{F} \wedge * d\delta\tilde{A}}_{d\delta\tilde{A} \wedge * \tilde{F}}) - \frac{1}{c} \int \delta\tilde{A} \wedge * \tilde{j}$$

es decir, $\delta S_{em} = -\frac{1}{\mu_0 c} \int \delta\tilde{A} \wedge (d* \tilde{F} + \mu_0 * \tilde{j}) + \text{términos de borde}$

Leyes de Maxwell:

$$d\tilde{F} = 0, \quad d* \tilde{F} = -\mu_0 * \tilde{j}$$

$\tilde{F} = d\tilde{A}$ es exacta

ecuaciones dinámicas

$$A_i = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A} \right)$$

$$j^i = (\rho c, \vec{j})$$

Ecuación de continuidad:

(condición necesaria para la existencia de solución)

$$d* \tilde{j} = 0$$

► En Minkowski es

$$F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \dots & 0 & -B_z & B_y \\ \dots & \dots & 0 & -B_x \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

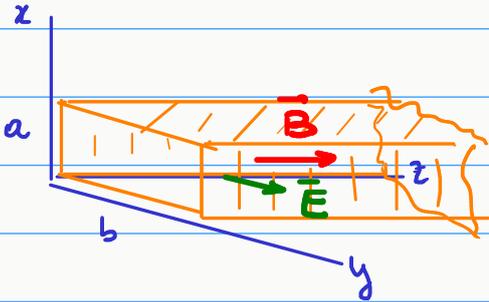
$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\bullet \quad \tilde{F} \wedge * \tilde{F} = F_{ijkl} F^{ijkl} \underbrace{c \tilde{t} \wedge \tilde{x} \wedge \tilde{y} \wedge \tilde{z}}_{\tilde{\Omega}} = (-c^2 E^2 + B^2) \tilde{\Omega}$$

$$\bullet \quad * \tilde{j} = \rho c \tilde{x} \wedge \tilde{y} \wedge \tilde{z} - j_x c \tilde{t} \wedge \tilde{y} \wedge \tilde{z} - j_y c \tilde{t} \wedge \tilde{z} \wedge \tilde{x} - j_z c \tilde{t} \wedge \tilde{x} \wedge \tilde{y}$$

$$\bullet \quad \tilde{A} \wedge * \tilde{j} = (\rho \phi - \vec{j} \cdot \vec{A}) \tilde{\Omega}$$

► Ejercicio: modo TE en guía de ondas



Proponemos:

$$\tilde{F} = \tilde{d}u(t,x) \wedge \tilde{d}y \Rightarrow \tilde{d}\tilde{F} = 0$$

$$\tilde{F} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{E_y} \tilde{d}t \wedge \tilde{d}y + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{-B_z} \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$$

Por otro lado,

$$*\tilde{F} = \frac{\partial u}{\partial t} *(\tilde{d}t \wedge \tilde{d}y) + \frac{\partial u}{\partial x} *(\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\frac{1}{c} \tilde{d}z \wedge \tilde{d}x}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{c \tilde{d}t \wedge \tilde{d}z}$

$$\Rightarrow \tilde{d}*\tilde{F} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tilde{d}t \wedge \tilde{d}z \wedge \tilde{d}x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c \tilde{d}x \wedge \tilde{d}t \wedge \tilde{d}z$$

$$\tilde{d}*\tilde{F} = 0 \iff \boxed{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

Condiciones de contorno: $E_y(x=0) = 0 = E_y(x=a)$

$$\Rightarrow u(t,x) = A e^{i\omega t} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad \text{con } \omega = \frac{m\pi}{a} c$$

Obtuvimos una onda estacionaria, que rebota entre las paredes sin propagarse en z.

Pero podemos generar una solución propagante mediante un boost de Lorentz:

$$t = \gamma(t' - \frac{v}{c^2} z'), \quad z = \gamma(z' - vt'), \quad x = x', \quad y = y' \Rightarrow \tilde{d}t = \gamma(\tilde{d}t' - \frac{v}{c^2} \tilde{d}z')$$

$$\tilde{F} = E_y \tilde{d}t \wedge \tilde{d}y - B_z \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y = \underbrace{\gamma E_y}_{E'_y} \tilde{d}t' \wedge \tilde{d}y - \underbrace{\frac{\gamma v}{c^2} E_y}_{B'_x} \tilde{d}z' \wedge \tilde{d}y - \underbrace{B_z}_{-B'_z} \tilde{d}x' \wedge \tilde{d}y'$$

Ahora hay una componente del vector de Poynting a lo largo de z:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow S'_z = -\frac{1}{\mu_0} E'_y B'_z = \frac{\gamma^2 v}{\mu_0 c^2} E_y^2$$

La fase de la onda es $\omega t = \omega \gamma (t' - \frac{v}{c^2} z')$ $\Rightarrow \omega' = \gamma \omega$, $k'_z = \frac{v}{c^2} \gamma \omega$

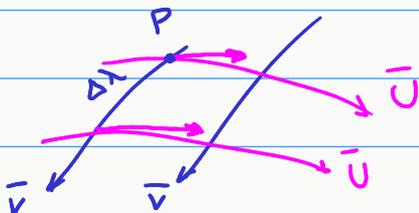
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2_z = \omega^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}} \quad \text{relación de dispersión}$$

Velocidad de fase: $v'_f = \frac{\omega'}{k'_z} = \frac{c^2}{v}$

Velocidad de grupo: $v'_g = \frac{d\omega'}{dk'_z} = v$ $v'_f v'_g = c^2$

► **Derivada de Lie:** hasta aquí sólo sabemos derivar p-formas. Nos gustaría definir una derivada direccional de vectores utilizando exclusivamente las estructuras ya establecidas sobre la variedad diferenciable.

Si pueremos derivar un campo vectorial $\bar{U} = \frac{d}{d\mu}$ en la dirección de un vector $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ podríamos superar el siguiente límite:



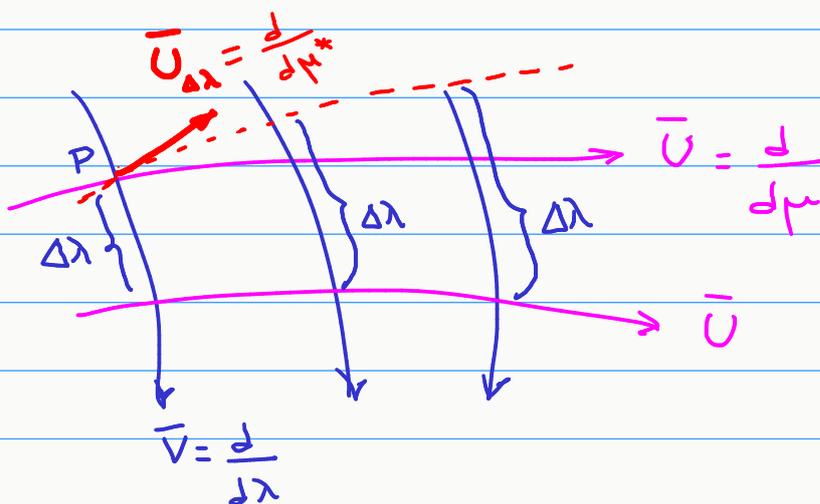
$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda) - \bar{U}(\lambda_p)}{\Delta\lambda}$$

Pero ocurre que $\bar{U}(\lambda_p)$ y $\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda)$ pertenecen a espacios tangentes diferentes: no podemos restar los

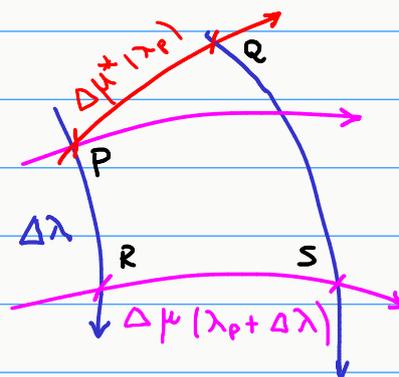
La solución sería definir en P un vector $\bar{U}_{\Delta\lambda}(\lambda_p) \in \pi_p$ que "represente" a $\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda)$.

De esa manera, la diferencia $\bar{U}_{\Delta\lambda}(\lambda_p) - \bar{U}(\lambda_p)$ tendría sentido.

Vamos a mostrar un procedimiento, conocido como "dragado" de Lie, para definir el vector $\bar{U}_{\Delta\lambda} \in T_p$ a partir de $\bar{U}(\lambda_p + \Delta\lambda)$.



Construiremos la línea de campo de $\bar{U}_{\Delta\lambda}$ que pasa por P arrastrando las línea de \bar{U} que pasa por $\lambda_p + \Delta\lambda$. Pero no alcanza con la línea de campo sino que debemos definir su parámetro μ^* . Para esto diremos que $\Delta\mu^*(\lambda_p) = \Delta\mu(\lambda_p + \Delta\lambda)$:



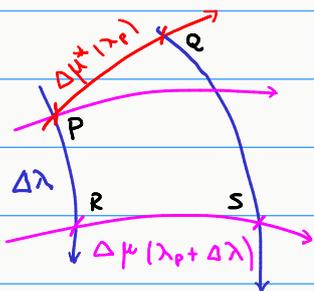
La derivada de Lie de \bar{U} respecto de \bar{V} , $\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U}$, es un vector (proviene de una diferencia de vectores en T_p); por lo tanto es una derivada sobre las funciones. Veamos cómo opera:

$$\left[\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} \right] (f) = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\bar{U}_{\Delta \lambda}(P) - \bar{U}(P)}{\Delta \lambda} \right] (f)$$

$$= \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \lambda} \left[\frac{df}{d\mu^*}(P) - \frac{df}{d\mu}(P) \right]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta \lambda \rightarrow 0 \\ \Delta \mu \rightarrow 0}} \left[\frac{f(Q) - f(P)}{\Delta \lambda \Delta \mu^*} - \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{df}{d\mu}(P) \right]$$

$$f(Q) - f(P) = (f(Q) - f(S)) + (f(S) - f(R)) + (f(R) - f(P))$$



$$\frac{f(Q) - f(P)}{\Delta \lambda \Delta \mu^*} \rightarrow -\frac{1}{\Delta \mu^*} \frac{df}{d\lambda}(Q) + \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{\Delta \mu}{\Delta \mu^*} \frac{df}{d\mu}(R) + \frac{1}{\Delta \mu^*} \frac{df}{d\lambda}(P)$$

= 1 ($\Delta \mu^*(P) = \Delta \mu(R)$)

$$\frac{d}{d\mu^*} \xrightarrow{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu}$$

$$\left[\frac{d}{d\lambda} \frac{df}{d\mu} \right]_P$$

$$\frac{f(Q) - f(P)}{\Delta \lambda \Delta \mu^*} - \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{df}{d\mu}(P) \rightarrow -\frac{d}{d\mu^*} \frac{df}{d\lambda} \Big|_P + \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{df}{d\mu}(R) - \frac{1}{\Delta \lambda} \frac{df}{d\mu}(P)$$

$$= \left[\frac{d}{d\lambda} \frac{df}{d\mu} - \frac{d}{d\mu} \frac{df}{d\lambda} \right]_P = [\bar{V}, \bar{U}] f \Big|_P$$

conmutador

Podemos deshacernos de f , y decir que la derivada de Lie no es más que el conmutador entre los campos:

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} = [\bar{V}, \bar{U}]$$

Un campo \bar{U} se dice "Lie-dragueado" por otro campo \bar{V} si $[\bar{V}, \bar{U}] = 0$.

En ese caso, el dragueo de Lie de las líneas de campo conduce a las propias líneas de campo; en otras palabras, los parámetros λ, μ se comportan como coordenadas (por cierto, los vectores de una base coordenada conmutan).

▶ Derivada de Lie de una función: es natural definir

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} f \doteq \bar{V}(f)$$

Es decir, el dragueo de Lie de f es $f_{\Delta\lambda} = f(\lambda + \Delta\lambda)$.

▶ Propiedades:

i) $\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} = -\mathcal{L}_{\bar{U}} \bar{V}$

ii) Regla de Leibniz: $\mathcal{L}_{\bar{V}}(g\bar{U}) = [\mathcal{L}_{\bar{V}}g]\bar{U} + g\mathcal{L}_{\bar{V}}\bar{U}$

iii) componentes en base coordenada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} &= [\bar{V}, \bar{U}] = [v^i \partial_i, u^j \partial_j] = v^i \partial_i u^j \partial_j - u^j \partial_j v^i \partial_i \\ &= v^i (\partial_i u^j) \partial_j - u^j (\partial_j v^i) \partial_i = \left(v^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Entonces
$$\boxed{[\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U}]^i = v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} - u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}}$$

Notar que ante cambio de coordenadas quedan términos con derivadas segundas que se cancelan entre sí, lo que permite que las cantidades obtenidas se transformen como componentes de un vector.

▶ La derivada de Lie no es una genuina derivada direccional de \bar{U} en la dirección de \bar{V} , en el sentido que también \bar{V} resulta derivado.

iv) Si $\bar{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$:
$$\left[\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \bar{u} \right]^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^1}$$

v) $\mathcal{L}_{[\bar{v}, \bar{u}]} = [\mathcal{L}_{\bar{v}}, \mathcal{L}_{\bar{u}}]$

vi) Identidad de Jacobi:

$$[[\mathcal{L}_{\bar{u}}, \mathcal{L}_{\bar{v}}], \mathcal{L}_{\bar{w}}] + [[\mathcal{L}_{\bar{v}}, \mathcal{L}_{\bar{w}}], \mathcal{L}_{\bar{u}}] + [[\mathcal{L}_{\bar{w}}, \mathcal{L}_{\bar{u}}], \mathcal{L}_{\bar{v}}] = 0$$

► Derivada de Lie de 1-formas: podemos definir $\mathcal{L}_{\bar{v}} \tilde{\omega}$ proponiendo que valga una regla de Leibniz del tipo $\mathcal{L}_{\bar{v}} [\tilde{\omega}(\bar{u})] = \underbrace{(\mathcal{L}_{\bar{v}} \tilde{\omega})}_{0\text{-forma}}(\bar{u}) + \tilde{\omega}(\underbrace{\mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{u}}_{\uparrow \text{J-forma a definir}})$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}_{\bar{v}} \tilde{\omega})_i = v^j \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$$

► Derivada de Lie de tensores: extendiendo la regla de Leibniz al producto entre vectores y 1-formas, $\mathcal{L}_{\bar{v}} (A \otimes B) = (\mathcal{L}_{\bar{v}} A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{L}_{\bar{v}} B)$,

$$(\mathcal{L}_{\bar{v}} T)^{ij\dots k}_{lm\dots m} = v^r \frac{\partial T^{ij\dots k}}{\partial x^r}{}_{lm\dots m} - T^{rj\dots k}{}_{lm\dots m} \frac{\partial v^i}{\partial x^r} + T^{ij\dots k}{}_{r\dots m} \frac{\partial v^r}{\partial x^l} + \dots$$

$\left. \begin{matrix} \text{todos los} \\ \text{indices} \\ \text{contravariantes} \end{matrix} \right\}$

$\left. \begin{matrix} \text{todos los} \\ \text{indices} \\ \text{covariantes} \end{matrix} \right\}$

► Propiedades: si $\tilde{\omega}$ es una p-forma,

vii) $\mathcal{L}_{\bar{v}} \tilde{\omega} = d[\tilde{\omega}(\bar{v}, \dots)] + \tilde{d}\tilde{\omega}(\bar{v}, \dots)$ (ver Schutz § 4.20)

si $\tilde{\omega}$ es una n-forma: $\mathcal{L}_{\bar{v}} \tilde{\omega} = (\text{div}_{\tilde{\omega}} \bar{v}) \tilde{\omega}$

viii) $\mathcal{L}_{\bar{v}} (\tilde{d}\tilde{\omega}) = \tilde{d} [\mathcal{L}_{\bar{v}} \tilde{\omega}]$

10 Derivada covariante. Conexión. Autoparalelas. Coordenadas normales de Riemann

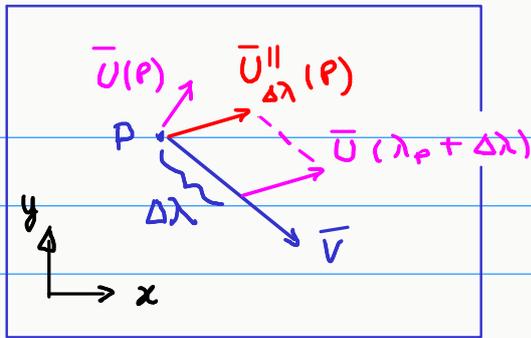
Derivada covariante

Aunque la derivada de Lie permite derivar todo tipo de tensores no es una buena derivada direccional, porque el vector \bar{V} que da la dirección de derivación aparece también derivado. Esto es así porque el procedimiento del dragado de Lie requiere del comportamiento de \bar{V} no sólo en el punto P sino en un entorno del mismo. En particular, la derivada de Lie de un vector en la dirección de sí mismo se anula; es decir que la idea de cuadiaceleración como derivada de la cuadrivelocidad en la dirección de sí misma (a lo largo de la línea de universo de la partícula) no podría ser capturada con la derivada de Lie. Esto muestra que la variedad diferenciable tendrá que incorporar una estructura adicional para poder definir una buena derivada direccional de tensores.

Transporte paralelo. Conexión afín

El dragado de Lie surge de la necesidad de definir un representante en el punto P del vector \bar{U} en el punto desplazado, $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$, para resolver la cuestión de la imposibilidad de restar vectores pertenecientes a espacios tangentes diferentes. En los espacios euclidianos y pseudo-euclidianos esa cuestión se resuelve de otra manera, pues existe una estructura geométrica adicional que permite definir el transporte paralelo de vectores. Esos espacios admiten cartas cartesianas globales, en las que el tensor métrico es diagonal de componentes ± 1 ; el transporte paralelo consiste en definir el representante de $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$ en P como el vector $\bar{U}^{\parallel}_{\Delta\lambda}(P)$ que tiene las mismas componentes cartesianas que $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$. Pero en una variedad diferenciable cualquiera no contamos con esa estructura geométrica; por lo tanto veremos qué se necesita para lograr una derivada donde \bar{V} participe sólo para dar la dirección de derivación.

La estructura que introduciremos no es la métrica sino la conexión afín, y será equivalente a una regla para el transporte paralelo de vectores en la variedad.



Transporte paralelo en una geometría euclídea

La derivada covariante que vamos a introducir es una derivada direccional de vectores indicada con el símbolo ∇ . Como para toda derivada, se requiere que

$$i) \nabla_{\bar{v}} (\bar{U} + \bar{W}) = \nabla_{\bar{v}} \bar{U} + \nabla_{\bar{v}} \bar{W} \quad \in \mathbb{T}_P \quad \text{linealidad}$$

$$ii) \nabla_{\bar{v}} (f \bar{U}) = (\nabla_{\bar{v}} f) \bar{U} + f \nabla_{\bar{v}} \bar{U} = \bar{v}(f) \bar{U} + f \nabla_{\bar{v}} \bar{U} \quad \text{Leibniz}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{def: } \bar{v}(f)}$

$$iii) \nabla_{\bar{v} + \bar{w}} \bar{U} = \nabla_{\bar{v}} \bar{U} + \nabla_{\bar{w}} \bar{U}$$

$$iv) \nabla_{f \bar{v}} \bar{U} = f \nabla_{\bar{v}} \bar{U} \quad (\text{así no aparecen derivadas de } \bar{v})$$

Sean $\bar{v} = v^a \bar{E}_a$, $\bar{U} = U^b \bar{E}_b$. Entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{v}} \bar{U} &= \nabla_{\bar{v}} (U^b \bar{E}_b) = \bar{v}(U^b) \bar{E}_b + U^b \nabla_{\bar{v}} \bar{E}_b = \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow (i) \text{ y } (ii) \\ \bar{v}(U^b) \end{matrix} \\ &= \bar{v}(U^b) \bar{E}_b + U^b v^a \nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow (iii) \text{ y } (iv) \end{matrix} \end{aligned}$$

Del resultado lo único desconocido, por falta de transporte paralelo, es $\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b$.

El resultado debe ser un vector, y podrá expresarse como combinación de los vectores de la base. Entonces definimos

$$\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b = \Gamma^c_{ba} \bar{E}_c$$

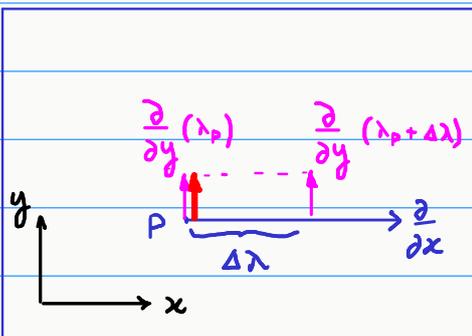
En esta definición seguimos la convención del texto de Schutz, aunque la mayoría de los autores escriben $\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b = \Gamma^c_{ab} \bar{E}_c$.

Las funciones Γ_{ab}^c son las componentes de un objeto geométrico que no es un tensor sino que es una **conexión afín**. En efecto, no puede tratarse de un tensor porque el primer término en $\nabla_{\bar{v}} \bar{U}$ no tiene carácter vectorial; así la **conexión compensa** el mal comportamiento de ese primer término para que el resultado sea un vector.

▶ Ahora que tenemos una derivada covariante podemos decir que el vector paralelo-transportado que representa a $\bar{U}(\lambda_P + \Delta\lambda)$ en Π_P es (despejando del cociente incremental):

$$\bar{U}_{\Delta\lambda}^{\parallel}(P) = \bar{U}(P) + \Delta\lambda \nabla_{\bar{v}} \bar{U}(P) + \mathcal{O}(\Delta\lambda^2)$$

▶ Si $\nabla_{\bar{v}} \bar{U} = 0$, \bar{U} se dice **transportado paralelamente en la dirección de \bar{v}** (del mismo modo que decimos que \bar{U} es Lie-dragueado por \bar{v} si $\mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{U} = 0$).



En un espacio euclidiano los Γ_{ij}^k se anulan en la carta cartesiana. La noción natural de paralelismo en ese espacio es tal que los vectores de la base cartesiana se transportan paralelamente unos en la dirección de los otros.

Mientras que la **anulación de un tensor en un punto P es un hecho absoluto**, independiente de la base (si las componentes de un tensor se anulan en una base entonces se anulan en cualquier base), **no sucede lo mismo** con las componentes de una conexión que, como dijimos, es un objeto geométrico de otra naturaleza. Veamos cómo se transforman los Γ_{ab}^c ante cambio de base.

De la definición de la conexión, $\nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_b \doteq \Gamma_{ba}^c \bar{E}_c$, tenemos que

$\Gamma_{ab}^c = \langle \tilde{E}^c, \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a \rangle$. Entonces, reemplazando en términos de otra base

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c &= \langle \tilde{E}^c, \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a \rangle = \langle \Lambda^{c'} \tilde{E}^{c'}, \nabla_{\Lambda^{b'} \bar{E}_{b'}} (\Lambda^{a'} \bar{E}_{a'}) \rangle \\ &= \Lambda^{c'} \langle \tilde{E}^{c'}, \Lambda^{b'} \nabla_{\bar{E}_{b'}} (\Lambda^{a'} \bar{E}_{a'}) \rangle \\ &= \Lambda^{c'} \langle \tilde{E}^{c'}, \Lambda^{b'} (\bar{E}_{b'} (\Lambda^{a'}) \bar{E}_{a'} + \Lambda^{a'} \nabla_{\bar{E}_{b'}} \bar{E}_{a'}) \rangle \\ &= \Lambda^{c'} \langle \tilde{E}^{c'}, \bar{E}_b (\Lambda^{a'}) \bar{E}_{a'} + \Lambda^{b'} \Lambda^{a'} \Gamma_{a'b'}^{d'} \bar{E}_{d'} \rangle \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ab}^c = \Lambda^{c'} \left(\bar{E}_b (\Lambda^{a'}) + \Lambda^{a'} \Lambda^{b'} \Gamma_{a'b'}^{c'} \right)$$

El segundo término es tensorial, pero el primer término no lo es. Aunque la conexión se anula en una base, no se anula en la otra.

▶ En bases coordenadas resulta:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \Gamma_{i'j'}^{k'} \right)$$

▶ Las componentes de la conexión en base coordenada se llaman símbolos de Christoffel.

▶ Nótese que $\Gamma_{[ij]}^k$ transforma como las componentes de un tensor. Esto significa que existe un tensor, que veremos luego y se llama torsión, cuyas componentes en una base coordenada son

$$T^i{}_{jk} = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i$$

Como Γ_{jk}^i no es tensorial, las componentes de la torsión en base anholónoma no se ven como $2 \Gamma_{[bc]}^a$. Por otro lado, la transformación de la conexión también muestra que la diferencia de dos conexiones tiene carácter tensorial.

Usamos la expresión $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ para el vector que corresponde a derivar \bar{U} en la dirección de \bar{V} . Hemos escrito ese vector como

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{U} = \bar{V}(U^b)\bar{E}_b + U^b V^a \nabla_{\bar{E}_a}\bar{E}_b$$

$\Gamma_{ba}^c \bar{E}_c$

$$\bar{V}(U^c)\bar{E}_c = V^a \bar{E}_a(U^c)\bar{E}_c$$

$$\nabla_{\bar{V}}\bar{U} = V^a \left(\bar{E}_a(U^c) + \Gamma_{ba}^c U^b \right) \bar{E}_c$$

Vemos que el vector $\nabla_{\bar{V}}\bar{U}$ puede verse como la contracción de \bar{V} con un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que llamaremos derivada covariante (a secas) ∇U cuyas componentes son

$$(\nabla\bar{U})^c{}_a \doteq \bar{E}_a(U^c) + \Gamma_{ba}^c U^b$$

En base coordenada es

$$(\nabla\bar{U})^i{}_j \doteq \frac{\partial U^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i U^k = U^i{}_{,j} + \Gamma_{kj}^i U^k \equiv U^i{}_{;j}$$

↑
notación

que es la notación utilizada para la derivada covariante en los textos clásicos.

La derivada covariante puede extenderse a tensores de cualquier tipo. Ya hemos usado que $\nabla_{\bar{V}}f = \bar{V}(f) = \langle \tilde{d}f, \bar{V} \rangle$; es decir que la derivada covariante a secas de una 0-forma f es

$$i) \quad \nabla f \doteq \tilde{d}f$$

Definiremos la derivada covariante de una 1-forma valiéndonos de la regla de Leibniz:

ii) $\nabla_{\bar{v}} (A \otimes B) = (\nabla_{\bar{v}} A) \otimes B + A \otimes (\nabla_{\bar{v}} B)$, A, B tensores de cualquier tipo

iii) pediremos que la derivada covariante conmute con contracciones:

$$\nabla_{\bar{v}} \langle \tilde{\alpha}, \bar{U} \rangle = \langle \nabla_{\bar{v}} \tilde{\alpha}, \bar{U} \rangle + \langle \tilde{\alpha}, \nabla_{\bar{v}} \bar{U} \rangle$$

Así, para la contracción $\langle \tilde{E}^c, \bar{E}_a \rangle = \delta_a^c$ tenemos

$$0 = \langle \nabla_{\bar{E}_b} \tilde{E}^c, \bar{E}_a \rangle + \langle \tilde{E}^c, \underbrace{\nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_a}_{\Gamma_{ab}^d \bar{E}_d}$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_{\bar{E}_b} \tilde{E}^c, \bar{E}_a \rangle = -\Gamma_{ab}^c \Rightarrow \boxed{\nabla_{\bar{E}_b} \tilde{E}^c = -\Gamma_{ab}^c \tilde{E}^a}$$

Conociendo las derivadas covariantes de la base dual, es inmediato calcular la derivada covariante de cualquier tensor usando la regla de Leibniz.

En una base coordinada, la derivada covariante de una 1-forma es

$$\boxed{(\nabla \tilde{\alpha})_{ij} = \alpha_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \alpha_k \equiv \alpha_{i;j}}$$

La derivada covariante en la dirección de \bar{V} es $(\nabla_{\bar{v}} \tilde{\alpha})_i = V^j \alpha_{i;j}$

Para un tensor de tipo arbitrario derivaremos cada \bar{E}_a y cada \tilde{E}^b :

$$\begin{aligned} T^{i \dots j}_{k \dots l; m} &= T^{i \dots j}_{k \dots l, m} + \Gamma_{mm}^i T^{m \dots j}_{k \dots l} + \left\{ \begin{array}{l} \text{todos los índices} \\ \text{contravariantes} \end{array} \right\} \\ &\quad - \Gamma_{km}^m T^{i \dots j}_{m \dots l} - \left\{ \begin{array}{l} \text{todos los índices} \\ \text{covariantes} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

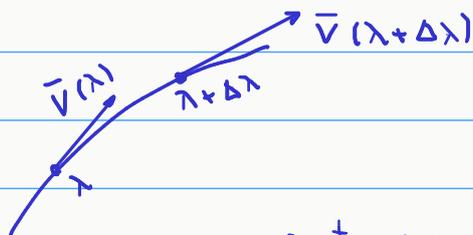
▶ Un tensor T se dice transportado paralelamente en la dirección de \bar{V} si $\nabla_{\bar{V}} T = 0$.

▶ Ejercicio: mostrar que $T_{[ij];k} = (T_{[ij]})_{;k}$ (la derivada covariante conmuta con la simetrización y la antisimetrización).

▶ Curvas autoparalelas

En un espacio euclidiano existen curvas privilegiadas, las rectas, que poseen dos propiedades: realizan la distancia más corta entre dos puntos y son "autoparalelas" en el sentido que su vector tangente se transporta paralelamente a lo largo de la recta. No estamos aún en condiciones de reproducir la primera propiedad, porque no tenemos una noción de distancia en la variedad. Pero podemos reproducir la segunda propiedad, pues ya tenemos una noción de paralelismo.

Llamaremos autoparalela a una curva tal que el transporte paralelo de su vector tangente a lo largo de la curva resulta en un vector tangente a la curva:



$$\bar{V}_{\Delta\lambda}^{\parallel} = \bar{V}(\lambda) + \Delta\lambda \nabla_{\bar{V}} \bar{V}(\lambda) + \dots \propto \bar{V}(\lambda)$$

entonces en cada punto de la curva debe cumplirse que

$$\nabla_{\bar{V}} \bar{V} = f(\lambda) \bar{V} \quad \text{para alguna } f(\lambda)$$

Notablemente cualquier curva que cumple esta ecuación puede ser reparametrizada,

$$\lambda \rightarrow \mu(\lambda) \Rightarrow \bar{V} = \frac{d}{d\lambda} \rightarrow \bar{U} = \frac{d}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \bar{V}$$

para obtener que \bar{U} es paralelo-transportado a lo largo de la curva:

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \nabla_{\bar{U}} \bar{U} &= \nabla_{\bar{U}} \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \bar{V} \right) = \bar{U} \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \right) \bar{V} + \frac{d\lambda}{d\mu} \nabla_{\bar{U}} \bar{V} \\ &= \frac{d^2\lambda}{d\mu^2} \bar{V} + \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \right)^2 \underbrace{\nabla_{\bar{V}} \bar{V}}_{f\bar{V}} \end{aligned}$$

Entonces se obtiene $\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$ resolviendo la ecuación:

$$\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} + f(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \right)^2 = 0$$

cuya solución es $\mu(\lambda) = a \int e^{\int f d\lambda} d\lambda + b$

$$\text{En efecto: } d\mu = a e^{\int f d\lambda} d\lambda \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\mu} = a^{-1} e^{-\int f d\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\lambda}{d\mu^2} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \right) \frac{d\lambda}{d\mu} = -f \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \right)^2 \quad \checkmark$$

El parámetro μ de la autoparalela $\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$ se llama 'parámetro afín'.

La ecuación $\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden para las funciones $x^i(\mu)$ que definen las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0 \Rightarrow U^j \left(U^i{}_{,j} + \Gamma^i{}_{kj} U^k \right) = 0 \quad \text{donde } U^i = \frac{dx^i(\mu)}{d\mu}$$

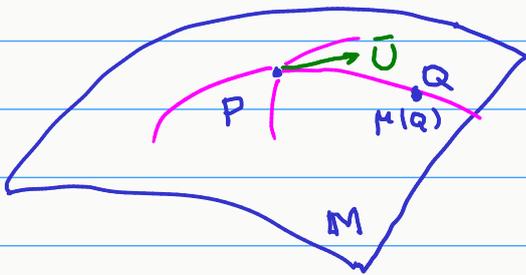
Entonces

$$\boxed{\frac{d^2 x^i}{d\mu^2} + \Gamma^i{}_{kj} \frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0}$$

► Coordenadas normales de Riemann

La torsión no participa en la ecuación de la autoparalela, porque Γ_{kj}^i está contraído con un tensor simétrico. Sería interesante encontrar una carta donde se anule $\Gamma_{(kj)}^i$ (que es la parte no tensorial de la conexión). En general eso no se puede realizar globalmente, pero es posible hacerlo localmente. Vamos a construir una carta en la vecindad de un punto P tal que $\Gamma_{(kj)}^i$ se anula en P.

El procedimiento que utilizaremos trata de reproducir lo que sería la construcción de una carta de tipo "cartesiano" con los elementos geométricos disponibles hasta aquí. Sea $\{\bar{E}_m\}$ una base en \mathbb{T}_P , y tracemos todas las autoparalelas que pasan por P. Cada autoparalela está identificada por su vector tangente $\bar{U}(P)$ en el punto P. Para dar coordenadas a un punto Q del entorno de P, tomaremos el vector $\bar{U}(P)$ que corresponde a la autoparalela que pasa por Q, y el valor de su parámetro afín en el punto Q. Entonces definimos las **coordenadas normales de Riemann** del punto Q como



$$x^m(Q) \doteq \mu(Q) U^m(P)$$

donde $\mu(P) = 0$; P es el origen de coordenadas.

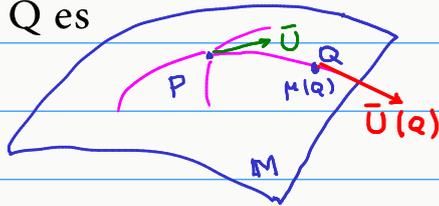
El parámetro afín está definido a menos de una constante multiplicativa (una escala), y una constante aditiva (una elección del origen). La constante multiplicativa no influye en la definición de las coordenadas de Riemann porque no afecta a $\mu \bar{U} = \mu d/d\mu$.

En la geometría euclidiana esta construcción utiliza las rectas que pasan por P, cuyo parámetro afín μ es la distancia al origen (lo veremos más adelante). El vector \bar{U} resulta unitario, pues $\bar{U} \cdot \bar{U} = (g_{ij} dx^i dx^j) / d\mu^2 = (d\mu/d\mu)^2 = 1$. Si $\{\bar{E}_m\}$ es ortonormal, entonces la construcción conduce a las coordenadas cartesianas.

En coordenadas normales de Riemann, cada una de las autoparalelas que pasan por P se recorre manteniendo fijo $U^m(P)$ y cambiando μ . Así, las ecuaciones paramétricas de las autoparalelas resultan lineales en μ :

$$X^m(\mu) = \mu U^m(P)$$

En este sentido podemos decir que, en esta carta, las autoparalelas se ven como "rectas": $d^2 X^m(\mu) / d\mu^2 = 0$. El vector tangente a la autoparalela que va de P a Q es



$$\bar{U} = \frac{d}{d\mu} = \frac{dX^m(\mu)}{d\mu} \frac{\partial}{\partial X^m} = U^m(P) \frac{\partial}{\partial X^m}$$

es decir que tiene componentes constantes en la base $\{\partial/\partial X^m\}$.

Por otro lado, en P vale que

$$\bar{U} = U^m(P) \bar{E}_m$$

entonces concluimos que en P coinciden las bases $\{\bar{E}_m\}$ y $\{\partial/\partial X^m\}$ (esto no significa que $\{\bar{E}_m\}$ sea una base coordenada porque para establecer tal propiedad deberíamos conocer el comportamiento de $\{\bar{E}_m\}$ en la vecindad de P).

Como se anula la derivada segunda de sus ecuaciones paramétricas, la ecuación de las autoparalelas en coordenadas normales de Riemann es

$$\Gamma_{mp}^m(Q) U^m(P) U^p(P) = 0$$

\uparrow $dX^m(\mu)/d\mu$

Es decir, $\Gamma_{(mp)}^m(Q) U^m(P) U^p(P) = 0$

En cada punto Q las funciones $\Gamma_{(np)}^m(x)$ satisfacen estas cuatro ecuaciones para los valores de $U^m(P)$ correspondientes a la autoparalela que une Q con P.[†] Pero en el origen P los valores de $U^m(P)$ son arbitrarios (son tantos como autoparalelas que pasan por P). Por lo tanto en P debe suceder que

$$\Gamma_{(mp)}^m(P) = 0$$

Ejercicio: buscar cambios de coordenadas que retengan esta propiedad.

[†] Hay $n^2(n+1)/2$ $\Gamma_{(np)}^m$'s, que deben adaptarse con continuidad también a los valores de vector tangente de puntos vecinos a Q.

11 Torsión. Curvatura de Riemann

A partir de la conexión podemos definir dos tensores, la torsión y la curvatura de Riemann, que exhiben distintos aspectos de la noción de paralelismo que la conexión otorga a la variedad.

▶ **Torsión:** es un tensor de tipo $\binom{1}{2}$ antisimétrico

$$T(\cdot, \bar{U}, \bar{V}) \doteq \nabla_{\bar{U}} \bar{V} - \nabla_{\bar{V}} \bar{U} - [\bar{U}, \bar{V}]$$

ranura para
1-forma

Puede llamar la atención el último término. Su presencia elimina las derivadas parciales de las componentes de \bar{U}, \bar{V} contenidas en $\nabla_{\bar{V}} \bar{U}, \nabla_{\bar{U}} \bar{V}$. En otras palabras, se cumple que $T(\cdot; f\bar{U}, \bar{V}) = fT(\cdot; \bar{U}, \bar{V})$, como debe suceder con las ranuras de los tensores. Piénsese que $T(\cdot; \bar{U}, \bar{V})$ funciona como un vector que espera una 1-forma para dar un número. Las componentes de ese vector son $T^a{}_{bc} U^b V^c$, que no contienen derivada alguna de las componentes U^b, V^c .

La torsión compara dos estructuras similares: $[\bar{U}, \bar{V}]$, que sólo involucra derivadas comunes, con la misma estructura a nivel de derivadas covariantes.

▶ Propiedades:

i) Las componentes en base coordenada son

$$T(\cdot, \partial_i, \partial_k) = \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_k} \partial_i = (\Gamma^j{}_{ki} - \Gamma^j{}_{ik}) \partial_j$$

$$\Rightarrow T^j{}_{ik} = \Gamma^j{}_{ki} - \Gamma^j{}_{ik} = 2 \Gamma^j{}_{[ki]}$$

► La Relatividad General va a postular que el espacio-tiempo tiene torsión nula.

ii) Si la torsión es nula entonces se cumple que $[\bar{U}, \bar{V}] = \nabla_{\bar{U}} \bar{V} - \nabla_{\bar{V}} \bar{U}$

En base coordenada es $U^k V^i_{,k} - V^k U^i_{,k} = U^k V^i_{;k} - V^k U^i_{;k}$

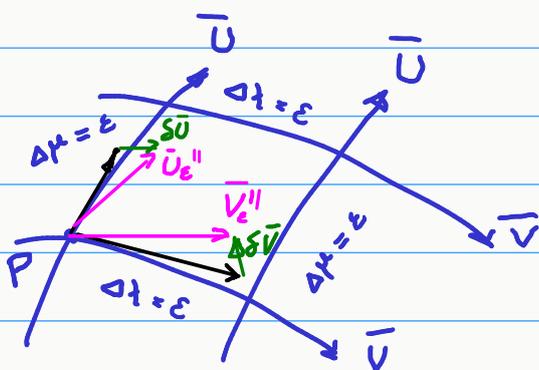
La torsión nula no solo permite reemplazar las derivadas comunes por covariantes en la derivada de Lie de un vector sino también en la derivada de Lie de cualquier tensor, y en la derivada exterior de p-formas (por supuesto, todas las derivadas deben sustituirse para que el procedimiento sea válido). Aun así debemos tener siempre presente que las derivada de Lie y exterior no dependen de la existencia de una conexión.

iii) Si la torsión es nula se satisface que $f_{;ik} = f_{;ki} \quad \forall f$

En efecto, $f_{;ik} = (f_{;i})_{;k} = (f_{;i})_{;k} = f_{,ik} - \Gamma^j_{ik} f_{,j}$

Pero si la torsión es nula entonces es $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$ ✓

► Significado geométrico: sean \bar{U}, \bar{V} tales que $[\bar{U}, \bar{V}] = 0$ (cierran cuadriláteros)



Vamos a transportar paralelamente

\bar{V} a lo largo de \bar{U} y \bar{U} a lo largo de \bar{V} :

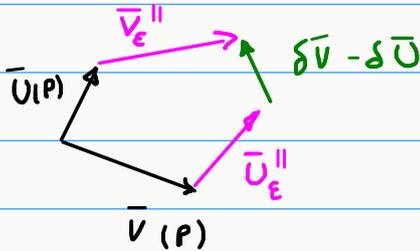
$$\delta \bar{V} \equiv \bar{V}^{\parallel}_{\Delta \mu = \epsilon} - \bar{V}(P) = \epsilon \nabla_{\bar{U}} \bar{V}(P)$$

$$\delta \bar{U} \equiv \bar{U}^{\parallel}_{\Delta \lambda = \epsilon} - \bar{U}(P) = \epsilon \nabla_{\bar{V}} \bar{U}(P)$$

Si no hay torsión es $\nabla_{\bar{U}} \bar{V} = \nabla_{\bar{V}} \bar{U} \Rightarrow \delta \bar{V} = \delta \bar{U}$

Se suele representar esto sin dibujar todos los vectores en el mismo punto P, como sería correcto:

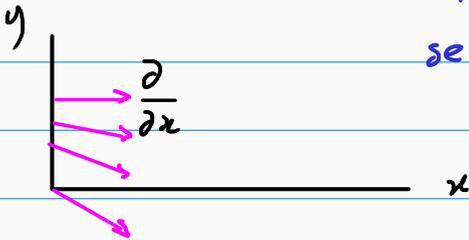
$$\delta \bar{V} - \delta \bar{U} = (\bar{V}_\epsilon^{\parallel} + \bar{U}(P)) - (\bar{U}_\epsilon^{\parallel} + \bar{V}(P))$$



cuando no hay torsión se anula $\delta \bar{V} - \delta \bar{U}$.

Por ejemplo, supongamos que en 2 dimensiones hay una única componente de la conexión en base coordenada que no se anula, digamos Γ_{xy}^y . Entonces

cuando $\partial/\partial x$ se transporta paralelamente a lo largo de $\partial/\partial y$ se genera una componente y debido a que $\Gamma_{xy}^y \neq 0$:



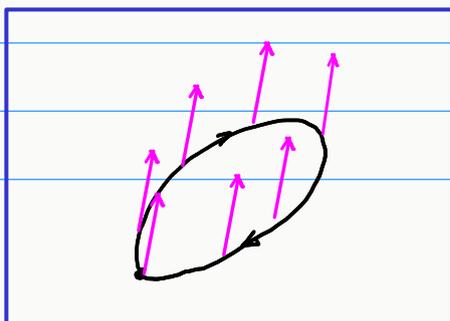
$$\delta \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \Gamma_{xy}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \epsilon \Gamma_{xy}^y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\text{mientras que } \delta \frac{\partial}{\partial y} = \epsilon \Gamma_{yx}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

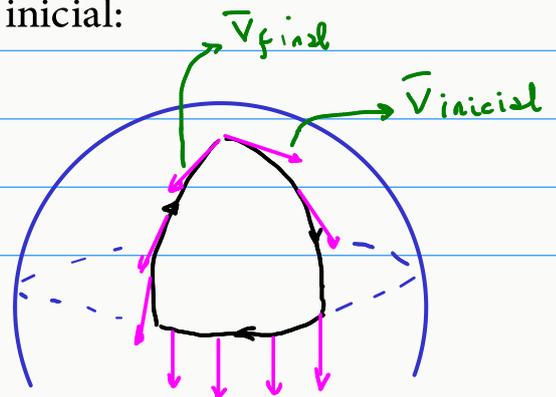
transporte a lo largo de x

► Tensor de curvatura de Riemann

Una característica del transporte paralelo en superficies curvas es que depende del camino. Equivalentemente, el transporte paralelo de un vector sobre un camino cerrado no da por resultado el vector inicial:



en un plano



en una esfera

Esta idea de curvatura asociada al transporte paralelo puede entonces ser definida en una variedad diferenciable dotada de una conexión. Según sea la conexión habrá o no curvatura. La curvatura local de una conexión implica comparar el transporte paralelo de un vector por caminos diferentes que unan puntos vecinos separados infinitesimalmente. Como veremos enseguida, el tensor involucrado en tal caso es el tensor de curvatura de Riemann, que es un tensor de tipo $\binom{1}{3}$ definido como

ranura para
1-forma

$$R(\ ; \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = [\nabla_{\bar{a}}, \nabla_{\bar{b}}] \bar{c} - \nabla_{[\bar{a}, \bar{b}]} \bar{c}$$

El segundo término es necesario para eliminar las derivadas de las componentes de $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$, como debe ocurrir con todo tensor. Es decir que se cumple

$$R(\ ; f \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = f R(\ ; \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}), \quad R(\ ; \bar{c}, f \bar{a}, \bar{b}) = f R(\ ; \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}), \quad \dots$$

para toda función f .

► Propiedades

i) las últimas dos ranuras son antisimétricas: $R(\ ; \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -R(\ ; \bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$

$$\Rightarrow R^a{}_{b(cd)} = 0$$

ii) Componentes en base coordenada:

$$R(\ ; \partial_k, \partial_i, \partial_j) = [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] \partial_k = \nabla_{\partial_i} (\Gamma_{kj}^\ell \partial_\ell) - \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ki}^\ell \partial_\ell)$$

$$= (\Gamma_{kj,i}^\ell - \Gamma_{ki,j}^\ell) \partial_\ell + \Gamma_{kj}^\ell \Gamma_{\ell i}^m \partial_m - \Gamma_{ki}^\ell \Gamma_{\ell j}^m \partial_m$$

$$\Rightarrow R^\ell{}_{kij} = \Gamma_{kj,i}^\ell - \Gamma_{ki,j}^\ell + \Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^\ell - \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^\ell$$

iii) si la torsión es nula, entonces los símbolos de Christoffel son simétricos.

Por lo tanto $R^l_{[kij]} = 0$

Usando la antisimetría de los dos últimos índices también podemos escribir

$$R^l_{kij} + R^l_{ijk} + R^l_{jki} = 0$$

iv) Identidades de Bianchi: si la torsión es nula

$$R^l_{k[ij;m]} = \frac{1}{3} \left(R^l_{kij;m} + R^l_{kjm;i} + R^l_{kmi;j} \right) = 0$$

↑
por (i)

Dem) Podemos utilizar coordenadas normales de Riemann con origen en P . Entonces $\Gamma^l_{kj}(P) = 0$. Por lo tanto $R^l_{kij;m} = \Gamma^l_{kj,im} - \Gamma^l_{ki,jm}$. El primer término es simétrica en i, m , y el segundo lo es en $j, m \Rightarrow R^l_{k[ij;m]} = 0$. Como la anulción de un tensor es independiente de la base, entonces el resultado vale en cualquier base.

Se puede ver que este resultado es equivalente a la identidad de Jacobi

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]] = 0$$

donde $\nabla_i \equiv \frac{\nabla}{\partial x^i}$

v) Número de componentes independientes: las n^4 componentes del Riemann están ligadas por las propiedades (i) y (iii) (en caso que la torsión sea nula)

Entonces las componentes independientes se reducen a

$$m^4 - \underbrace{m^2 \frac{m(m+1)}{2}}_{\text{m}^\circ \text{ de ecuaciones en la propiedad (i)}} - \underbrace{m \binom{m}{3}}_{\text{m}^\circ \text{ de ecuaciones en la propiedad (iii)}} = \frac{1}{3} m^2 (m^2 - 1)$$

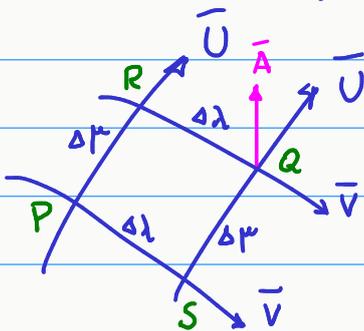
m^o de ecuaciones en la propiedad (i)

m^o de ecuaciones en la propiedad (iii)

► **Significado geométrico:** para comparar el transporte paralelo por dos caminos distintos deberemos extender la definición del vector paralelo-transportado por lo menos al segundo orden del cambio de los parámetros, pues el efecto que buscamos se manifestará a ese orden.

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\Delta\lambda}''(P) &\doteq \bar{U}(P) + \Delta\lambda \nabla_{\bar{v}} \bar{U}(P) + \frac{1}{2} (\Delta\lambda)^2 \nabla_{\bar{v}} \nabla_{\bar{v}} \bar{U}(P) + \dots \\ &= \exp[\Delta\lambda \nabla_{\bar{v}}] \bar{U} \Big|_P \end{aligned}$$

Con esta definición vemos el transporte de un vector \bar{A} desde Q hasta P a lo largo de las líneas de campo de los vectores \bar{U}, \bar{V} :



\bar{U}, \bar{V} son tales que $[\bar{U}, \bar{V}] = 0$ (sus líneas "cierran cuadriláteros")

1^o camino: $Q \rightarrow R \rightarrow P$

2^o camino: $Q \rightarrow S \rightarrow P$

$$\delta \bar{A}_{1^o \text{ camino}} = \delta \bar{A}_{Q \rightarrow R} + \delta \bar{A}_{R \rightarrow P}$$

$$\delta \bar{A}_{Q \rightarrow R} = \Delta \lambda \nabla_{\bar{v}} \bar{A} \Big|_R + \frac{1}{2} (\Delta \lambda)^2 \nabla_{\bar{v}} (\nabla_{\bar{v}} \bar{A}) \Big|_R + \dots$$

Los vectores \rightarrow ser sumados deben estar todos en P . Como sólo retendremos hasta el segundo orden, no cometamos error si evaluamos $\nabla_{\bar{v}} (\nabla_{\bar{v}} \bar{A})$ en P . En cambio, debemos desarrollar $\nabla_{\bar{v}} \bar{A} \Big|_R$:

$$\delta \bar{A}_{Q \rightarrow R} = \Delta \lambda \left(\nabla_{\bar{v}} \bar{A} \Big|_P + \Delta \mu \nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{v}} \bar{A} \Big|_P \right) + \frac{1}{2} (\Delta \lambda)^2 \nabla_{\bar{v}} (\nabla_{\bar{v}} \bar{A}) \Big|_P + \dots$$

Por otro lado

$$\delta \bar{A}_{R \rightarrow P} = \Delta \mu \nabla_{\bar{u}} \bar{A} \Big|_P + \frac{1}{2} (\Delta \mu)^2 \nabla_{\bar{u}} (\nabla_{\bar{u}} \bar{A}) \Big|_P + \dots$$

Estos resultados permiten obtener los valores para el segundo camino intercambiando $\mu \leftrightarrow \lambda$, $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$:

$$\delta \bar{A}_{Q \rightarrow S} = \Delta \mu \left(\nabla_{\bar{u}} \bar{A} \Big|_P + \Delta \lambda \nabla_{\bar{v}} \nabla_{\bar{u}} \bar{A} \Big|_P \right) + \frac{1}{2} (\Delta \mu)^2 \nabla_{\bar{u}} (\nabla_{\bar{u}} \bar{A}) \Big|_P + \dots$$

$$\delta \bar{A}_{S \rightarrow P} = \Delta \lambda \nabla_{\bar{v}} \bar{A} \Big|_P + \frac{1}{2} (\Delta \lambda)^2 \nabla_{\bar{v}} (\nabla_{\bar{v}} \bar{A}) \Big|_P + \dots$$

$$\text{En } \Delta \bar{A} = \delta \bar{A}_{\text{1er camino}} - \delta \bar{A}_{\text{2do camino}} = \delta \bar{A}_{Q \rightarrow R} + \delta \bar{A}_{R \rightarrow P} - \delta \bar{A}_{Q \rightarrow S} - \delta \bar{A}_{S \rightarrow P}$$

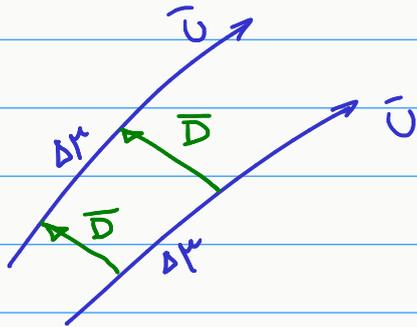
Sólo sobreviven los términos $\Delta \mu \Delta \lambda$:

$$\Delta \bar{A} = \Delta \lambda \Delta \mu \left(\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{v}} \bar{A} - \nabla_{\bar{v}} \nabla_{\bar{u}} \bar{A} \right)_P = \Delta \lambda \Delta \mu R(; \bar{A}, \bar{u}, \bar{v}) \Big|_P$$

El tensor de Riemann mide el cambio de un vector ante transporte paralelo en un camino cerrado. Su par de índices antisimétricos se relacionan con el "área" encerrada por el camino.

▶ Espacio plano: un espacio se dice plano si el tensor de Riemann se anula en todos sus puntos.

▶ Desvío de las autoparalelas ("desviación geodésica")



Consideremos una congruencia de autoparalelas : $\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$

y un campo \bar{D} tal que $[\bar{U}, \bar{D}] = 0$
 (\bar{U}, \bar{D} "cierran cuadriláteros")

Entonces

$$R(; \bar{U}, \bar{U}, \bar{D}) = \underset{\substack{\uparrow \\ [\bar{U}, \bar{D}] = 0}}{\nabla_{\bar{U}}, \nabla_{\bar{D}}} \bar{U} = \nabla_{\bar{U}} \underset{\substack{\uparrow \\ \nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0}}{\nabla_{\bar{D}}} \bar{U}$$

Por otro lado, si la torsión es nula es

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{D} - \nabla_{\bar{D}} \bar{U} = [\bar{U}, \bar{D}] = 0$$

Luego

$$R(; \bar{U}, \bar{U}, \bar{D}) = \nabla_{\bar{U}} \nabla_{\bar{U}} \bar{D}$$

El tensor de curvatura de Riemann también mide la "aceleración" de la "separación" entre autoparalelas.

► Notación: puede ser práctica la siguiente notación

dato $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ entonces $\nabla_{\bar{V}} \bar{U} \equiv \frac{D\bar{U}}{D\lambda}$

Es decir $\left(\frac{D\bar{U}}{D\lambda}\right)^i = (\nabla_{\bar{V}} \bar{U})^i = V^k (U^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk} U^j) = \frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma^i{}_{jk} U^j V^k$

Así el desvío de las autoparalelas se escribe

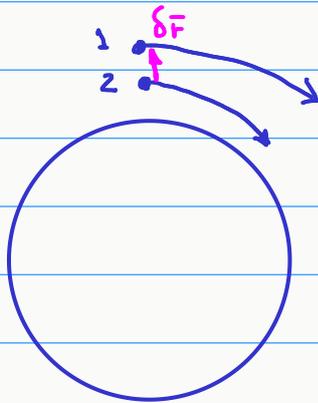
$$R(\ ; \bar{U}, \bar{U}, \bar{D}) = \frac{D^2 \bar{D}}{D\mu^2}$$

► Tensor de Ricci: es el tensor $\binom{0}{2}$ que resulta de una contracción del Riemann,

$$R_{kj} = R^l{}_{klej}$$

► Fuerza de mareas

En la teoría de Newton consideremos dos partículas vecinas en caída libre en un campo gravitatorio no uniforme. Sus trayectorias son



$$\bar{r}_2(t) = \bar{r}_1(t) + \delta \bar{r}(t)$$

Las ecuaciones de movimiento de cada partícula son:

$$\frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} = -\bar{\nabla} \Phi(\bar{r}_1) \quad , \quad \frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} = -\bar{\nabla} \Phi(\bar{r}_2)$$

Restando las ecuaciones: $\frac{d^2 \delta \vec{r}}{dt^2} = -\bar{\nabla} \Phi(\vec{r}_2) + \bar{\nabla} \Phi(\vec{r}_1)$

donde $\bar{\nabla} \Phi(\vec{r}_2) = \bar{\nabla} \Phi(\vec{r}_1 + \delta \vec{r})$

En componentes cartesianas es $\frac{\partial \Phi(\vec{r}_1 + \delta \vec{r})}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \Phi(\vec{r}_1)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \delta x^\beta$

Entonces $\frac{d^2 \delta \vec{r}}{dt^2} = -(\delta \vec{r} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \Phi$

En un campo no uniforme, las partículas en caída libre experimentan aceleraciones relativas que, al orden más bajo, provienen de las derivadas segundas del potencial gravitatorio. Así, trayectorias que son inicialmente paralelas, $\delta \dot{\vec{r}}(t=0) = 0$, no permanecerán paralelas. Esta "fuerza de mareas" es el único vestigio de gravitación que sobrevive en un sistema localmente inercial (laboratorio en caída libre), donde el campo gravitatorio-inercial se anula.

► La formulación del campo gravitatorio-inercial en Relatividad

Hasta aquí tenemos la siguiente situación:

	Newton	geometría
potencial	Φ	g_{ik} <small>corrimiento al rojo gravitatorio en campo débil</small>
fuerza	$\partial \Phi$	$\Gamma^i_{(jk)}$ <small>se anula en el origen de las coordenadas normales de Riemann y otras cartas</small>
"mareas"	$\partial^2 \Phi$	$R^{ij} = \partial \Gamma$ <small>desvío de autoparalelas</small>

Principio de Equivalencia (green arrow pointing from $\partial \Phi$ to $\Gamma^i_{(jk)}$)

? (red arrow pointing from g_{ik} to $\Gamma^i_{(jk)}$)

12 Tensor métrico. Geodésicas. Conexión de Levi-Civita

- ▶ **Tensor métrico:** para definir un producto interno de vectores es necesario introducir un tensor simétrico de tipo $\binom{0}{2}$, que tome dos vectores para dar un número independiente del orden de los vectores. El tensor que tiene ese papel se denomina **tensor métrico**,

$$g = g_{ab} \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b \quad , \quad g_{ab} = g_{ba} \quad \forall a, b$$

- ▶ **Producto interno de vectores:**

$$\bar{U} \cdot \bar{V} \doteq g(\bar{U}, \bar{V}) = g_{ab} U^a V^b = \bar{V} \cdot \bar{U}$$

La existencia de una métrica otorga norma a los vectores, $|\bar{U}| = (\bar{U} \cdot \bar{U})^{1/2}$, y permite definir el ángulo entre dos vectores: $\cos \alpha = \bar{U} \cdot \bar{V} / (|\bar{U}| |\bar{V}|)$.

También permite definir una noción de distancia entre puntos vecinos de la variedad. La distancia entre dos puntos cuyas coordenadas difieren infinitesimalmente, x^i y $x^i + \Delta x^i$, queda definida como la norma del vector

$$\bar{\Delta x} \doteq \Delta x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \Delta x^i \rightarrow 0$$

Recordemos que los Δx^i infinitesimales transforman como componentes de un vector:

$$\Delta x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Delta x^i \quad , \quad \Delta x^i \rightarrow 0$$

Entonces, en el límite de una separación infinitesimal, la distancia entre dos puntos vecinos es

$$ds^2 \doteq \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} g(\bar{\Delta x}, \bar{\Delta x}) = g_{ij} dx^i dx^j$$

que es la forma cuadrática de los diferenciales de las coordenadas que define la distancia en las **geometrías de Riemann**.

La Relatividad utiliza una geometría pseudo-riemanniana ya que la métrica no es definida positiva. En ese caso ds no se llama distancia sino intervalo.

El tensor métrico permite establecer una correspondencia entre los espacios tangente y cotangente. A partir de un vector \bar{V} definimos una 1-forma

$$\tilde{V} \doteq g(\bar{V}, \cdot) = g(\cdot, \bar{V})$$

\tilde{V} es una 1-forma porque espera un vector para dar un número:

$$\tilde{V}(\bar{U}) = g(\bar{V}, \bar{U}) = \bar{V} \cdot \bar{U} = g_{ab} V^a U^b$$

Entonces las componentes de \tilde{V} son $V_b = g_{ab} V^a = g_{ba} V^a$

Comúnmente decimos que el tensor métrico se usa para "bajar" índices. También podemos concebir la operación de "subir" índices para asociar un vector a una 1-forma; en ese caso utilizaremos el tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ inverso del tensor métrico, que llamaremos g^{ab} :

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

Entonces

$$g^{ab} V_b = V^a$$

En este sentido podemos decir que $g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$; por lo tanto

$$g_c^a = \delta_c^a$$

▷ Bases ortonormales

Ahora que tenemos el concepto de norma de un vector y de ángulo entre vectores podemos definir bases ortonormales. Una base de \mathbb{T}_p es ortonormal si

$$\delta_{ab} = \bar{E}_a \cdot \bar{E}_b = g(\bar{E}_a, \bar{E}_b) = g_{ab}(P)$$

Pero en la geometría pseudo-riemanniana de la Relatividad diremos en su lugar que la base de \mathbb{T}_p es ortonormal si

$$g_{ab}(P) = \bar{E}_a \cdot \bar{E}_b = \eta_{ab}$$

donde η_{ab} es el símbolo de Minkowski: $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Las bases coordenadas no son, en general, ortonormales pues

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = g_{ij} \neq \eta_{ij}$$

Es bueno mencionar en este punto que la construcción de las coordenadas normales de Riemann, que logran la anulación de $\Gamma^i_{(jk)}$ en el origen, puede hacerse a partir de una base ortonormal en el origen. Como de la construcción resulta que $\partial/\partial x^m|_p = \bar{E}_m$, entonces en tal caso resulta que en el origen vale que $g_{mn}(P) = \eta_{mn}$.

Si $\{\bar{E}_a\}$ es ortonormal entonces la base dual es

$$\tilde{E}^a = \eta^{ab} g(\bar{E}_b, \cdot)$$

En efecto $\tilde{E}^a(\bar{E}_c) = \eta^{ab} g(\bar{E}_b, \bar{E}_c) = \eta^{ab} \eta_{bc} = \delta^a_c$ ✓

Como $g_{ab} = g(\tilde{E}_a, \tilde{E}_b) = \eta_{ab}$ cuando la base es ortonormal, entonces se tiene

$$g = \eta_{ab} \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b$$

bases ortonormales

▶ Pasamos de una base ortonormal a otra mediante transformaciones de Lorentz, pues el símbolo de Minkowski es invariante lorentziano.

▶ Volumen métrico

En cualquier base ortonormal el volumen métrico se escribe

$$\tilde{\Omega} = \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{E}^m$$

(las transformaciones de Lorentz tienen determinante igual a 1; por lo tanto la componente de $\tilde{\Omega}$ vale 1 en cualquier base ortonormal).

En particular, si usamos las coordenadas normales de Riemann construidas a partir de una base ortonormal es

$$\tilde{\Omega} = d\tilde{X}^1 \wedge d\tilde{X}^2 \wedge \dots \wedge d\tilde{X}^m$$

en el origen. Como ya fue demostrado, esto significa que en una carta cualquiera el volumen métrico tiene la forma

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|} d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^m$$

- **Geodésicas:** la existencia de una métrica permite medir la longitud de una curva, como la integral de la distancia entre puntos vecinos de la curva:

$$\Delta S = \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda$$

donde $x^i = x^i(\lambda)$ son las ecuaciones paramétricas de la curva.

Llamaremos "geodésica" a la curva entre dos puntos dados cuya longitud sea estacionaria. Por lo tanto la geodésica debe cumplir ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano $L = \sqrt{g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j}$; esto es,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ef} \dot{x}^e \dot{x}^f}} g_{ij} \dot{x}^j \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{ef} \dot{x}^e \dot{x}^f}} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^j = 0$$

Es conveniente reparametrizar la curva definiendo un parámetro μ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ef} \dot{x}^e \dot{x}^f}} \frac{d}{d\lambda} \equiv \frac{d}{d\mu}$$

Es decir que $d\mu = \sqrt{g_{ef} dx^e dx^f}$; el nuevo parámetro mide la longitud de la curva.

Entonces

$$\frac{d}{d\mu} \left(g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

► **Ley de conservación:** como ocurre en todo Lagrangiano, si una coordenada es cíclica obtenemos una ley de conservación (1er. Teorema de Noether). En nuestro caso, si el tensor métrico no depende explícitamente de la coordenada x^i entonces la ecuación dinámica dice que se conserva $g_{ij} dx^j/d\mu$.

► Como vemos, el problema de obtener las geodésicas de una geometría riemanniana es equivalente al problema de obtener la línea de universo de una **partícula libre** en una geometría pseudo-riemanniana. En este último caso, el parámetro μ no será la longitud sino el tiempo propio τ de la partícula, y habrá que multiplicar la integral por $-mc$ para dar con la acción de la partícula "libremente gravitante" $S = -mc \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$.

Una **métrica no trivial** indicará la presencia de **potenciales del campo gravitatorio-inercial**. La ley de conservación que acabamos de ver corresponderá a la conservación de una componente del **covector** cantidad de movimiento, $p_i = g_{ij} p^j = m g_{ij} dx^j/d\tau$, cuando las componentes de la métrica no dependan de x^i . Las derivadas de las componentes del tensor métrico aparecen en las ecuaciones dinámicas jugando el papel de la "fuerza" que produce el cambio de las componentes del covector p_i ; la cuadrivelocidad de la partícula forma parte de esa "fuerza".

Avancemos con la ecuación de la geodésica derivando el primer término:

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{d\mu^2} + \frac{dx^j}{d\mu} \left(\frac{d}{d\mu} g_{ij} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

\swarrow
 $\frac{dx^k}{d\mu} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$

Multiplicando por g^{li} ,

$$\frac{d^2 x^l}{d\mu^2} + g^{li} \left(g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{kj,i} \right) \frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

Como $\frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu}$ es simétrico, en la contracción sólo sobrevive la parte simétrica en kj de la expresión en el paréntesis:

$$\frac{d^2 x^l}{d\mu^2} + \frac{1}{2} g^{li} (g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) \frac{dx^k}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} = 0$$

Ecuación de la geodésica

▶ **Autoparalelas y geodésicas:** en un espacio euclidiano las rectas tienen la doble propiedad de ser autoparalelas y geodésicas. Pero vemos que estas dos propiedades provienen de estructuras diferentes. Mientras una viene de la conexión, la otra viene de la métrica. ¿Será posible combinar ambas propiedades en las geometrías riemannianas tal como sucede en la geometría euclidiana? Sí, si miramos el segundo término de la ecuación anterior como un término de conexión. Para ello deberíamos utilizar una conexión cuya parte simétrica en base coordenada sea

$$\Gamma_{(jk)}^l = \frac{1}{2} g^{li} (g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i})$$

(no importa qué valor tenga la torsión). La longitud, o el tiempo propio, juega entonces el papel de parámetro afín de la autoparalela. Nótese que ésta es la parte no tensorial de la conexión, la parte que se puede anular en un punto por medio de una elección apropiada de la carta. Si la Relatividad General se formulara con una conexión de este tipo se lograría establecer la relación esperada entre potencial y campo: $\Gamma \sim \partial g$. ¿Qué dirá la Relatividad General sobre la parte antisimétrica de los símbolos de Christoffel? (la parte tensorial de la conexión, que corresponde a la torsión). Simplemente dirá que el espacio-tiempo carece de torsión. Así la ecuación anterior da la totalidad de la conexión en Relatividad General. Se llama la conexión de Levi-Civita:

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{li} (g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i})$$

- **Conexión métrica:** una conexión se dice "métrica" si es tal que se anula la derivada covariante del tensor métrico,

$$\nabla g_{(,)} = 0 \quad \text{ó} \quad g_{ij;k} = 0 \quad \forall i,j,k$$

La única conexión métrica sin torsión es la conexión de Levi-Civita. En efecto

$$g_{ij;k} = g_{ij;k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0 \quad (1)$$

Permutando cíclicamente los índices:

$$g_{jk;i} - \Gamma_{ji}^l g_{lk} - \Gamma_{ki}^l g_{jl} = 0 \quad (2)$$

$$g_{ki;j} - \Gamma_{kj}^l g_{li} - \Gamma_{ij}^l g_{kl} = 0 \quad (3)$$

Ahora hacemos (1)+(2)-(3), y usamos que la torsión es nula ($\Gamma_{kj}^l = \Gamma_{jk}^l$):

$$g_{ij;k} + g_{jk;i} - g_{ki;j} - 2\Gamma_{ik}^l g_{lj} = 0 \quad \checkmark$$

- Cuando la conexión es métrica vale la regla de Leibniz para la derivada del producto escalar de vectores, $\nabla_{\bar{\nu}}(\bar{U} \cdot \bar{W}) = (\nabla_{\bar{\nu}}\bar{U}) \cdot \bar{W} + \bar{U} \cdot (\nabla_{\bar{\nu}}\bar{W})$, pues

$$(g_{ij} U^i W^j)_{;k} = g_{ij} (U^i_{;k} W^j + U^i W^j_{;k})$$

En particular, si \bar{U}, \bar{W} se transportan paralelamente en la dirección de $\bar{\nabla}$, entonces $\nabla_{\bar{\nu}}(\bar{U} \cdot \bar{W}) = \overbrace{\nabla_{\bar{\nu}}\bar{U}}^0 \cdot \bar{W} + \bar{U} \cdot \overbrace{\nabla_{\bar{\nu}}\bar{W}}^0 = 0$; esto significa que el transporte paralelo de las conexiones métricas preserva normas y ángulos.

Así, si una autoparalela es temporal en un punto ($\bar{U} \cdot \bar{U} > 0$) entonces es temporal en todos sus puntos, y otro tanto si es espacial o nula.

- Cuando la conexión es métrica la operación de subir y bajar índices conmuta con la derivada covariante: $g_{ij} (A^i_{;k}) = (g_{ij} A^i)_{;k} = A_{j;k}$

► **La geometrización del campo gravitatorio-inercial**

Ya tenemos configurados todos los elementos geométricos que entrarán en la formulación de la Relatividad General. Podemos completar el cuadro comparativo con la gravedad de Newton:

	Newton	Einstein	En el origen de una carta localmente inercial:
potencial	Φ	g_{ik} tensor métrica	η_{ik} (base coordenada ortonormalizada en el origen)
fuerzas	$\partial\Phi$	∂g_{ik} conexión de Levi-Civita	Se anula (Principio de equivalencia)
"mareas"	$\partial^2\Phi$	$\partial^2 g_{ik}$ curvatura de Riemann ($\partial\Gamma$)	No se anula, pues la curvatura es tensorial. Es un campo físico (desviación geodésica)

► **Propiedades de la conexión de Levi-Civita**

Sea un tensor $\binom{p}{0}$ totalmente antisimétrico; entonces

$$F^{ij\dots}_{,i} = F^{ij\dots}_{,i} + \Gamma_{li}^i F^{lj\dots} + \Gamma_{li}^j F^{il\dots} + \dots$$

Como la torsión es nula ($\Gamma_{[li]}^j = 0$), el último término y los que siguen se anulan.

Además, para la conexión de Levi-Civita vale que

$$\Gamma_{je}^e = \frac{1}{2} g^{li} (g_{ij,i} + g_{ie,j} - g_{ej,i})$$

Los términos primero y últimos, contraídos con g^{li} , se cancelan (usar que $g^{li} = g^{il}$). Entonces

$$\Gamma_{je}^e = \frac{1}{2} g^{li} g_{il,j} = [\ln |\det(g_{ij})|^{1/2}]_{,j}$$

(Sea m_{ij} una matriz que puede ser no simétrica, y sea \bar{m}^{ki} su inversa: $\bar{m}^{ki} m_{ij} = \delta_j^k$. Entonces vale que $[\ln |\det(m_{ik})|]_{,j} = \bar{m}^{ki} m_{ik,j}$)

Reemplazando este resultado obtenemos

$$F^{ij\dots}_{;i} = F^{ij\dots}_{,i} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|})_{,i} F^{ij\dots}$$

$$F^{ij\dots}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} F^{ij\dots})$$

Este resultado se aplica en particular a la divergencia covariante de un vector, que entonces es igual a la definición de divergencia que dimos en el contexto del cálculo exterior y el volumen métrico:

$$V^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} V^i)_{,i} \equiv \text{div}_{\bar{\omega}} \bar{V}$$

Si el vector proviniera del gradiente de una función, $V^i = g^{ij} \partial_j \phi$ estaríamos ante el Laplaciano $\Delta \phi$ (o el d'Alembertiano $\square \phi$, según sea el caso), que tendría dos expresiones equivalentes:

$$g^{ij} \phi_{;j;i} = (g^{ij} \partial_j \phi)_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \phi)$$

↑
↑

la conexión es métrica;
además $\phi_{;j} = \phi_{,j}$
la conexión es de Levi-Civita

► Ejercicio: usando la definición del operador estrella de Hodge mostrar que para una 2-forma F en $n=4$ resulta

$$(* d * F)_i = -g_{ij} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k (\sqrt{|g|} F^{kj})$$

Luego concluir que en la conexión de Levi-Civita vale que

$$(*d*F)_i = F_{i,k}{}^k$$

Hemos visto que la acción de la partícula libremente gravitante

$$S_{\text{libre}} = -mc \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

conduce a la ecuación de la geodésica, que en la conexión de Levi-Civita (o en cualquier otra que difiera de ésta en un término de torsión) es

$$U^i U^j{}_{;i} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{D\bar{U}}{D\tau} = 0$$

donde $\bar{U} = \frac{d}{d\tau}$ es la cuadrivelocidad de la partícula: $U^j = \frac{dx^j}{d\tau}$

▶ Remarquemos que las cuatro ecuaciones $\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = 0$ no son independientes porque siempre es $\bar{U} \cdot \bar{U} = c^2$; por lo tanto $\bar{U} \cdot \nabla_{\bar{U}} \bar{U} \equiv 0$, lo que liga las cuatro ecuaciones (hay tres grados de libertad).

Asimismo, acabamos de ver que la ecuación dinámica que resulta de la acción electromagnética, $*d*\tilde{F} = -\mu_0 \tilde{j}$ puede releerse en términos de la conexión de Levi-Civita como $F^{ik}{}_{;k} = -\mu_0 j^i$

En ambos casos las acciones conocidas de Relatividad Especial, ahora escritas para una métrica general, conducen a ecuaciones dinámicas que pueden releerse fácilmente en términos de la conexión de Levi-Civita; basta reemplazar la derivada común por la derivada covariante en las leyes formuladas en la carta cartesiana de Relatividad Especial,

$$\frac{d\bar{U}}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{D\bar{U}}{D\tau} = 0, \quad F^{ik}{}_{;k} = -\mu_0 j^i \rightarrow F^{ik}{}_{;k} = -\mu_0 j^i$$

13 Teorema de Gauss. Tensor de Riemann con conexión de Levi-Civita. Postulados de la Relatividad General. Partícula libremente gravitante. Vectores de Killing

► El teorema de Gauss

Del teorema de Stokes generalizado hemos obtenido como caso particular el teorema de la divergencia

$$\int_U (\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V}) \tilde{\omega} = \int_{\partial U} m_i v^i \tilde{\alpha}$$

donde \tilde{m} es una 1-forma normal a ∂U y $\tilde{\alpha}$ es una (n-1)-forma tal que

$$\tilde{\omega} = \tilde{m} \wedge \tilde{\alpha}$$

Si $\tilde{\omega}$ es el volumen métrico $\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|} \, \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^m$ entonces

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{V} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} v^i)$$

que coincide con $V^i_{;i}$ si la conexión es la de Levi-Civita, como vimos en el capítulo anterior. Veamos el miembro derecho del teorema; debemos descomponer el volumen métrico como $\tilde{\Omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha}$. Consideremos una carta tal que $x^1 = a$ sobre ∂U , y la región U corresponde a $x^1 < a$. Entonces $\tilde{d}x^1$ es una forma normal a ∂U , pues su aplicación a un vector tangente a ∂U da cero (x^1 es constante a lo largo de curvas en ∂U). Nos gustaría tener una 1-forma normal unitaria, para lo cual observamos que

$$\|\tilde{d}x^1\|^2 = g^{-1}(\tilde{d}x^1, \tilde{d}x^1) = g^{11} \quad (\text{puede ser positivo o negativo})$$

Entonces la 1-forma normal unitaria es

$$\tilde{m} = |g^{11}|^{-\frac{1}{2}} \widehat{dx}^1$$

y la descomposición del volumen métrico queda

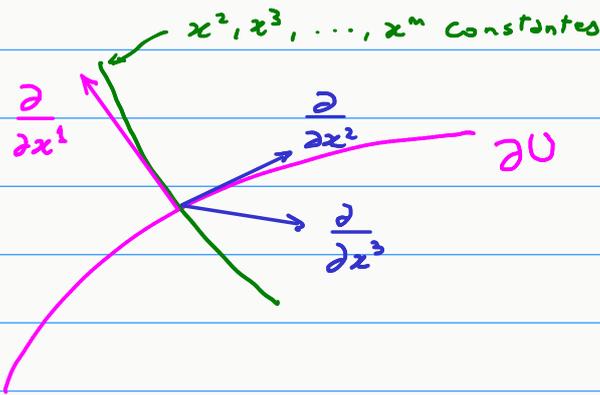
$$\widehat{\Omega} = \sqrt{|g|} \widehat{dx}^1 \wedge \widehat{dx}^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^m = |g|^{\frac{1}{2}} |g^{11}|^{\frac{1}{2}} \tilde{m} \wedge \widehat{dx}^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^m$$

Si las coordenadas se eligen tales que

$$g_{1k} = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \quad k=2,3,\dots$$

La métrica resulta diagonal por bloques:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & h_{uv} \end{pmatrix}$$



Entonces $|g| = |g_{11}| |h| = |g^{11}|^{-1} |h|$

Así la descomposición del volumen métrico resulta $\widehat{\Omega} = \tilde{m} \wedge \tilde{\alpha}$ con

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{|h|} \widehat{dx}^2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}^m \quad \text{volumen inducido en } \partial U$$

El teorema de Gauss es entonces

$$\int_U V^i{}_{;i} dV = \int_{\partial U} V^i d\Sigma_i$$

$$dV = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \dots dx^m$$

$$d\Sigma_i = n_i d\Sigma$$

$$d\Sigma: \text{volumen inducido en } \partial U \\ = \sqrt{|h|} dx^2 \dots dx^m$$

► El tensor de Riemann en la conexión de Levi-Civita

En la conexión de Levi-Civita las componentes del tensor de Riemann son

$$R_{\ell k i j} = g_{\ell m} R^m{}_{k i j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\ell j}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{k i}}{\partial x^\ell \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{\ell i}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{k j}}{\partial x^\ell \partial x^i} \right) + g_{m n} (\Gamma_{k i}^m \Gamma_{\ell j}^n - \Gamma_{k j}^m \Gamma_{\ell i}^n)$$

El último paréntesis no coincide con el que aparece en la forma original del Riemann porque contiene contribuciones de las derivadas de los símbolos de Christoffel.

A las dos relaciones ya conocidas entre estas componentes, se agrega una tercera:

$$i) R_{\ell k(ij)} = 0, \quad ii) R_{\ell[kij]} = 0, \quad iii) R_{\ell k i j} = R_{i j \ell k}$$

La nueva propiedad modifica el conteo de componentes independientes.

Conviene pensar la propiedad (iii) como $R_{AB} = R_{BA}$ donde A y B representan un par de índices antisimétricos ij o lk, por la propiedad (i). Por lo tanto, cada índice A, B corre por $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ valores distintos. Pero la propiedad (iii) dice que R_{AB} es simétrica en sus dos índices; por lo tanto tiene $\frac{1}{2}N(N+1)$ componentes independientes.

Por otro lado, la propiedad (ii) constituye una condición adicional sólo si los cuatro índices son diferentes (es decir, sólo si $n > 3$). En efecto, aunque ℓ no participa de la antisimetrización, ocurre que

$$\begin{aligned} 3 R_{\ell[kij]} &= R_{\ell k i j} + R_{\ell i j k} + R_{\ell j k i} = \\ &= R_{k \ell j i} + R_{k j i \ell} + R_{k i \ell j} = 3 R_{k[\ell j i]} \end{aligned}$$

Handwritten notes:
 - Under kij in the first term: kij diferentes
 - Under i in the first term: (i)
 - Under k in the second term: (i) y (iii)
 - Under $\ell j i$ in the third term: $\ell j i$ diferentes

Con este procedimiento, cualquiera de los índices puede ser llevado a la primera ubicación.

Hay $\binom{n}{4}$ formas de elegir cuatro índices diferentes entre n . Entonces el número de componentes independientes del Riemann en la conexión de Levi-Civita es:

$$I = \underbrace{\frac{1}{2} N(N+1)}_{R_{AB}} - \binom{m}{4} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} m(m-1) \right] \left[\frac{1}{2} m(m-1) + 1 \right] - \binom{m}{4} = \frac{m^2}{12} (m^2 - 1)$$

El término $\binom{n}{4}$ se anula si $n < 4$:

$$\binom{m}{4} = \frac{m}{24} (m-1)(m-2)(m-3)$$

$m=1 \rightarrow I=0$ (no hay curvatura intrínseca en $m=1$)

$m=2 \rightarrow I=1$ hay una sola componente relevante en superficies:
es la curvatura de Gauss $K = -\frac{R_{1212}}{g}$.

$m=3 \rightarrow I=6$ es igual al número de componentes independientes del Ricci. Toda la información del Riemann está contenida en el Ricci, que es simétrico.

$m=4 \rightarrow I=20$ (el Ricci tiene 10 componentes independientes, pues es simétrico)

► Tensor de Ricci, escalar de curvatura

Las simetrías del Riemann provistas por la conexión de Levi-Civita hacen que el Ricci resulte simétrico, $R_{ik} = R^{\ell i \ell k} = R_{ki}$, y tenga la forma

$$R_{ij} = R^{\ell i \ell j} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{|g|} \Gamma_{ij}^k \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \ln \sqrt{|g|} - \Gamma_{\ell i}^k \Gamma_{jk}^{\ell}$$

Se define el escalar de curvatura R como la traza del Ricci:

$$R = R^i{}_i$$

▶ El tensor de Riemann en $n=2$ y $n=3$

En $n=2$ toda la información del Riemann está en el escalar de curvatura:

$$R_{\ell i j k} = R g_{\ell[j} g_{k]i} \quad , \quad m=2$$

En $n=3$ toda la información del Riemann está en el Ricci:

$$R_{\ell i j k} = 2(g_{\ell[j} R_{k]i} + g_{i[k} R_{j]\ell}) - R g_{\ell[j} g_{k]i} \quad , \quad m=3$$

▶ Tensor de Weyl

Debido a las simetrías del Riemann, todas sus contracciones conducen a $\pm R_{ij}$ o se anulan. Por eso conviene definir un tensor que contenga la información del Riemann que no está en el Ricci; deberá ser un tensor del tipo del Riemann cuyas trazas se anulen. Definimos el tensor de Weyl:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{2}{m-2} (g_{i[\ell} R_{k]j} + g_{j[k} R_{\ell]i}) + \frac{2}{(m-1)(m-2)} R g_{i[k} g_{\ell]j}$$

El tensor de Weyl tiene las mismas simetrías que el Riemann, y sus trazas se anulan: $C^i{}_{jil} = 0$, etc. El número de componentes independientes es igual al del Riemann menos el del Ricci. El tensor de Weyl es invariante ante "transformaciones conformes" de la métrica: $g_{ij} \rightarrow W^2(x) g_{ij}$.

En $m=3$ el tensor de Weyl es idénticamente cero.

► El tensor de Einstein

El tensor de Einstein se denomina así porque es la combinación de tensores que va a entrar en las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General. Es un tensor simétrico que se define como

$$G_{ij} \doteq R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$$

Es de segundo orden en derivadas de la métrica, y tiene divergencia idénticamente nula:

$$G^i{}_{j;i} \equiv 0$$

Demostración) si partimos de las identidades de Bianchi,

$$R^l{}_{kij;m} + R^l{}_{kjm;i} + R^l{}_{kmi;j} = 0$$

y contraemos los índices $l i$:

$$R_{kj;m} + \underbrace{R^l{}_{kjm;l}}_{g^{lm} R_{mkj;m}} - R_{km;j} = 0$$
$$g^{lm} R_{mkj;m} = g^{lm} R_{km;mj}$$

Ahora contraemos km subiendo antes el índice k :

$$R^k{}_{jik} + g^{lm} R_{mj;l} - R_{,j} = 0 \Rightarrow 2 R^k{}_{jik} = R_{,j}$$

$$\Rightarrow G^k{}_{jik} = R^k{}_{jik} - \frac{1}{2} \delta^k_j R_{,k} = 0 \quad \checkmark$$



La formulación de la Relatividad General

- i) La Relatividad General postula que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable de $n=4$ dimensiones, dotada de una métrica con signatura Lorentziana (+---), y conexión de Levi-Civita (conexión métrica sin torsión).
- ii) Las leyes para los campos de materia y radiación que se conocen en Relatividad Especial, y que se formulan a partir de acciones que tienen carácter geométrico (son invariantes ante cambio general de coordenadas), contienen la métrica de la geometría plana del espacio-tiempo de Minkowski. Para incluir plenamente los efectos del campo gravitatorio-inercial sobre dichos campos será suficiente que esa métrica no esté dada de antemano, como en Relatividad Especial, sino que sea determinada por la distribución de energía y materia del universo (en una interpretación del desideratum machiano). De esa manera, como hemos visto, las leyes físicas mantendrán la forma que tenían en la carta cartesiana de Relatividad Especial, salvo por el cambio de la derivada común por la derivada covariante. Los efectos del campo gravitatorio-inercial sobre la dinámica de los campos de materia y radiación se realiza así a través de la presencia de la métrica y la conexión de Levi-Civita en las ecuaciones dinámicas. La Relatividad General no incluye acoplamientos de la materia y la radiación con la curvatura (segundas derivadas de la métrica), los que podrían provenir del agregado de términos de curvatura (que no se manifestarían en la geometría plana de Minkowski) a las acciones de esos campos. En ese sentido decimos que el acoplamiento con el campo gravitatorio-inercial es "mínimo". El acoplamiento mínimo permite que valga el Principio de equivalencia: en cada evento existen cartas localmente inerciales donde se anula localmente la conexión (se anulan las primeras derivadas de la métrica), y se recupera la forma que las leyes físicas tienen en la carta cartesiana de la Relatividad Especial (la carta puede elegirse para que la métrica sea $\text{diag}(1,-1,-1,-1)$ en el origen). Esto no sucedería así si hubiera acoplamiento con la curvatura, pues la curvatura es un tensor y no puede anularse mediante un cambio de carta.

iii) A las leyes conocidas en Relatividad Especial se agregarán las ecuaciones dinámicas del campo gravitatorio-inercial, que serán ecuaciones diferenciales de segundo orden para las componentes del tensor métrico (es decir, ecuaciones relacionadas con la curvatura). La fuente de estas ecuaciones será el tensor de energía-momento de los campos de materia y radiación distribuidos en el universo. Estas son las ecuaciones de Einstein que enunciaremos más adelante.

▶ Líneas de universo de partícula libre (libremente gravitante) y rayos de luz

Como ya fue descrito, la variación de la acción de partícula libre conduce a la ecuación de las geodésicas, que son autoparalelas de la conexión de Levi-Civita cuyo parámetro afín es el tiempo propio de la partícula. El enunciado del Principio de inercia dice ahora que las partículas libres de fuerza describen geodésicas temporales del espacio-tiempo.

Del mismo modo los rayos de luz describen geodésicas nulas del espacio-tiempo, formando así los conos de luz de cada evento, que dota al espacio-tiempo de una estructura causal.

Al comienzo del curso vimos que un potencial gravitatorio newtoniano estático Φ debía reflejarse en la estructura de la componente g_{00} de la métrica, para poder reproducir el corrimiento al rojo gravitatorio exigido por el Principio de equivalencia. La relación es $g_{00} \simeq 1 + 2c^{-2}\Phi$ en campo débil ($|\Phi| \ll c^2$). Veremos ahora que este aspecto de la métrica de campo débil permite recuperar el movimiento newtoniano de la partícula. Para esto desarrollaremos la acción de la partícula libre para velocidades no relativistas y campo débil. El campo gravitatorio-inercial es débil si existe una carta donde la métrica es aproximadamente Minkowski. En esa carta, los movimientos no relativistas son tales que $|dx^\alpha(\tau)| \ll dx^0(\tau)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Entonces el sector espacial-espacial de g_{ij} se puede aproximar por su forma minkowskiana: $g_{\alpha\beta} \simeq -\delta_{\alpha\beta}$. Por otro lado, el sector $g_{0\alpha}$ se puede anular escogiendo coordenadas espaciales x^α ortogonales a x^0 (ver también en Cap. 15 "Campo estático débil en el gauge de Lorenz"). Entonces en la acción tendremos

$$\begin{aligned}
 -m c ds &= -m c \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \simeq -m c \left[\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) dx^0{}^2 - \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right]^{1/2} \\
 &= -m c^2 dt \left[\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \right]^{1/2} \simeq -m c^2 dt \left[1 + \frac{\Phi}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} + \dots \right] \\
 &\simeq \left[-m c^2 + \frac{1}{2} m |\vec{u}|^2 - m \Phi + \dots \right] dt
 \end{aligned}$$

Vemos así cómo emerge el Lagrangiano clásico, con su término de energía potencial gravitatoria newtoniana. Esto muestra que en el límite considerado se recupera la dinámica clásica de la partícula en un campo gravitatorio.

Habíamos mencionado que el movimiento sobre una geodésica conserva componentes del covector energía-cantidad de movimiento cuando la métrica no depende de las respectivas coordenadas conjugadas. Concretamente, en el movimiento de partícula libremente gravitante se conserva una componente p_i si y sólo si las componentes de la métrica no dependen de x^i . Esto no hace más que reflejar la ley de conservación clásica donde la coordenada en cuestión debe ser cíclica en el potencial. En Relatividad, las componentes de la métrica son potenciales para el movimiento de la partícula.

Así, si la métrica no depende de x^0 se conserva p_0 . En la aproximación de velocidades no relativistas y campo débil esperamos reencontrar la conservación de la energía mecánica clásica. En efecto,

$$p_0 = g_{0j} p^j = m g_{0j} \frac{dx^j}{d\tau} \simeq m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau}$$

pues ya fue dicho que $g_{0\alpha} = 0$. Además

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, \quad d\tau = \frac{ds}{c} \simeq dt \left(1 - \frac{1}{2} \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} + \frac{\Phi}{c^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Entonces } c p_0 &\simeq m \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) c^2 \frac{dt}{dt} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{u}|^2}{c^2} - \frac{\Phi}{c^2} \right) \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m u^2 + m \Phi \\
 &\simeq \frac{dt}{d\tau}
 \end{aligned}$$

▶ Vectores de Killing

La ley de conservación sobre las geodésicas, tal como la hemos formulado, depende de si una coordenada es cíclica o no en las componentes de la métrica. Sería interesante tener una formulación que se independice de la carta utilizada. La idea es averiguar en qué condiciones se conserva la proyección de la energía-cantidad de movimiento sobre un campo \bar{V} . Recordemos que la ecuación de la geodésica se resume en

$$\frac{D\bar{U}}{D\tau} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{D\bar{P}}{D\tau} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{D\tilde{P}}{D\tau} = 0$$

pues $\bar{p} = m\bar{U}$, y la operación de bajar índices conmuta con la derivada covariante.

Entonces para que se conserve $\bar{p} \cdot \bar{v}$ a lo largo de la geodésica, debe ser

$$0 = \frac{D}{D\tau} (\bar{p} \cdot \bar{v}) = \underbrace{\left(\frac{D\bar{p}}{D\tau} \right)}_0 \cdot \bar{v} + \bar{p} \cdot \left(\frac{D\bar{v}}{D\tau} \right) = p_i \frac{dx^k}{d\tau} V^i{}_{;k} \\ = m U_i U^k V^i{}_{;k} = m U^i U^k V_{(i;j;k)}$$

El resultado dice que $\bar{p} \cdot \bar{v}$ se conserva si \bar{v} es un "vector de Killing", que es aquel que satisface la condición

$$\boxed{V_{(i;j;k)} = 0} \quad \text{vector de Killing}$$

También se puede probar que $V_{ij} p^i p^j$ se conserva si V_{ij} es un tensor de Killing:

$$V_{(i;j;k)} = 0 \quad \text{tensor de Killing}$$

Nótese que, en ausencia de torsión, la condición anterior corresponde a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\bar{v}} g)_{ij} &= v^k g_{ij,k} + g_{kj} v^k_{,i} + g_{ik} v^k_{,j} \\ &= v^k \underbrace{g_{ij;k}}_{\text{conexión métrica}} + g_{kj} v^k_{,i} + g_{ik} v^k_{,j} \\ &= v_{j;i} + v_{i;j}\end{aligned}$$

Un vector de Killing es aquel que cumple

$$\mathcal{L}_{\bar{v}} g = 0$$

lo que habla de una simetría del tensor métrico; el tensor métrico es Lie-dragueado por \bar{v} .

14 Tensor de energía-momento. Ecuaciones de Einstein

► Conservación local

El modelo de ley de conservación en Relatividad es la conservación de la carga eléctrica, que en Relatividad Especial corresponde a la ecuación de continuidad

$$\partial_k j^k = 0$$

donde j^k es el cuadrivector densidad de carga-corriente:

$$j^k = (\rho c, \vec{j})$$

densidad de carga ρc \vec{j} carga que atraviesa una superficie por unidad de área y de tiempo

Separando la parte temporal de la espacial, la ecuación de continuidad queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

cuya forma integral es

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = - \oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

carga contenida en V carga que sale de V por unidad de tiempo

La carga no se crea ni se destruye. Si la carga contenida en un volumen fijo V aumenta es porque entra carga (flujo negativo) a través de la superficie del volumen. La conservación es local; sucede en cada evento del espacio-tiempo, como lo manifiesta la ecuación diferencial. La Relatividad no admite leyes de conservación con compensaciones simultáneas a distancia porque la simultaneidad no es absoluta en Relatividad.

► Conservación de la energía-cantidad de movimiento

La conservación de la energía-cantidad de movimiento de un sistema continuo -como un campo, un fluido, dos campos en interacción, etc.- obedece un esquema similar. Elementos de volumen del sistema continuo que están en contacto intercambian localmente energía y cantidad de movimiento. Estas magnitudes se describen mediante densidades.

Para hablar de la conservación de $p^i = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ tenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{carga} & \longrightarrow & j^k \\ \downarrow & & \\ p^i & \longrightarrow & T^{ik} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p^0 = \frac{E}{c} \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{array} \right)$$

p^i por unidad de volumen $\times c$

p^i que atraviesa una superficie por unidad de área y de tiempo

En particular T^{00} es la densidad de energía, y es positivo cualquiera sea la convención utilizada para la signatura de la métrica. $T^{\alpha\beta}$, con $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, es el tensor de esfuerzos (fuerzas entre volúmenes contiguos por unidad de superficie); $T^{\alpha\beta} dS_\beta$ es el flujo de p^α por unidad de tiempo a través de una superficie \vec{dS} .

La conservación local de la energía-cantidad de movimiento se expresa en la ecuación de continuidad

$$\partial_k T^{ik} = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3$$

que en Relatividad General se convierte en

$$T^{ik}_{;k} = 0$$

del mismo modo que la conservación de la carga se convierte en $j^k_{;k} = 0$.

► Fluido perfecto

En un fluido perfecto en reposo las únicas fuerzas entre volúmenes contiguos son perpendiculares a la superficie que los separa, cualquiera sea la orientación de esa superficie, y están caracterizadas por una única magnitud: la presión p . No existen fuerzas tangenciales o "de corte". Esto implica que el tensor de esfuerzos es isótropo,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = p \delta^{\alpha\beta}$$

Por otro, en el fluido perfecto en reposo y en equilibrio termodinámico no hay transferencia de energía entre elementos contiguos, por lo que la forma que el tensor de energía-momento tiene en el sistema inercial donde el fluido se encuentra en reposo es:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Los valores de la densidad de energía ρ y presión p hidrostáticos caracterizan completamente al fluido perfecto. Estas dos cantidades se relacionan a través de una ecuación de estado que depende del fluido.

La expresión obtenida para el tensor puede descomponerse así:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}}_{-p g^{ij}}$$

De esta forma el último término es proporcional al tensor métrico (estamos trabajando en una carta cartesiana de Relatividad Especial).

Podemos asociar el primer término con la forma del tensor $U^i U_j$, donde $U^i = dx^i/d\tau$ es la cuadrivelocidad de los elementos del fluido; en la carta utilizada, que es una carta comóvil, es $U^i = (c, 0, 0, 0)$:

$$U^i U_j = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así concluimos que

$$T^{ij} = (\rho + p) c^2 U^i U_j - p g^{ij}$$

para la signatura (+---)

Pero esta relación es tensorial; por lo tanto no sólo vale en la carta comóvil sino que vale en cualquier carta. Mas aún, no sólo vale en la geometría de Minkowski sino que vale en cualquier otra geometría con el tensor métrico correspondiente, pues en Relatividad General rige el acoplamiento mínimo.

► Campo electromagnético

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T^{ij} = -\frac{1}{\mu_0} \left(F^{ik} F^j_k - \frac{1}{4} g^{ij} F^{kl} F_{kl} \right)$$

↑
signatura de la métrica (+ ---)

En la carta cartesiana de Relatividad Especial es:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & c^{-1} \vec{S} \\ c^{-1} \vec{S} & T^{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{c^2 E^2 + B^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{vector de Poynting}$$

$$\begin{pmatrix} \rho - \frac{c^2 E_x^2 + B_x^2}{\mu_0} & -\frac{c^2 E_x E_y + B_x B_y}{\mu_0} & -\frac{c^2 E_x E_z + B_x B_z}{\mu_0} \\ \dots & \rho - \frac{c^2 E_y^2 + B_y^2}{\mu_0} & -\frac{c^2 E_y E_z + B_y B_z}{\mu_0} \\ \dots & \dots & \rho - \frac{c^2 E_z^2 + B_z^2}{\mu_0} \end{pmatrix}$$

T^{ij} es simétrico. En $n=4$ tiene traza nula: $T^i_i = 0$.

► Gas de fotones

Podemos considerar un gas de fotones como una configuración donde el campo fluctúa al azar. Si hay isotropía los valores promediados son:

$$\langle \vec{E} \rangle = 0 = \langle \vec{B} \rangle$$

$$\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = \langle E_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

$$\langle E_x E_y \rangle = 0, \text{ etc.}$$

Lo mismo para \vec{B}

$$\Rightarrow -c^2 \langle E_x^2 \rangle + \langle B_x^2 \rangle = \frac{1}{3} (-c^2 \langle E^2 \rangle + \langle B^2 \rangle) = -\frac{2}{3} \mu_0 \rho, \text{ etc.}$$

Entonces el tensor de energía-momento promediado es

$$\langle T^{ij} \rangle = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{3} \end{pmatrix}$$

(como corresponde al caso isótropo de traza nula)

que es el tensor de energía-momento de un gas de fotones, donde vemos que la ecuación de estado del gas es

$$p = \frac{\rho}{3} \quad \text{gas de fotones}$$

► Teorema de la divergencia y conservación

Ya hemos visto la forma integral de la conservación de la carga, que involucra el uso del teorema de la divergencia:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{S(V)} \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad \text{o} \quad \Delta Q = - \int \oint_{S(V)} \vec{j} \cdot \hat{m} \, dS \frac{dx^0}{c}$$

donde Q es la carga contenida en el volumen V . La forma manifiestamente covariante de esta relación se obtiene a partir del teorema de la divergencia cuadridimensional:

$$\int_V j^k{}_{;k} \, dV = \int_{\partial V} j^k \, d\Sigma_k$$

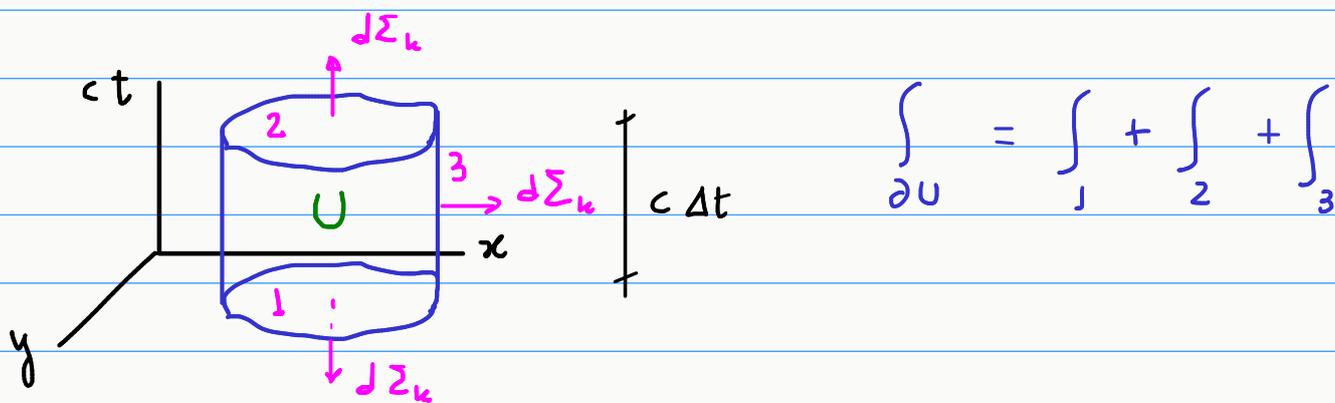
Como $j^k{}_{;k} = 0$ (ecuación de continuidad) entonces la forma integral de la conservación de la carga es

$$\int_{\partial U} j^k d\Sigma_k = 0$$

que equivale a la relación integral mencionada al comienzo. Recordemos que

$$d\Sigma_k = m_k d\Sigma$$

donde m_k es la normal unitaria, y $d\Sigma$ es el volumen inducido en el borde ∂U .



Las hipersuperficies 1 y 2 son espaciales; corresponden a subespacios de eventos en un mismo instante t_1 y un mismo instante t_2 . Sobre esas hipersuperficies los covectores m_k sólo tienen componente 0, y las integrales se realizan sobre el espacio a un dado t . Las integrales resultan en las cargas evaluadas en los respectivos instantes:

$$cQ(t_2) = \int_2 j^0 d\Sigma_0^{(2)} \quad , \quad -cQ(t_1) = \int_1 j^0 d\Sigma_0^{(1)}$$

\uparrow
 ρc

$$c\Delta Q = \int_1 j^k d\Sigma_k^{(1)} + \int_2 j^k d\Sigma_k^{(2)}$$

Como $\int_{\partial U} = 0 \Rightarrow c\Delta Q = - \int_3 j^k d\Sigma_k^{(3)}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m_k^{(3)} dS dx^0}$

Como la hipersuperficie Σ es temporal, $d\Sigma_k^{(3)}$ sólo tiene componentes espaciales; por lo tanto en la integral sólo participan las componentes espaciales de j^k , que corresponden a la densidad de corriente: $j^k m_k^{(3)} = \vec{j} \cdot \hat{n}$. La integral sobre la parte espacial $d\Sigma$ de la hipersuperficie Σ es el flujo de la corriente. En caso que este flujo se anule, entonces la carga permanece constante. Así vemos que la ecuación $\int_{\partial U} j^k d\Sigma_k = 0$ efectivamente equivale a la relación integral mencionada al comienzo.

Queremos ver cuáles son las magnitudes integrales conservadas que se derivan de la ecuación de continuidad

$$T^{ik}_{;k} = 0$$

Para usar el teorema de la divergencia en este caso, debemos recordar que el mismo fue obtenido para un vector (no para un tensor); la demostración hizo uso de la igualdad $v^i_{;i} = |g|^{-1/2} \partial_i (|g|^{1/2} v^i)$ válida para vectores en la conexión de Levi-Civita (también para tensores $\binom{p}{0}$ totalmente antisimétricos). De modo que $T^{ik}_{;k} = 0$ no lleva a un teorema de conservación de la integral $\int T^{ik} d\Sigma_k$ sobre una hipersuperficie espacial. En cambio, si encontráramos un vector tal que

$$(T^{ik} V_i)_{;k} = 0$$

entonces sí podríamos concluir la conservación de la "carga"

$$P = \int_{\Sigma \text{ (espacial)}} T^{ik} V_i d\Sigma_k$$

(en el sentido que toda variación de P sólo puede deberse a un flujo a través del borde de Σ).

La propiedad requerida para el vector \bar{V} corresponde a

$$0 = (T^{ik} V_i)_{;k} = \underbrace{T^{ik}_{;k}}_0 V_i + T^{ik} V_{i;k}$$

↓
simétrico

$$\Rightarrow V_{(i;k)} = 0 \quad \bar{V} \text{ es un vector de Killing}$$

Cada vector de Killing conlleva la conservación de una magnitud integral P asociada a la energía-momento. Este resultado para sistemas continuos es análogo al que ya obtuvimos para una partícula libre, que dice que si \bar{V} es un vector de Killing entonces se conserva $P^i V_i$.

El espacio-tiempo de Minkowski está dotado de 10 vectores de Killing independientes (simetría maximal), que representan 4 traslaciones (en espacio y en tiempo), 3 rotaciones y 3 boosts. Así resultan las conservaciones de la energía, momentos lineales y angulares, y la relación $\vec{P} = c^{-2} E \vec{u}_C$ de un sistema aislado (\vec{u}_C es la velocidad del centro de inercia).

► Ecuaciones de Einstein

En Relatividad General las ecuaciones dinámicas para el campo gravitatorio-inercial serán ecuaciones para las componentes del tensor métrico. Una vez obtenido el tensor métrico la conexión quedará determinada, pues la conexión de Levi-Civita depende de la métrica y sus primeras derivadas. Para que las ecuaciones sean independientes de la carta, deberán tener carácter tensorial; deberán consistir en un tensor igualado a cero o, lo que es lo mismo, un tensor igualado a otro tensor.

El potencial gravitatorio newtoniano está gobernado por la ecuación

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m \quad \text{cte. de gravitación universal}$$

↑
densidad de masa

$$\nabla^2 \frac{2\Phi}{c^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho$$

↑
entra en ρ_{00} de campo débil

↑
densidad de energía en reposo

Ahora bien, la densidad de energía es parte del tensor energía-momento, y las derivadas segundas de la métrica son parte de la curvatura. Como el tensor energía-momento es simétrico, Einstein pensó que debería igualarse al tensor de Ricci, que también es simétrico. Luego se convenció de que el sector geométrico de la ecuación debería poseer divergencia idénticamente nula (esto es, independientemente de que la métrica cumpla o no las ecuaciones) para imponer la conservación de la energía-cantidad de movimiento. Esta condición de "conservación automática" es análoga a la que se tiene en el electromagnetismo: $\text{d}*\tilde{F} = -\mu_0 * \tilde{j}$ impone la conservación de la carga ($\text{d}*\tilde{j} = 0$).

Entonces Einstein concluye que es el tensor $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$, que conocemos como tensor de Einstein y cumple que $G^i{}_{j;i} \equiv 0$, quien debe entrar en las ecuaciones. Las ecuaciones de Einstein

$$G_{ij} = k T_{ij}$$

son ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales que determinan la dinámica del tensor métrico. La constante de proporcionalidad k debe ser tal que permita recuperar la ecuación para el potencial newtoniano en el límite de campo débil.

Tiempo después, y por razones que discutiremos luego, Einstein agregó un término que no afectaba ni la simetría de la ecuación ni la anulación de la divergencia. La propia métrica tenía esas dos propiedades; entonces propuso

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = k T_{ij}$$

↙ *signature (+---)*

Por el momento ignoraremos la constante Λ , que sería una nueva constante universal a la que Einstein denominó constante cosmológica.

Tomando la traza de la ecuación de Einstein original tenemos que

$$R - \frac{1}{2} g R = k T \quad \text{donde } T \doteq T^i{}_i$$

$\Rightarrow -R = kT$, lo que permite reescribir las ecuaciones como

$$R_{ij} = k \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right)$$

Nótese que en todo evento donde haya vacío se anula el Ricci.

Consideremos un campo débil; luego existen cartas donde la métrica se desvía poco de la de Minkowski: $g_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) + h_{ij}$, $|h_{ij}| \ll 1$.

Aproximando al orden más bajo en la perturbación h_{ij} no entrarán en el Ricci los productos de símbolos de Christoffel, que son cuadráticos en derivadas de la perturbación. Entonces

$$R_{ij} = R^k{}_{i\ell} e^{\ell}{}_j \approx \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (h_{kj, i\ell} + h_{i\ell, kj} - h_{k\ell, ij} - h_{ij, k\ell})$$

En particular, en un campo estático es $h_{ij,0} = 0$, y resulta

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \eta^{k\ell} h_{00, k\ell} \overset{\text{signatura } (+---)}{=} \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \overset{g_{00} = 1 + 2\phi/c^2}{=} \frac{1}{2} \nabla^2 \frac{2\phi}{c^2} \overset{\text{Newton}}{=} \frac{4\pi G}{c^4} \rho$$

Este resultado se debe igualar a $k \left(T_{00} - \frac{1}{2} T \right)$ donde el propio T_{ij} debe ser entendido como una perturbación. Por lo tanto, $T_{00} \approx T^{00} = \rho$. Además la materia no relativista cumple que $p \ll \rho \Rightarrow T \approx \rho$ (signatura +---). Así

llegamos a

$$\frac{4\pi G}{c^4} \rho \approx R_{00} = k \left(T_{00} - \frac{1}{2} T \right) \approx \frac{k\rho}{2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

► Conservación automática y libertad de gauge

La "conservación automática" de las ecuaciones de Maxwell y de Einstein no sólo impone la conservación de las fuentes, sino que tiene un significado más profundo. En la conservación automática tenemos identidades entre las ecuaciones dinámicas de la teoría; por lo tanto, las ecuaciones dinámicas no son independientes. Aunque existan tantas ecuaciones dinámicas como componentes del potencial electromagnético en el caso de la teoría de Maxwell, o como componentes del tensor métrico en el caso de la Relatividad General, las ecuaciones no podrán determinar la totalidad de las componentes.

Como sabemos, de las cuatro ecuaciones dinámicas de Maxwell para el cuadri-potencial, sólo dos de sus componentes quedarán determinadas mientras que las dos restantes corresponden a libertades de gauge del cuadripotencial. Sólo dos genuinos grados de libertad se expresan en las ecuaciones de Maxwell, que en el caso de las ondas electromagnéticas corresponden a los dos estados de polarización independientes.

De igual modo, las diez ecuaciones de Einstein no determinan las diez componentes del tensor métrico. Si así lo hicieran, no reflejarían la "libertad de gauge" de elegir distintas cartas para una misma geometría. Las ecuaciones de Einstein son ecuaciones para la geometría del espacio-tiempo que no suponen ninguna "fijación de gauge" respecto de la carta a ser utilizada; son ecuaciones que relacionan objetos geométricos (tensores) independientes de la carta. En el capítulo siguiente estudiaremos la propagación de ondas gravitatorias, y veremos cuántos genuinos grados de libertad expresan estas ecuaciones.

Así como el primer teorema de Noether estudia las leyes de conservación derivadas de las simetrías "globales" o "rígidas" (independientes de las variables de integración) de la acción, el segundo teorema de Noether se ocupa de las simetrías "locales" o "de gauge" que conducen a relaciones entre las ecuaciones dinámicas o sus derivadas y la consecuente disminución de los grados de libertad (algunas variables dinámicas son "puro gauge").

15 Campo gravitatorio débil. Ondas gravitatorias planas. Detectores de ondas gravitatorias

▶ Aproximación de campo gravitatorio-inercial débil

Como fue dicho en el capítulo anterior, en regiones donde el campo gravitatorio-inercial es débil existen cartas donde las componentes de la métrica se desvían poco de las de la métrica minkowskiana en la carta cartesiana:

$$g_{ij} = \text{diag} (+ - - -) + h_{ij}, \quad |h_{ij}| \ll 1.$$

Nótese que esta forma se preserva ante transformaciones de Lorentz de las coordenadas, pues éstas dejan invariante el símbolo de Minkowski η_{ij} .

En la aproximación lineal en la perturbación h_{ij} el Ricci resulta igual a

$$R_{ij} = R^{\ell}{}_{\ell ij} \approx \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (h_{kj, i\ell} + h_{i\ell, kj} - h_{k\ell, ij} - h_{ij, k\ell})$$

(usamos el símbolo de Minkowski para subir y bajar índices de magnitudes que son de primer orden en la perturbación).

▶ Libertad de gauge

Podría ocurrir que dos configuraciones "distintas" de métrica y campos de materia y radiación sean en realidad la misma configuración en dos cartas distintas (los mismos objetos geométricos descompuestos en bases diferentes). Esto significa que las componentes de la métrica no pueden ser en sí mismas genuinos grados de libertad, pues están sujetas a la ambigüedad que resulta de la libre elección de la carta. Aunque las ecuaciones de Einstein son tantas como componentes independientes tiene la métrica (10 componentes para un tensor $\binom{0}{2}$ simétrico), no deberían ser todas ellas independientes; si lo fueran determinarían las 10 componentes del tensor métrico sin dejar lugar a la libre elección de la carta. Ese es precisamente el significado de la "conservación automática" contenida en la identidad $G^i{}_{j;i} \equiv 0$ que expresa una relación entre las ecuaciones de Einstein (en el sentido del 2do. teorema de Noether).

Una situación similar se da en las ecuaciones dinámicas electromagnéticas. La ecuación $d \times \tilde{F} = -\mu_0 * \tilde{j}$ es una ecuación diferencial de segundo orden para el potencial \tilde{A} . Pero esa ecuación dinámica es invariante ante la transformación de gauge del potencial: si $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A} + \tilde{d}\tilde{\chi}$ entonces \tilde{F} no cambia. Por lo tanto las cuatro ecuaciones implicadas en $d \times \tilde{F} = -\mu_0 * \tilde{j}$ no deberían determinar las cuatro componentes de \tilde{A} ; deben estar ligadas entre sí. Dicho de otro modo, en la variación de la acción electromagnética respecto del potencial hay una variación que es inocua (la acción es invariante de gauge) y no juega en el principio variacional; por lo tanto las ecuaciones dinámicas que resultan no pueden ser independientes. En efecto no lo son, porque tienen conservación automática: $d(d * \tilde{F}) \equiv 0$.

Así podemos concluir que las componentes de la métrica deben poseer una libertad de gauge que no afecta las ecuaciones de Einstein. En efecto en la aproximación lineal, el Ricci es invariante ante la transformación de gauge

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \quad |\xi_{i,j}| \ll 1$$

La invariancia es fácilmente verificable reemplazando en la forma linealizada del Ricci.* La expresión no es más que la linealización de la transformación de gauge para el caso no lineal, que veremos al final del curso cuando probaremos que la acción de la gravedad es invariante ante un cambio infinitesimal del tensor métrico de la forma

$$g \longrightarrow g + \mathcal{L}_{\xi} g$$

En efecto es $(\mathcal{L}_{\xi} g)_{ij} = \xi^k g_{ij,k} + g_{kj} \xi^k_{,i} + g_{ik} \xi^k_{,j}$. Como ξ^k y sus derivadas deben ser infinitesimales se tiene que

$$(\mathcal{L}_{\xi} (\eta+h))_{ij} \simeq \eta_{kj} \xi^k_{,i} + \eta_{ik} \xi^k_{,j} \simeq \xi_{j,i} + \xi_{i,j}$$

* También el Riemann linealizado es invariante ante esta transformación.

La transformación de gauge se puede interpretar también en términos de la transformación de las componentes de la métrica ante un cambio infinitesimal de coordenadas del tipo

$$x^i \rightarrow x^i + \xi^i$$

Entonces

$$g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j \rightarrow g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j + g_{ij} d\xi^i \otimes d\tilde{x}^j + g_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\xi^j + \dots$$

$$(g_{ij} + g_{kj} \xi^{k,i} + g_{ik} \xi^{k,j}) d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j$$

\nearrow \nearrow \nearrow \Rightarrow
 $g_{ij} + h_{ij}$ $\approx g_{kj}$ $\approx g_{ik}$ $\Rightarrow h_{ij} \rightarrow h_{ij} + \xi_{j,i} + \xi_{i,j}$

► Gauge de Lorenz

Podemos explotar la libertad de gauge para fijar el gauge de manera tal que el Ricci linealizado resulte lo más sencillo posible. Como hay cuatro generadores ξ_i podremos fijar cuatro condiciones. El gauge de Lorenz es una elección del gauge que permite eliminar tres de los cuatro términos que constituyen el Ricci linealizado:

$$\eta^{kl} h_{kj,e} = \frac{1}{2} \eta^{kl} h_{kl,e}$$

$j=0,1,2,3$
gauge de Lorenz

Dado que subimos y bajamos índices con el símbolo de Minkowski, podemos escribir

$$h^l{}_{j,l} = \frac{1}{2} h_{,j}$$

donde h es la traza de la perturbación: $h = h^k{}_k$.

Entonces

$$R_{ij} = R^l{}_{i\ell}{}^j \approx \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (h_{kj, i\ell} + h_{i\ell, kj} - h_{k\ell, ij} - h_{ij, k\ell})$$

$\frac{1}{2} h_{,ji}$
 $\frac{1}{2} h_{,ji}$
 $h_{,ij}$

Por lo tanto es

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \square h_{ij}$$

Ricci linealizado en el gauge de Lorenz

donde \square es el d'Alembertiano en la métrica de Minkowski. De esta manera el tensor de Einstein queda

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \approx -\frac{1}{2} (\square h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \square h)$$

Como se ve, conviene definir

$$\bar{h}_{ij} \doteq h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} h$$

Nótese que $\bar{h} = -h$ (pues $\eta^i{}_i = \delta^i{}_i = 4$), entonces

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h}$$

Con la definición de \bar{h}_{ij} , el tensor de Einstein queda

$$G_{ij} \approx -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{ij}$$

tensor de Einstein linealizado en el gauge de Lorenz

y el gauge de Lorenz queda $\bar{h}^{\ell}{}_{j, \ell} = 0$, y las ecuaciones de Einstein

linealizadas en el gauge de Lorenz son

$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij}$$

▶ Campo estático débil en el gauge de Lorenz

Para un fluido de materia no relativista en reposo es (se desprecia la presión)

$$T^{ij} = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0) \approx T_{ij}$$

Como el tensor de energía-momento debe verse como una perturbación, sus índices se bajan con el símbolo de Minkowski. Reemplazando en las ecuaciones de Einstein

$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} \text{diag}(\rho, 0, 0, 0)$$

signature (+---): $-\nabla^2$ (estático)
 $\uparrow \rho \approx c^2$

$$\Rightarrow \bar{h}_{ij} = \text{diag}\left(\frac{4\Phi}{c^2}, 0, 0, 0\right)$$

es solución y cumple el gauge de Lorenz porque Φ no depende de t

$$\Rightarrow h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h} = \text{diag}\left(\frac{2\Phi}{c^2}, \frac{2\Phi}{c^2}, \frac{2\Phi}{c^2}, \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

$\uparrow \uparrow$
signature (+---)

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

campo estático (Φ no depende de t) débil en el gauge de Lorenz

▶ Propagación de perturbaciones: ondas gravitatorias

Las ecuaciones de Einstein en vacío son $R_{ij} = 0$. Entonces tenemos la ecuación de onda para la perturbación, que se propaga a la velocidad c :

$$\square h_{ij} = 0 \quad (\text{junto con el gauge de Lorenz})$$

Proponemos como solución una onda monocromática plana

$$h_{ij} = H_{ij} e^{i k_e x^t}$$

↑
cte (tensor de polarización)

donde \tilde{k} es un vector nulo para satisfacer la ecuación de onda.

Para cumplir el gauge de Lorenz $h^t_{j,e} = \frac{1}{2} h_{,j}$ tenemos que

$$k^t H_{e,j} - \frac{1}{2} k_j H = 0$$

Como sucede en electromagnetismo, el gauge de Lorenz no fija completamente el gauge. Existen transformaciones de gauge que preservan el gauge de Lorenz; en efecto, aplicando la transformación de gauge

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i}, \quad h^t_{j,e} - \frac{1}{2} h_{,j} \text{ cambia a}$$

$$h^t_{j,e} - \frac{1}{2} h_{,j} + \eta^{kl} (\xi_{k,i,j} + \xi_{j,i,k}),_e - \frac{1}{2} \eta^{kl} (\xi_{k,e} + \xi_{e,k}),_j$$

← cambio $l \leftrightarrow k$

$$= h^t_{j,e} - \frac{1}{2} h_{,j} + \square \xi_j$$

se cancelan

Entonces en el gauge de Lorenz todavía podemos utilizar las transformaciones tales que

$$\square \xi_j = 0$$

Vamos a considerar una propagación en la dirección x :

$$h_{ij} = H_{ij} e^{ik(x-ct)} \quad k_j = (-k, k, 0, 0)$$

y aprovecharemos la libertad de gauge remanente eligiendo

$$\xi_j = -\frac{\Xi_j}{ik} e^{ik(z-ct)}$$

que satisface que $\square \xi_j = 0$. Esto significa que el tensor de polarización H_{ij} está sujeto a las cuatro condiciones que provienen del gauge de Lorenz, más cuatro libertades remanentes que se expresan a través de las constantes Ξ_j que pueden usarse para fijar otras cuatro condiciones sobre el tensor de polarización. De esta forma, habrá ocho condiciones sobre las diez componentes del tensor de polarización. Así sólo dos componentes son genuinos grados de libertad del campo gravitatorio-inercial asociado a la onda.

Veremos que la libertad de gauge remanente se puede usar para eliminar el sector temporal de la perturbación h_{ij} . En efecto, la transformación de gauge para h_{i0} conduce a

$$\begin{aligned} H_{00} &\rightarrow H_{00} + 2\Xi_0 \\ H_{10} &\rightarrow H_{10} + \Xi_1 - \Xi_0 \\ H_{20} &\rightarrow H_{20} + \Xi_2 \\ H_{30} &\rightarrow H_{30} + \Xi_3 \end{aligned}$$

Una vez elegidas las Ξ_i para anular las H_{i0} , volvemos a las cuatro ecuaciones para el gauge de Lorenz, que ahora quedan

$$0 = k^2 H_{0j} - \frac{1}{2} k_j H = -k \underbrace{H_{0j}}_{=0 \text{ (} H_{ij} \text{ es simétrico)}} - \frac{1}{2} k_j H$$

$$j=0) \quad 0 = \frac{1}{2} k H \quad \Rightarrow \quad \boxed{H=0} \quad k_2 + k_{22} \text{ se anula}$$

$$j=\alpha) \quad 0 = k H_{3\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_{3\alpha} = 0} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

En este gauge, el tensor de polarización tiene traza nula, y sus únicas componentes no nulas están en el sector espacial transversal a la dirección de propagación:

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_x \\ 0 & H_x & -H_+ \end{pmatrix} = H_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \ 0 \\ 0 & 0 \ -1 \end{pmatrix} + H_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \ 1 \\ 0 & 1 \ 0 \end{pmatrix}$$

Este es el denominado gauge TT (transverse-traceless). Los términos de amplitudes H_+, H_x representan dos estados de polarización independientes. Entre ambos hay una rotación de 45° :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

► Movimiento de partículas libremente gravitantes

Veamos la consecuencia del paso de una onda gravitatoria sobre el comportamiento de partículas de prueba libres. Puede resultar sorprendente que la cuadrivelocidad $U^i = (c, 0, 0, 0)$ resuelve la ecuación de las geodésicas

$$\frac{dU^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} U^j U^k = 0$$

Esto es así porque en el gauge considerado resulta $\Gamma^i_{00} = 0$:

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \eta^{i\ell} (h_{0\ell,0} + h_{\ell 0,0} - h_{00,\ell}) = 0$$

Entonces, las partículas que están inicialmente en reposo en las coordenadas utilizadas en este gauge, permanecerán en reposo. Pero esto no quiere decir que el paso de la onda no tenga consecuencias detectables. La onda altera la geometría del espacio-tiempo, y por lo tanto altera las distancias entre las partículas "en reposo".

Para ver el efecto sobre las distancias, consideremos dos partículas cuyas respectivas líneas de universo son $(ct, 0, \epsilon, 0)$ y $(ct, 0, 0, 0)$. Las partículas tienen una separación infinitesimal ϵ en la dirección y . El intervalo entre eventos simultáneos ($dt = 0$) es una distancia, y resulta

$$ds = \sqrt{|g_{ij} dx^i dx^j|} = \epsilon \sqrt{|g_{22}|} = \epsilon \sqrt{|-1 + h_{22}|} \approx \epsilon \left(1 - \frac{1}{2} h_{22}\right)$$

Tomando, por ejemplo, la polarización +:

$$ds = \epsilon \left(1 - \frac{1}{2} H_+ \sin k(x-ct)\right)$$

\uparrow
 $x=0$

Podríamos hacer lo mismo con una partícula con una separación ϵ del origen en la dirección z ; en ese caso el cálculo se realiza con $h_{33} = -h_{22}$:

$$ds = \epsilon \left(1 + \frac{1}{2} H_+ \sin k(x-ct)\right)$$

\uparrow
 $x=0$

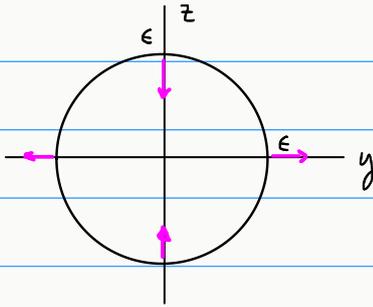
De modo que cuando aumenta la distancia al origen de la partícula desplazada en la dirección y , disminuye la distancia al origen de la partícula desplazada en la dirección z . Ambas distancias oscilan a contrafase.

Si imaginamos un círculo de partículas de prueba centrado en el origen del plano $y-z$ que es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, tendremos el siguiente comportamiento de las distancias al origen para cada una de las dos polarizaciones independientes:

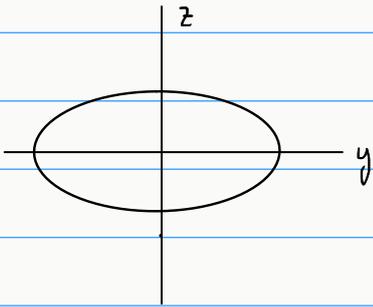
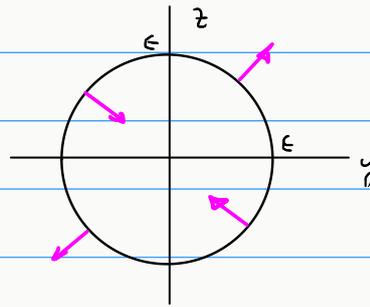
Polarización +



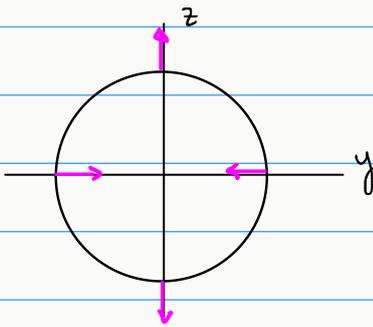
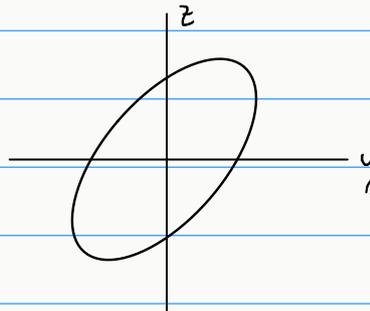
Polarización X



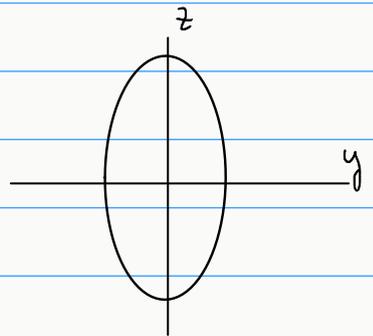
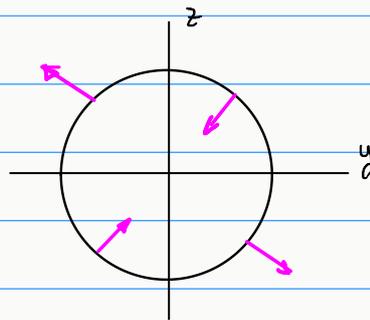
$kct = 0$



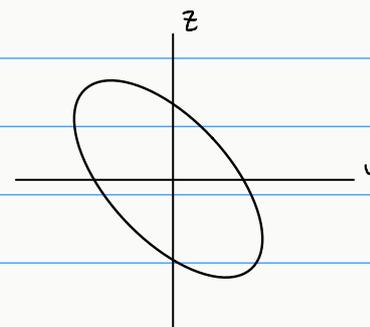
$kct = \frac{\pi}{2}$



$kct = \pi$

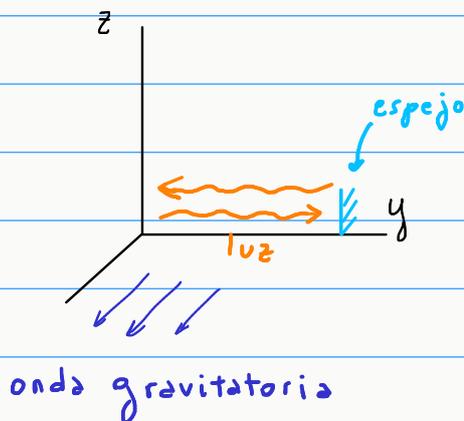


$kct = \frac{3}{2}\pi$



Los estados de polarización son simétricos ante rotaciones de 180° . En las representaciones del grupo de rotaciones esta característica corresponde a la representación de spin 2. Del mismo modo el campo electromagnético posee simetría de 360° lo que corresponde a la representación de spin 1, mientras que los espinores de la representación de spin $1/2$ manifiestan simetría ante rotación de 720° (ante rotación de 360° cambian de signo).

► **Detectores interferométricos.** Consideremos una onda gravitatoria, digamos con polarización +, propagándose en la dirección x , y un rayo de luz propagándose sobre el eje y .



En $y=L$ hay un espejo, que permanecerá en $y=L$ como ya fue dicho, donde la luz se refleja para retornar al origen donde se ubica un emisor-detector que también mantiene sus coordenadas espaciales fijas.

Sobre la línea de universo de un rayo de luz el intervalo es nulo:

$$0 = ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{22} dy^2 = c^2 dt^2 + (-1 + h_{22}) dy^2$$

$$\Rightarrow c dt \approx \pm \sqrt{1 - h_{22}} dy$$

Ejercicio: Discuta si la línea de universo nula propuesta para el rayo de luz es una geodésica para la geometría de la onda gravitatoria. Analice la necesidad de una componente x en el vector tangente a la geodésica nula. Muestre que el desplazamiento en x del rayo de luz sólo afecta la relación entre dt y dy ya obtenida al orden siguiente en el desarrollo perturbativo.

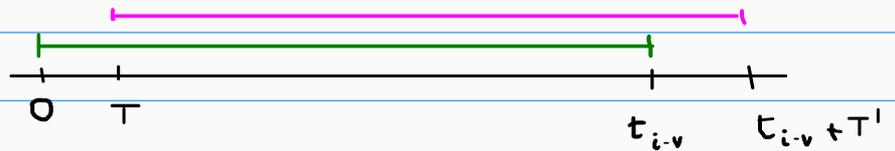
Queremos mostrar que el paso de la onda gravitatoria produce una diferencia entre la frecuencia de emisión de la luz y la frecuencia de recepción cuando la luz regresa al origen. Notemos que para un reloj fijo el tiempo propio coincide con el tiempo coordenado porque $g_{00} = 1$. Integremos el viaje de ida y vuelta de un pulso de luz:

$$\int_0^{t_{i-v}} \frac{c dt}{\sqrt{1 - h_{22}(t, x=0)}} = 2L$$

Un segundo pulso parte un tiempo T después que el anterior (período de emisión) y regresa al origen un tiempo T' después del regreso del primero (período de recepción). Entonces para el segundo pulso la integral es

$$\int_T^{T'+t_{i-v}} \frac{c dt}{\sqrt{1-h_+(t, x=0)}} = 2L$$

Restando ambas integrales tendremos que sólo sobreviven los intervalos de integración $(0, T)$ y (t_{i-v}, T') :



$$\int_0^T \frac{c dt}{\sqrt{1-h_+(t, x=0)}} = \int_{t_{i-v}}^{T'+t_{i-v}} \frac{c dt}{\sqrt{1-h_+(t, x=0)}}$$

Si el período de la luz es mucho menor que el período de la onda gravitatoria podremos aproximar:

$$\frac{T}{\sqrt{1-h_+(0, x=0)}} = \frac{T'}{\sqrt{1-h_+(t_{i-v}, x=0)}}$$

Es decir $\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{1-h_+(0, 0)}}{\sqrt{1-h_+(t_{i-v}, 0)}} \approx 1 - \frac{1}{2} [h_+(0, 0) - h_+(\frac{2L}{c}, 0)]$

Este resultado puede compararse con el que se obtiene para rayos que viajen sobre el eje z . Como $h_{33} = -h_{22}$ es suficiente cambiar el signo de la perturbación en el resultado anterior. Así tendremos que

$$\frac{v'_y - v'_z}{v} = -h_+(0, 0) + h_+(\frac{2L}{c}, 0) \quad \text{para longitudes recorridas iguales}$$

Para la onda plana monocromática es $h_+(t, x) = H_+ \sin k(x-ct)$

$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{grav}}}$

$$\frac{\nu'_y - \nu'_z}{\nu} = H_+ \sin 4\pi \frac{L}{\lambda_{\text{grav}}}$$

Si la luz no viajara en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda gravitatoria, el resultado se modifica un poco.

La diferencia de frecuencia se mide mediante detectores interferométricos que se basan en la idea del interferómetro de Michelson (LIGO, VIRGO KAGRA, GEO600). LIGO puede detectar una amplitud $H \sim 10^{-23}$ ("strain") en la banda de 100 Hz a 1 kHz. Es una banda adecuada para ondas gravitatorias que provengan de la coalescencia de agujeros negros de masa estelar o estrellas de neutrones. Estas frecuencias de emisión corresponden a longitudes de onda λ_{grav} en un rango de cientos a algunos miles de kilómetros. Esto requiere que los brazos del interferómetro tengan una longitud comparable. Los observatorios de LIGO (Hanford y Livingston) tienen brazos de 4 km, pero la longitud efectiva es de 1200 km.

La primera detección ocurrió en 2015 (GW150914). Se trató de la coalescencia de dos agujeros negros de 29 y 36 masas solares hace $1,3 \times 10^9$ años, a la distancia de 410 Mpc; 3 masas solares se convirtieron en energía radiada. A su vez GW170817 fue la primera detección de la coalescencia de dos estrellas de neutrones, lo que permitió su confirmación en ondas electromagnéticas (un GRB fue observado 1,7 s después). Actualmente se detecta alrededor de un evento por semana. Está programada la construcción de un observatorio en el espacio con brazos de millones de kilómetros (LISA), para poder observar en frecuencias más bajas ($\sim 10^{-2}$ Hz) y abarcar otro tipo de fenómenos como la coalescencia de los mega-agujeros negros ubicados en los centros de las galaxias, sistemas estelares binarios en nuestra galaxia, ondas gravitatorias primordiales, etc.

<https://www.ligo.caltech.edu/>

<https://www.youtube.com/watch?v=aEPIwEJmZyE>

16 Geometría de Schwarzschild. Estructura causal. Horizonte de eventos

► Solución de Schwarzschild. Agujero negro

Las ecuaciones de Einstein son ecuaciones no lineales de segundo orden para la métrica. No existe entonces la "solución general de la ecuación homogénea". Aquellas geometrías cuyo tensor de Ricci se anula son soluciones "de vacío" (corresponden a $T_{ij} = 0$). Para obtener soluciones es útil proponer alguna simetría particular que ayude a buscar la solución; de otra forma deberíamos tratar con diez ecuaciones y diez incógnitas. Buscaremos entonces una solución de $R_{ij} = 0$ que sea estática y esféricamente simétrica. Esto nos permite anticipar algunos aspectos que la métrica debería tener en una carta apropiada; así podemos proponer que el intervalo tenga la forma

$$ds^2 = f(r) g(r) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{g(r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Las funciones $f(r)$ y $g(r)$ son incógnitas. No dependen de t porque buscamos una solución estática; no dependen de θ, φ porque deseamos una simetría esférica. La parte angular de la métrica propuesta implica la existencia de una carta tal que el elemento de arco sobre las esferas $r = cte$ se escribe en la forma habitual; esto significa que el área de esas esferas es $4\pi r^2$. Sin embargo la coordenada radial no es una distancia, pues la distancia radial está afectada por la función $g(r)$; el área de la esfera no tiene la relación usual con su radio porque el espacio está curvado. También hay un efecto de curvatura en la dimensión asociada a la coordenada temporal, como se espera que suceda en presencia de gravedad.

En 1916 Karl Schwarzschild obtuvo la solución:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

La constante M es una constante de integración. Por nuestro conocimiento de la relación entre g_{00} y el potencial newtoniano en el régimen de campo débil, vemos que M juega el papel de la masa del objeto que genera el campo gravitatorio. Puede tratarse de una masa distribuida en forma esféricamente simétrica en alguna región del espacio; por ejemplo, una estrella o planeta esférico, ignorando su rotación (que daría a una simetría axial en lugar de esférica). Como la solución obtenida es una solución de vacío, entonces corresponderá a la geometría exterior al objeto que produce el campo gravitatorio. Si $M=0$ obtenemos el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas; por lo tanto, en las regiones donde $r \gg GMc^{-2}$ la geometría de Schwarzschild es una perturbación de la geometría plana (nótese que esta carta no es la que corresponde a la forma del campo débil en el gauge de Lorenz).

▶ **Teorema de Birkhoff (1923):** la geometría de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein. Esto significa que la solución esféricamente simétrica es necesariamente estática. Esto es, si el objeto que genera el campo gravitatorio "latiera" sin perder su simetría esférica, el latido no generaría una onda gravitatoria (no hay radiación monopolar en Relatividad General, como no la hay en electromagnetismo). Si a las funciones incógnitas f y g le hubiéramos dado una dependencia en la coordenada t , entonces las ecuaciones de Einstein habrían impedido que g dependiera de t , y habrían dicho que f es una función arbitraria de t (que se absorbería redefiniendo la coordenada t).

El teorema es aplicable también al interior de una cáscara hueca. En ese caso no hay razón para que la métrica sea singular en $r=0$; entonces la constante de integración M debe elegirse igual a cero, y tendremos la geometría de Minkowski.

Estudiaremos la solución de Schwarzschild en todo el rango de la coordenada r , como si el objeto que origina el campo gravitatorio fuese puntual.

Vemos que las componentes del tensor métrico en esta carta tienen un mal comportamiento en dos valores de r : en $r=0$, y en el llamado radio de Schwarzschild

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

donde se anula g_{00} y g_{rr} diverge. Además, en la región $r < r_s$ la coordenada temporal no es t sino r , debido a los cambios de signo de g_{00} y g_{rr} .

La singularidad en $r=0$ es genuinamente geométrica; en $r=0$ no sólo divergen g_{00} y g_{rr} , sino también invariantes como el escalar de Kretschmann $R_{tijk} R^{tijk}$ que vale $12 r_s^2 r^{-6}$. En cambio, el comportamiento de g_{00} y g_{rr} en torno a $r=r_s$ puede mejorarse mediante un cambio de carta.

▶ Estructura causal

Para conocer cómo es la estructura causal de la geometría de Schwarzschild debemos conocer el cono de luz en cada evento. Comencemos averiguando cómo se ven los conos de luz en el plano de las coordenadas ct, r . Las líneas de universo radiales ($d\theta = 0 = d\varphi$) nulas satisfacen que

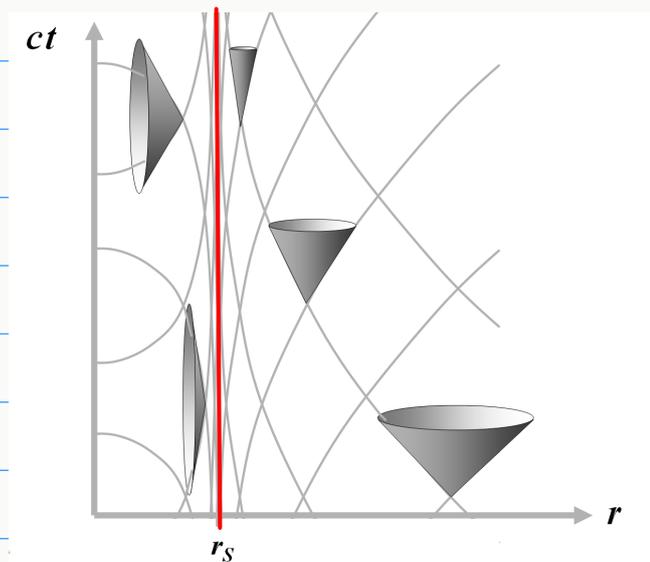
$$ds^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} = 0$$

No es necesario verificar la ecuación de las geodésicas en este caso, porque la simetría esférica indica que deben existir geodésicas radiales nulas.

Entonces las geodésicas radiales nulas satisfacen que

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

dt/dr diverge cuando $r \rightarrow r_s$. La Figura muestra el comportamiento de estas curvas, y los conos de luz futuros:



Nótese que la elección del futuro es meramente convencional en la región $r > r_s$, pues hay invariancia ante cambio de t por $-t$. En cambio, en la región $r < r_s$ la coordenada temporal es r (debido al cambio de signo de g_{tt} y g_{rr}); la métrica no es invariante ante cambio de r por $-r$. En la región $r < r_s$ las dos posibles elecciones de futuro conducen a dos estructuras causales diferentes. Hemos elegido el futuro considerando partículas de prueba que caen hacia la singularidad $r=0$. El aspecto más notable de esta estructura causal es que la línea de universo de cualquier partícula, libre o no, o rayo de luz en la región $r < r_s$ inevitablemente finaliza en la singularidad $r=0$.

► **Horizonte de eventos:** la superficie $r = r_s$ se denomina horizonte de eventos pues oculta los eventos que están en su interior. Los eventos que están en el

interior no pueden ser causa de eventos externos pues nada, ni siquiera la luz, puede escapar de la región interior. La superficie del horizonte de eventos es negra a los ojos de un observador exterior. Esto motiva la denominación de "agujero negro" para las soluciones que poseen horizonte de eventos.

Recordemos que estamos trabajando con la solución de vacío. De modo que para que el horizonte de eventos quede expuesto, el objeto que es la fuente del campo gravitatorio debería compactarse "detrás" de su horizonte. El valor de r_s para un objeto de masa igual a la masa solar es de 2,95 km.

La Figura también muestra que un objeto que cae hacia el agujero negro desde la región exterior alcanza el horizonte de eventos cuando t tiende a infinito. Pero no debemos pensar que esto indica que el horizonte no puede atravesarse. Recordemos que t no es más que una coordenada de una carta que es "defectuosa" en la vecindad del horizonte. Luego demostraremos que la partícula libremente gravitante no sólo alcanza el horizonte en un tiempo propio finito, sino que también alcanza la singularidad en un tiempo propio finito.

En el interior del horizonte toda partícula se encamina irreversiblemente hacia la singularidad; ninguna fuerza puede desviarla de ese destino, porque la estructura de conos de luz lo impide. Aunque el tensor de Ricci es cero, las fuerzas de marea, que son proporcionales al Riemann, divergen hacia la singularidad.

▶ Corrimiento al rojo gravitatorio

Supongamos que una fuente emite con frecuencia ν_f desde una línea de

universo r_f, Θ, φ constantes. La frecuencia medida en un receptor fijo en otra posición r_{obs}, Θ, φ es (ver Cap. 3)

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_f} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_f)}{g_{00}(r_{obs})}} = \left[\frac{1 - \frac{r_s}{r_f}}{1 - \frac{r_s}{r_{obs}}} \right]^{1/2}$$

La frecuencia observada se corre al rojo hasta tender a cero cuando la posición de la fuente tiende al horizonte de eventos ($r_f \rightarrow r_s$).

► Representación pictórica

La geometría espacial de la región exterior admite una representación pictórica en términos de la geometría de una superficie embebida en un espacio euclidiano. Para ello tomemos una hipersuperficie $t=\text{constante}$ de la solución de Schwarzschild, cuyo elemento de longitud es

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2)$$

Todavía hay aquí 3 dimensiones; no podemos embeber esta geometría como una superficie de un espacio euclidiano de 3 dimensiones, como es nuestro objetivo. Para ello restringiremos la coordenada Θ a su valor "ecuatorial" $\Theta = \pi/2$. Ahora tenemos

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

Queremos ver qué forma debería tener una superficie embebida en un espacio euclidiano de 3 dimensiones para que su elemento de longitud (inducido por la métrica euclidiana) tenga la forma de arriba.

Vamos a mostrar que la superficie debe ser el paraboloide de revolución generado por la parábola

$$r = r_s + \frac{z^2}{4r_s}$$

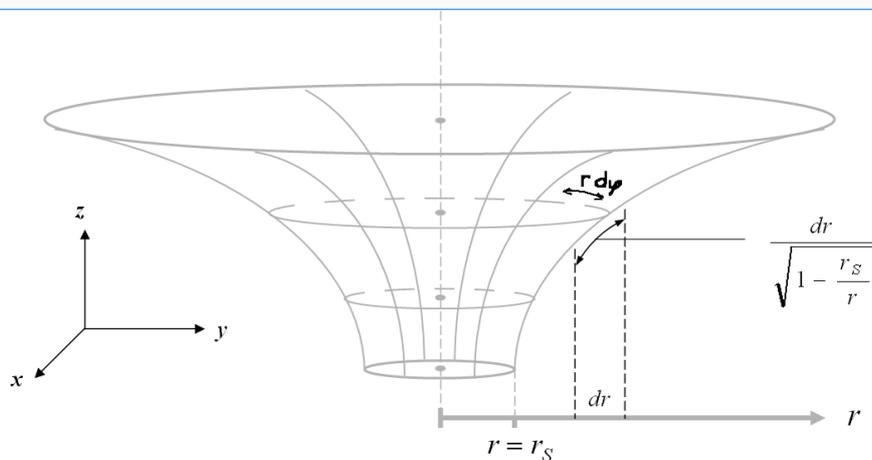
del espacio euclidiano (r, φ, z son coordenadas cilíndricas). En efecto, resulta

$$dr = \frac{z}{2r_s} dz$$

Entonces, en la distancia euclidiana medida sobre la parábola se tiene que

$$dr^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{4r_s^2}{z^2}\right) dr^2 = \left(1 + \frac{1}{\frac{r}{r_s} - 1}\right) dr^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

que es la parte radial de $d\ell^2$.



► Movimiento de partícula libremente gravitante

En lugar de resolver la ecuación de las geodésicas, nos valdremos de las primeras integrales de movimiento que de ella emanan:

- i) las componentes de la métrica no dependen de t : se conserva p_t
- ii) las componentes de la métrica no dependen de φ : se conserva p_φ

donde $p_t = g_{tt} p^t = g_{tt} m \frac{dt}{dz} = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) m \frac{dt}{dz} \equiv E$

↑ *signatura (+---)*

$$p_\varphi = g_{\varphi\varphi} p^\varphi = g_{\varphi\varphi} m \frac{d\varphi}{dz} = -r^2 \sin^2\theta m \frac{d\varphi}{dz} \equiv -L$$

Además podemos apelar a la simetría esférica para afirmar que el movimiento se realiza sobre un "plano" de simetría, definido por las condiciones iniciales, que puede tomarse como la superficie ecuatorial si elegimos las coordenadas para que Θ sea igual a $\pi/2$ sobre la misma. De esa forma también tendremos que $p^\Theta = m d\Theta/dz = 0$.

Por otro lado es $\bar{p} \cdot \bar{p} = m^2 c^2$, entonces

↑ *signatura (+---)*

$$m^2 c^2 = g_{ij} p^i p^j = \underbrace{g_{tt}^{-1}}_{\frac{c^{-2}}{1 - \frac{r_s}{r}}} E^2 + \underbrace{g_{rr}}_{-\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}} m^2 \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \underbrace{g_{\varphi\varphi}^{-1}}_{-\frac{1}{r^2 \underbrace{\sin^2\theta}_1}} L^2$$

Reordenando términos:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{G m M}{r} - \frac{G M L^2}{m r^3 c^2} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2 m c^2} \equiv e$$

↑ *tiempo propio*

↑ *término relativista*

Esta sería la ecuación de conservación de la energía newtoniana si no fuera por la presencia de un término relativista, y del tiempo propio en lugar del tiempo absoluto newtoniano.

► **Movimiento radial:** si el movimiento es radial entonces es $L=0$,

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{2\bar{e} + \frac{2GM}{r}} \quad \bar{e} = \frac{e}{m}$$

$L=0$ elimina el término relativista. El único vestigio de relatividad es el tiempo propio. Esto significa que el tiempo propio que demanda el recorrido entre un r inicial y un r final es igual al tiempo absoluto newtoniano para esa distancia. Como el tiempo newtoniano para llegar a $r=0$ es finito para cualquier r inicial finito compatible con el valor dado de "energía mecánica newtoniana" e , concluimos que la partícula alcanza tanto el horizonte de eventos como la singularidad en un tiempo propio finito,

$$\Delta\tau = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2\bar{e} + \frac{2GM}{r}}}, \quad r_1 > r_2$$

En particular, para condiciones iniciales tales que $\bar{e}=0$, el tiempo propio para alcanzar la singularidad es

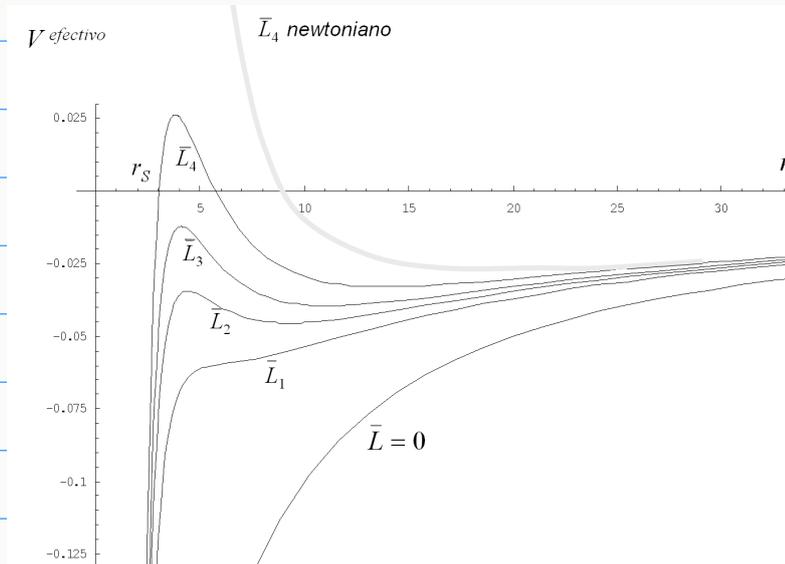
$$\Delta\tau = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{r}}} = \left(\frac{2r_1^3}{9GM} \right)^{1/2}$$

► **Movimiento orbital:** en la ecuación de conservación de la energía vemos un potencial efectivo por unidad de masa para el movimiento radial,

$$V^{\text{efectivo}} = \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\bar{L}^2}{r^3c^2} \quad \leftarrow \text{término relativista}$$

donde $\bar{L} = L/m$ es el momento angular por unidad de masa.

La Figura muestra el potencial efectivo por unidad de masa para diferentes valores del momento angular por unidad de masa:



Para $r \gg r_s$ el potencial es esencialmente newtoniano. Pero a medida que r se acerca a r_s empieza a prevalecer el término relativista. Eso produce que el potencial efectivo no sólo tenga el esperable mínimo (órbita circular estable), sino que también posea un máximo (órbita circular inestable), ambos para valores suficientemente grandes de \bar{L} .

Calculando la derivada del potencial se encuentra que el potencial posee extremos si $\bar{L}^2 c^2 > 12 G^2 M^2$. Los extremos del potencial corresponden a los siguientes valores de la coordenada radial:

$$r \Big|_{\substack{V_{\min} \\ V_{\max}}} = \frac{\bar{L}^2}{2GM} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{12 G^2 M^2}{\bar{L}^2 c^2}} \right]$$

El signo positivo corresponde al radio de la órbita circular estable. El valor newtoniano se obtiene en el límite $c \rightarrow \infty$:

$$r_{\text{órbita circular newtoniana}} = \frac{\bar{L}^2}{GM}$$

Mientras que la órbita circular newtoniana existe para cualquier valor de \bar{L} distinto de cero, en Relatividad las órbitas circulares, estable e inestable, existen en tanto que $\bar{L}^2 c^2 \geq 12 G^2 M^2$. La órbita circular de menor radio ocurre para el valor crítico $\bar{L}^2 c^2 = 12 G^2 M^2$ y vale

$$r_{\text{órbita circular}}^{\text{mínimo}} = \frac{\bar{L}^2}{2GM} = \frac{6GM}{c^2} = 3 r_s$$

► Ecuación para la trayectoria $r = r(\varphi)$

En la ecuación de conservación de la energía, que es una ecuación para $r = r(\zeta)$, podemos reemplazar $d\zeta$ en términos de $d\varphi$ usando la conservación del momento angular:

$$r^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_1 \frac{d\varphi}{d\zeta} = \bar{L} \Rightarrow d\zeta = \frac{r^2}{\bar{L}} d\varphi$$

$$\frac{\bar{L}^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\bar{L}^2}{r^3 c^2} = \bar{e}$$

17 Corrimiento del perihelio. Deflexión de rayos de luz. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

► Ecuación para la trayectoria de la partícula libremente gravitante

Habíamos llegado a la ecuación para la órbita $r(\varphi)$ de la partícula libremente gravitante:

$$\frac{\bar{L}^2}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GM\bar{L}^2}{r^3 c^2} = \bar{e}$$

Para resolver la ecuación es conveniente el cambio de variable

$$u \equiv r^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = -u^{-2} \frac{du}{d\varphi}$$

Entonces obtenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \underbrace{\frac{u^2}{2} - \frac{GM}{\bar{L}^2} u - \frac{GM}{c^2} u^3}_{V^{efec}(u)} = \frac{\bar{e}}{\bar{L}^2}$$

Vamos a desarrollar este potencial efectivo alrededor de su mínimo, que corresponde al valor de la coordenada u para la órbita circular relativista:

$$u_E = \frac{1}{r_E} = 2 u_N \left(1 + \sqrt{1 - 12 \frac{G^2 M^2}{\bar{L}^2 c^2}} \right)^{-1}$$

↑ "Einstein"
↑ "Newton"

donde $u_N = \frac{1}{r_N} = \frac{GM}{\bar{L}^2}$

La idea es hacer una aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$V^{efec}(u) \approx V^{efec}(u_E) + \frac{1}{2} V^{efec''}(u_E) (u - u_E)^2$$

El valor de $V^{efec''}(u_E)$ corresponderá al valor del cuadrado de la frecuencia angular ω para la oscilación del radio a medida que avanza el ángulo φ en una órbita cuasi-circular ("pequeñas oscilaciones").

$$V^{efec''}(u) = 1 - 6 \frac{GM}{c^2} u = 1 - 3 \frac{r_s}{r_N} u$$

Si $GM \ll \bar{L}c$ entonces podemos aproximar u_E por u_N . Entonces

$$\omega^2 = V^{efec''}(u_E) \approx 1 - 3 \frac{r_s}{r_N} \quad r_N = \frac{\bar{L}^2}{GM}$$

$$\omega \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{r_s}{r_N}$$

La oscilación armónica de u alrededor de u_E queda:

$$u(\varphi) \approx u_E + A \cos \omega \varphi \approx u_N + A \cos \left[\left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_s}{r_N} \right) \varphi \right]$$

donde A depende de la "energía" \bar{e}/τ^2 . Para que la coordenada radial realice una oscilación completa, el avance del ángulo φ debe ser tal que

$$\omega \Delta\varphi = 2\pi$$

Como $\omega < 1$ entonces $\Delta\varphi > 2\pi$. La órbita no se cierra, pues cuando el radio completa su oscilación y regresa a su valor mínimo (perihelio) el ángulo barrido superó el valor de 2π :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_s}{r_N} \right)$$

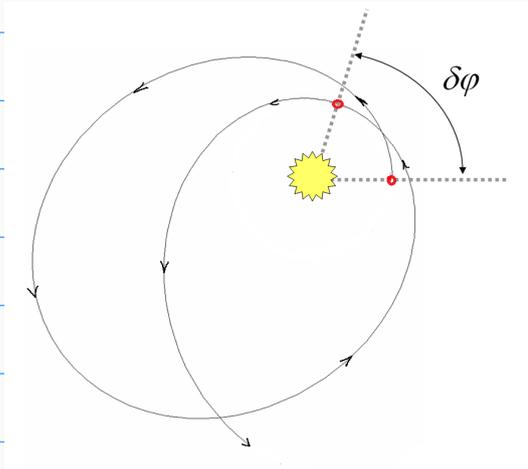
El avance del perihelio es

$$\delta\varphi = 3\pi \frac{r_s}{r_N}$$

El radio de la órbita de Mercurio es de unos 58 millones de kilómetros, mientras que el radio de Schwarzschild es de unos 3 km. Entonces

$$\delta\varphi_{\text{Mercurio}} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ radianes}$$

lo que lleva a una acumulación de 43 segundos de arco por siglo.



► Deflexión de la luz en la geometría de Schwarzschild

Las geodésicas nulas también tienen dos constantes de movimiento E y L. Para hallar la trayectoria del rayo podemos usar la ecuación para la partícula, restaurando la masa y reemplazándola por cero. Entonces la ecuación

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{GM}{L^2} u - \frac{GM}{c^2} u^3 = \frac{\bar{e}}{L^2}, \quad \bar{e} \equiv \frac{E^2 - m^2 c^4}{2 m^2 c^2}$$

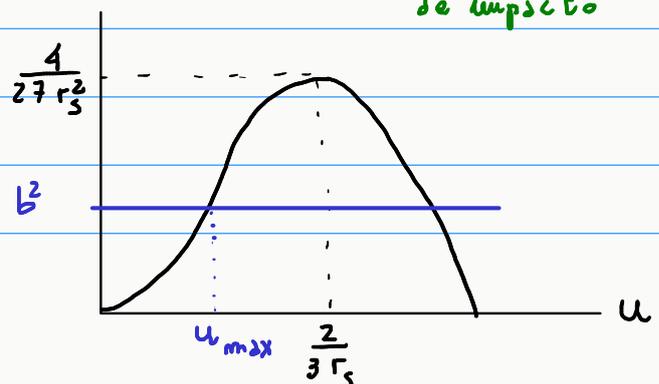
se reduce a

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - r_s u^3 = b^2$$

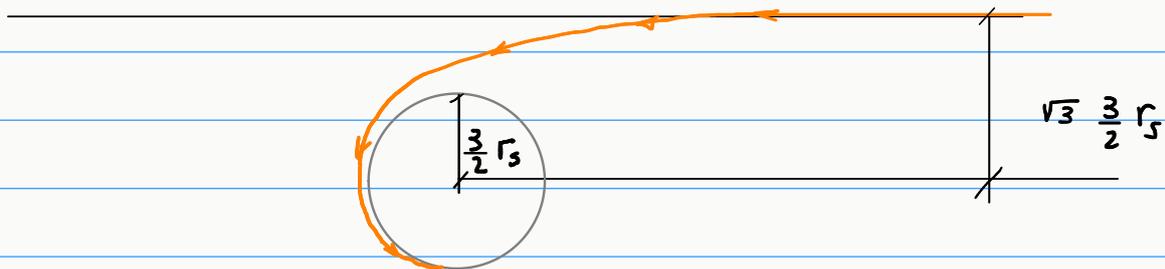
$$b \equiv \frac{E}{Lc} = \frac{pc}{pdc} = \frac{1}{d}$$

parámetro de impacto ↑

El "potencial" $u^2 - r_s u^3$ tiene la forma:



Como se puede ver, si la constante de movimiento b^2 coincide con $4/(27 r_s^2)$ (es decir, si el parámetro de impacto es $d = 3\sqrt{3} r_s/2$) entonces el rayo de luz va asintóticamente a una órbita circular de radio $\frac{3}{2} r_s$. Esta circunstancia es inestable porque si el parámetro de impacto aumenta un poco entonces el rayo de luz se aleja indefinidamente luego de acercarse al centro del campo, mientras que si el parámetro de impacto se reduce un poco entonces el rayo de luz termina en la singularidad.



$\sqrt{3} \frac{3}{2} r_s$ y $\frac{3}{2} r_s$ definen la "sombra" del agujero negro y su esfera de fotones.

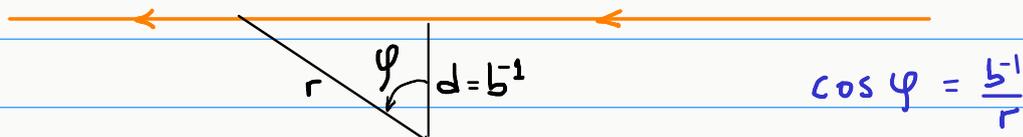
Estudiaremos la deflexión de la luz en un campo gravitatorio. Utilizaremos parámetros de impacto mayores que el valor crítico, de modo que el rayo de luz viene del infinito y va hacia el infinito. El máximo acercamiento ocurre cuando se anula $du/d\varphi$, esto es para

$$u_{\max}^2 - r_s u_{\max}^3 = b^2$$

La solución no relativista ($r_s = 0$) de la ecuación para la trayectoria del rayo es

$$u_{nr} = b \cos(\varphi + \alpha_0)$$

Escogiendo $\alpha_0 = 0$, estaremos midiendo φ desde el punto de la órbita donde u es máximo (es decir, r es mínimo). La solución no relativista es nada más que una línea recta (no hay deflexión de la luz):



Para la solución relativista propondremos una corrección a la solución no relativista y desarrollaremos al orden más bajo en r_s ; la aproximación será válida si $b r_s \ll 1$ (si el parámetro de impacto es mucho mayor que r_s). Sea

$$u(\varphi) = b \cos \varphi + b^2 r_s f(\varphi)$$

Entonces

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(-b \sin \varphi + b^2 r_s f'(\varphi)\right)^2$$

$$\approx b^2 \sin^2 \varphi - 2 b^3 r_s \sin \varphi f'(\varphi)$$

Reemplazando en la ecuación $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - r_s u^3 = b^2$ el orden r_s es

$$\underbrace{-2 b^3 r_s \sin \varphi f'(\varphi)}_{\text{viene de } \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} + \underbrace{2 b^3 r_s \cos \varphi f(\varphi)}_{\text{viene de } u^2} - \underbrace{r_s b^3 \cos^3 \varphi}_{\text{viene de } u^3} \approx 0$$

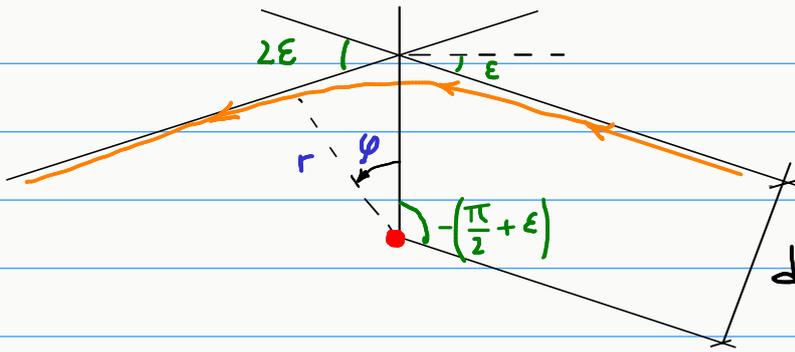
La solución es $f(\varphi) = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi$ (eligiendo la constante de integración para maximizar u en $\varphi = 0$)

$$u(\varphi) \approx b \cos \varphi + b^2 r_s - \frac{b^2 r_s}{2} \cos^2 \varphi$$

Vemos que $\varphi = 0$ corresponde a u_{\max} pues se anula $du/d\varphi$; entonces

$$u_{\max} \approx b + \frac{b^2 r_s}{2}$$

que, al orden r_s , satisface la relación $u_{\max}^2 - r_s u_{\max}^3 = b^2$ para la anulación de $du/d\varphi$ en la ecuación exacta.



Cuando $u \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) el ángulo ψ tiende a $\pm (\frac{\pi}{2} + \epsilon)$. Si reemplazamos en la solución:

$$0 \approx b \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}_{\approx -\epsilon} + b^2 r_s - \frac{b^2 r_s}{2} \underbrace{\cos^2(\frac{\pi}{2} + \epsilon)}_{\approx \epsilon^2}$$

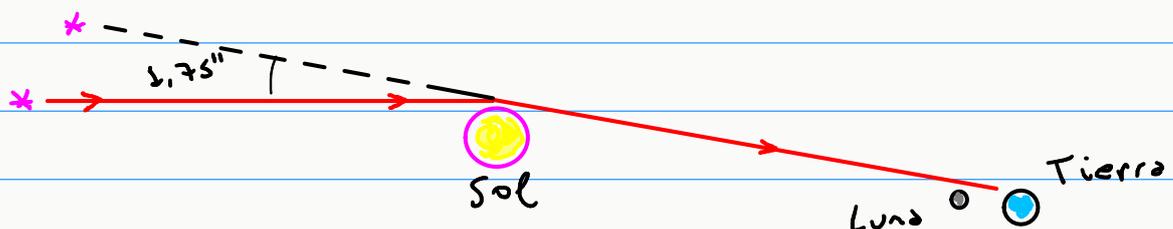
$$\Rightarrow \epsilon \approx b r_s = \frac{r_s}{d}$$

La deflexión del rayo es

$$\delta = 2\epsilon \approx 2r_s b = \frac{2r_s}{d}$$

En el caso de un rayo de luz que roza el disco solar podemos aproximar el parámetro de impacto por el radio solar (696.000 km). Como el radio de Schwarzschild es de 3 km, resulta una desviación de 1,75 segundos de arco. La deflexión de la luz debido al campo gravitatorio del Sol fue observada por primera vez en 1919, aprovechando un eclipse total de Sol (Eddington).

La deflexión gravitatoria de la luz es la base del fenómeno de "lente gravitatoria" que veremos más adelante.



► Coordenadas de Kruskal-Szekeres

La carta utilizada hasta aquí es cómoda para trabajar en la región de campo débil, pero no posee un buen comportamiento en la región vecina al horizonte de eventos. En particular los roles de coordenada espacial y temporal se intercambian al atravesar el horizonte. En 1960 Kruskal y Szekeres propusieron una carta libre de esos problemas. El cambio de coordenadas concierne a las coordenadas t, r exclusivamente, sin afectar las coordenadas angulares. La idea es que las nuevas coordenadas u, v permitan escribir el sector $t-r$ de la geometría en una forma conformemente plana. El cambio de coordenadas es

$$\text{Si } r > r_s \quad u = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[\frac{r}{2r_s} \right] \cosh \left[\frac{ct}{2r_s} \right]$$

$$v = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[\frac{r}{2r_s} \right] \sinh \left[\frac{ct}{2r_s} \right]$$

$$\text{Si } r < r_s \quad u = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[\frac{r}{2r_s} \right] \sinh \left[\frac{ct}{2r_s} \right]$$

$$v = \frac{r_s}{2} \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|^{1/2} \exp \left[\frac{r}{2r_s} \right] \cosh \left[\frac{ct}{2r_s} \right]$$

La transformación de coordenadas es singular en el radio de Schwarzschild, donde u, v valen cero para todo t finito. Claramente, el cambio de coordenadas debe ser singular en r_s si se desea curar la singularidad de la carta (t, r) .

Para entender las nuevas coordenadas, veremos cómo se ven las líneas coordenadas $t=\text{constante}$ y $r=\text{constante}$ en el plano (v, u) .

Elevando al cuadrado las ecuaciones anteriores y restando los resultados:

$$\frac{r_s^2}{4} \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \exp \left[\frac{r}{r_s} \right] = u^2 - v^2$$

Las líneas $r=\text{constante}$ son hipérbolas en el plano (v,u) . El horizonte de eventos corresponde a las asíntotas de las hipérbolas; en $r=r_s$ es $u=\pm v$.

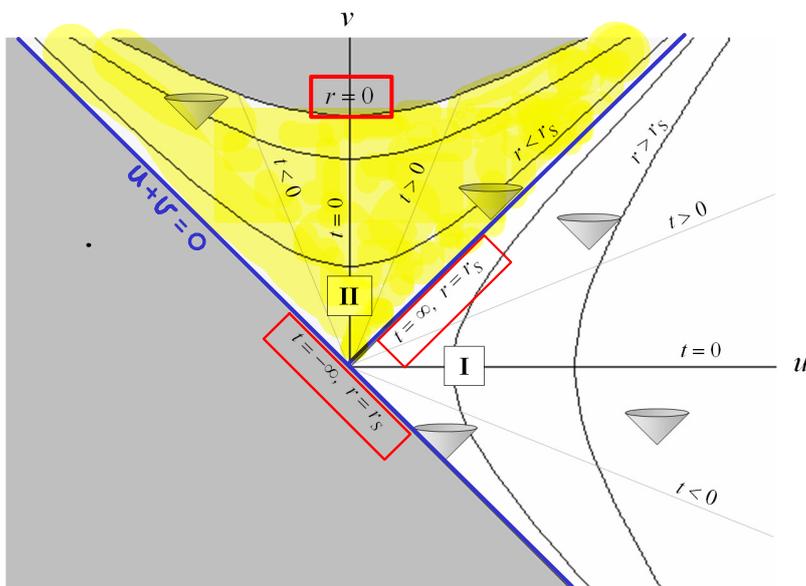
Por otro lado, haciendo el cociente entre las ecuaciones del cambio de coordenadas,

$$\tanh \left[\frac{ct}{2r_s} \right] = \begin{cases} \frac{v}{u} & \text{si } r > r_s \\ \frac{u}{v} & \text{si } r < r_s \end{cases}$$

Las líneas $t=\text{constante}$ son rectas que pasan por el origen en el plano (v,u) . Como el horizonte está en $u=\pm v$, entonces $t=\pm\infty$ sobre el horizonte.

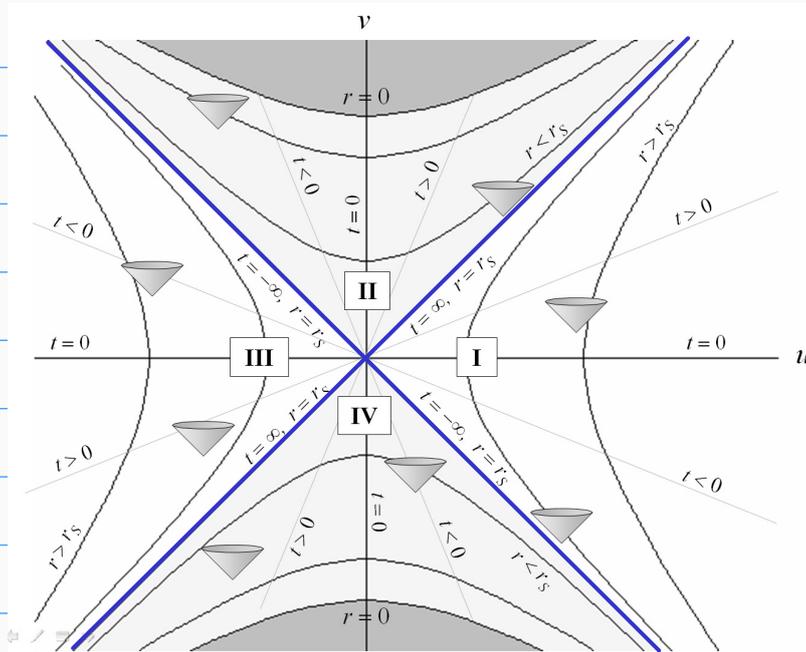
Además, la transformación muestra que $u+v \geq 0$. El intervalo resulta

$$ds^2 = 16 \frac{r_s}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$



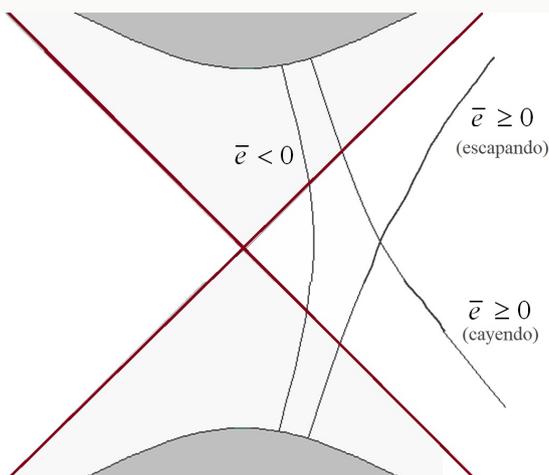
En el plano (v,u) las líneas de universo nulas, que corresponden a los rayos de luz radiales, son líneas a 45° . La coordenada v es siempre temporal. Los conos de luz conducen a la singularidad $r=0$. Nada puede escapar de la región interior al horizonte (región II).

En este gráfico llama la atención el hecho que la región $u+v < 0$ no integre el conjunto de eventos. Esto se debe a que todos los eventos abarcados por la carta (t,r) están contenidos en las regiones exterior (I) e interior (II). Sin embargo, desde el punto de vista de las ecuaciones de Einstein el intervalo escrito en coordenadas (v,u) es solución de las ecuaciones para cualquier valor de las coordenadas tal que $r(u,v) > 0$. La carta (v,u) hace visible que la geometría de Schwarzschild puede ser extendida a regiones que llamaremos III (externa) y IV (interna) para verse como en la Figura:



La extensión muestra dos regiones internas (II y IV). En la región II los conos futuros conducen a la singularidad; en cambio, en la región IV los conos conducen a cruzar el horizonte y emerger en una región externa (I o III). En la región IV la singularidad está en el pasado de todos los eventos.

Así se resuelve el problema de la aparente elección caprichosa del futuro en la región interior; las dos posibles elecciones tienen una realización. Esta extensión posee un agujero negro y un agujero blanco.



Máxima extensión analítica: la carta de Kruskal-Szekeres cubre la máxima extensión analítica de la geometría de Schwarzschild, en el sentido que permite que toda geodésica temporal pueda extenderse en ambos sentidos (hacia el pasado o el futuro) hasta alcanzar el infinito o una singularidad).

▶ Otras cartas para la geometría de Schwarzschild

- Coordenadas isotrópicas:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_s}{4R}}{1 + \frac{r_s}{4R}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4R} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

En la región de campo débil satisface el gauge de Lorenz

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) dv^2 - 2 dv dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad v = ct + r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)$$

coordenada nula radial

- Forma de Kerr-Schild:

$$ds^2 = \underbrace{c^2 dT^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}_{\text{Minkowski}} - \frac{r_s}{r} \underbrace{(c dT - dr)^2}_{\text{1-forma nula}}, \quad c dT \equiv c dt - \frac{dr}{\frac{r}{r_s} - 1}$$

▶ Las estrellas pasan su vida "quemando combustible" mediante reacciones de fusión nuclear, donde núcleos livianos se fusionan para dar núcleos más pesados liberando energía por defecto de masa. Esta energía genera una presión en el interior de la estrella que evita el colapso gravitatorio hacia el centro de la misma (del mismo modo que la presión hidrostática de un gas evita que el gas se precipite gravitatoriamente al fondo del recipiente que lo contiene). Así se pasa por distintas etapas. Las estrellas más jóvenes queman hidrógeno para convertirlo en helio y otros elementos livianos. Cuando el hidrógeno se acaba, la estrella se achica, la temperatura aumenta, y se encienden nuevas reacciones nucleares donde el helio se convierte en carbono ($Z=6$) y oxígeno ($Z=8$). Las energías liberadas por estas reacciones expanden la estrella para convertirla en una "gigante roja". Agotado el helio, todavía se libera energía mediante fusiones que llevan al silicio ($Z=14$) y al hierro ($Z=26$). Esta cadena finaliza en el ${}^{56}\text{Fe}$ debido a su muy alta estabilidad. A partir de allí

la estrella comienza a colapsar gravitatoriamente. Como la materia de la estrella está altamente ionizada, el colapso puede ser detenido por la presión del gas degenerado de electrones; esto es lo que sucede si la masa de la estrella no supera 1,4 de la masa solar (límite de Chandrasekhar), y el resultado es una estrella "enana blanca" (una estrella de tamaño parecido al de un planeta). Las estrellas más masivas continúan el colapso; los electrones se combinan con protones para formar neutrones. Si la masa de la estrella no supera unas 2 masas solares, las interacciones cuánticas entre neutrones pueden detener el colapso; se forma una estrella de neutrones, con un radio de decenas de kilómetros y una densidad comparable a la de un núcleo atómico. Si la masa supera unas 3 masas solares la estrella continúa el colapso para formar un agujero negro (se compactará detrás de su horizonte). Las estrellas muy masivas pueden explotar como supernovas, creando elementos pesados, y dejando residuos como un agujero negro o una estrella de neutrones rápidamente rotante (púlsar), y una nebulosa de materia dispersa.

Cygnus X-1 es una binaria que contiene un agujero negro que "acreta" materia de su compañera. Al caer hacia el agujero negro, la materia del disco de acreción se calienta emitiendo rayos X. Fue descubierta en 1964 como fuente de rayos X, hasta que se determinó que es una binaria con un agujero negro de 14 masas solares, siendo el primer agujero negro descubierto. Muchas otras binarias de este tipo han sido observadas. Fusiones de agujeros negros de decenas de masas solares son detectadas por su emisión de ondas gravitatorias. Existen agujeros negros de millones a miles de millones de masas solares en los centros de galaxias; muchos de ellos acretan masa vecina y emiten poderosos jets de partículas cargadas y radiación electromagnética. El agujero negro de nuestro centro galáctico se detecta por el movimiento orbital de estrellas próximas (1). En 2019 se confeccionó la primera imagen de la sombra de un agujero negro (núcleo de galaxia M87, con la red de radiotelescopios EHT) (2).

1) <https://www.eso.org/public/videos/eso1835c/>

2) <https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2019/4/19/how-scientists-captured-the-first-image-of-a-black-hole/>

► Fuerza sobre una partícula estática

Sea una partícula que se mantiene en una línea de universo de coordenadas $r > r_s$, θ , φ constantes. Su cuadrivelocidad es $U^i = \frac{dz^i}{dz} = (c \frac{dt}{dz}, 0, 0, 0)$

Como $c dz = ds = g_{00}^{1/2} c dt \Rightarrow U^i = (c g_{00}^{-1/2}(r), 0, 0, 0)$

Está claro que esta línea de universo tiene cuadiaceleración no nula (no es una geodésica): se precisa de una fuerza externa para mantener la partícula en coordenadas fijas). La cuadiaceleración $D\bar{U}/Dz$ es

$$\left(\frac{D\bar{U}}{Dz}\right)^i = \frac{dU^i}{dz} + \Gamma_{jk}^i U^j U^k = \Gamma_{00}^i c^2 g_{00}^{-1}$$

$\Gamma_{00}^i = 0$ (r es cte.)

donde $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{il} (2 g_{e0,0} - g_{00,e}) = (0, -\frac{1}{2} g^{rr} g_{00,r}, 0, 0)$

Entonces $\left(\frac{D\bar{U}}{Dz}\right)^i = (0, \frac{c^2}{2} \partial_r (1 - \frac{r_s}{r}), 0, 0) = (0, \frac{GM}{r^2}, 0, 0)$

La partícula es mantenida en coordenadas $r > r_s$ (así la línea de universo es temporal), θ , φ fijas mediante una fuerza \bar{K} que equilibra el efecto de la gravedad:

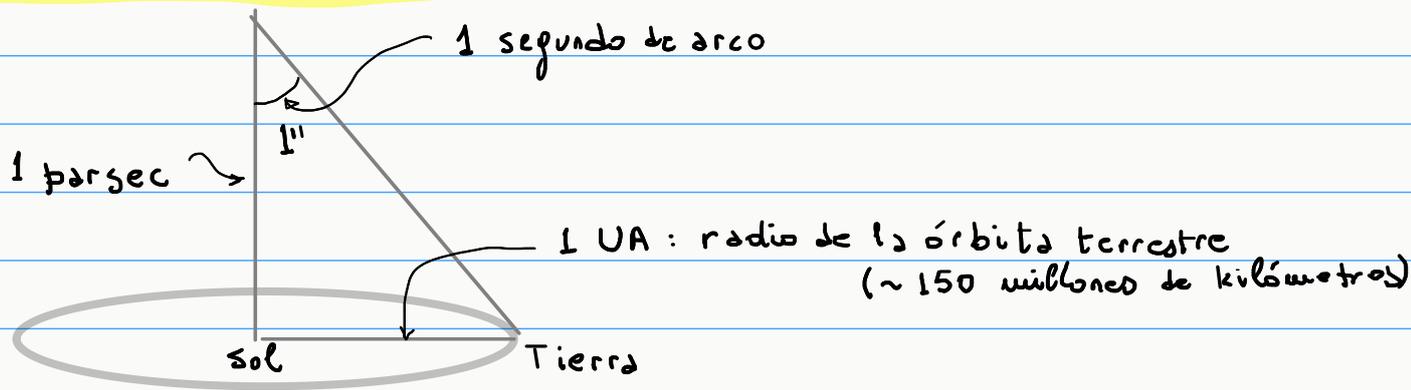
$$\bar{K} = m \frac{D\bar{U}}{Dz} = \frac{GMm}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$

La apariencia newtoniana del resultado es engañosa. El módulo de \bar{K} involucra a $|g_{rr}|^{1/2}$; de modo que $|\bar{K}|$ diverge para $r \rightarrow r_s$, y es newtoniano para $r \rightarrow \infty$.

Como M es una constante de integración en las ecuaciones de Einstein, cabe preguntarse si no es posible tomar una constante de integración $M < 0$ para obtener una repulsión gravitatoria. Nótese que si $M < 0$ entonces no hay horizonte de eventos; la singularidad $r=0$ estaría "desnuda". En 1969 Penrose conjeturó que el colapso gravitatorio nunca conduce a singularidades desnudas ("conjetura del censor cósmico").

18 Principio cosmológico. Universos de Friedmann-Robertson-Walker. Corrimiento al rojo cosmológico

► Unidad de distancia: el parsec



El parsec es la distancia desde la cual el radio de la órbita terrestre subtende un ángulo de 1 segundo de arco.

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ años luz} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$$

Escala características:

Galaxias ~ 1-50 kpc

Cúmulos de galaxias ~ 2-10 Mpc

Supercúmulos ~ 100 Mpc



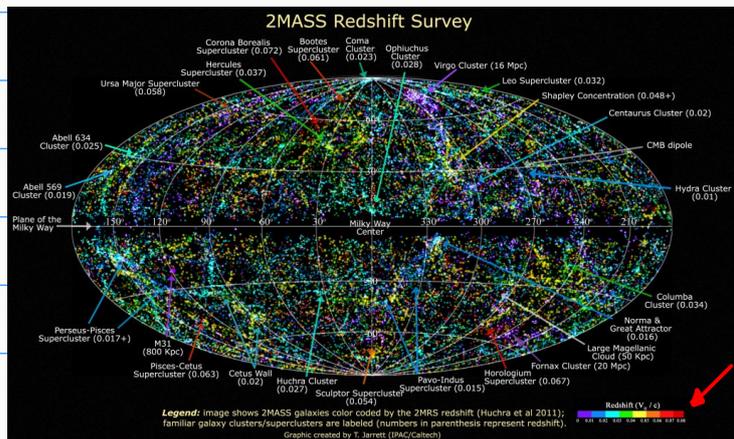
Andrómeda



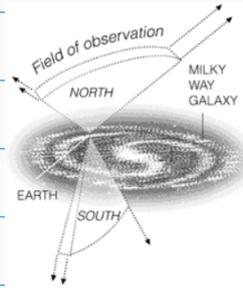
M87



1E 0657-56 (cúmulo Bullet)

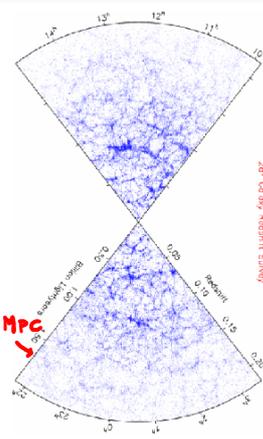


Vecindario cósmico



Survey regions extend outward for billions of light-years.

Sources: Dr. Robert Smith, The Australian National University; 2-Degree Field Galaxy Redshift Survey.



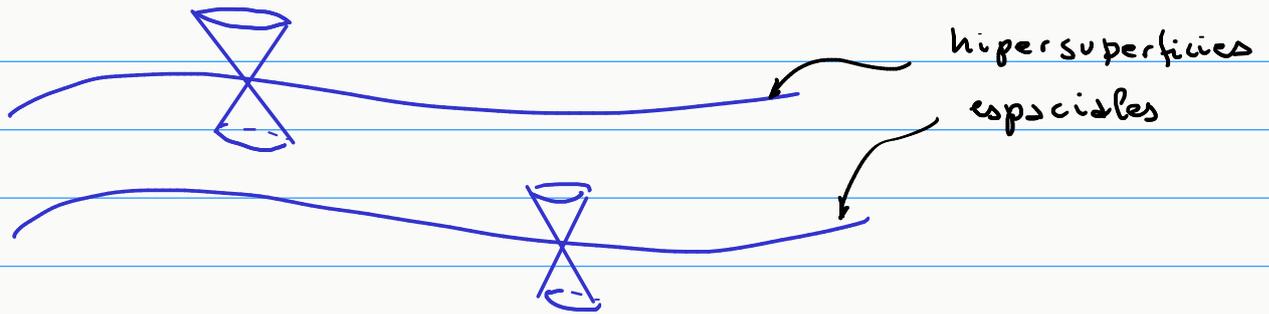
▶ Principio cosmológico

A gran escala (mayor que 150 Mpc) el universo es isótropo y homogéneo. En esa primera aproximación, la energía-materia en él contenida es descrita mediante un fluido con tales características.

Nótese que son concebibles cosmologías homogéneas y anisótropas. Pero si el universo es isótropo en todos sus puntos, necesariamente es homogéneo.

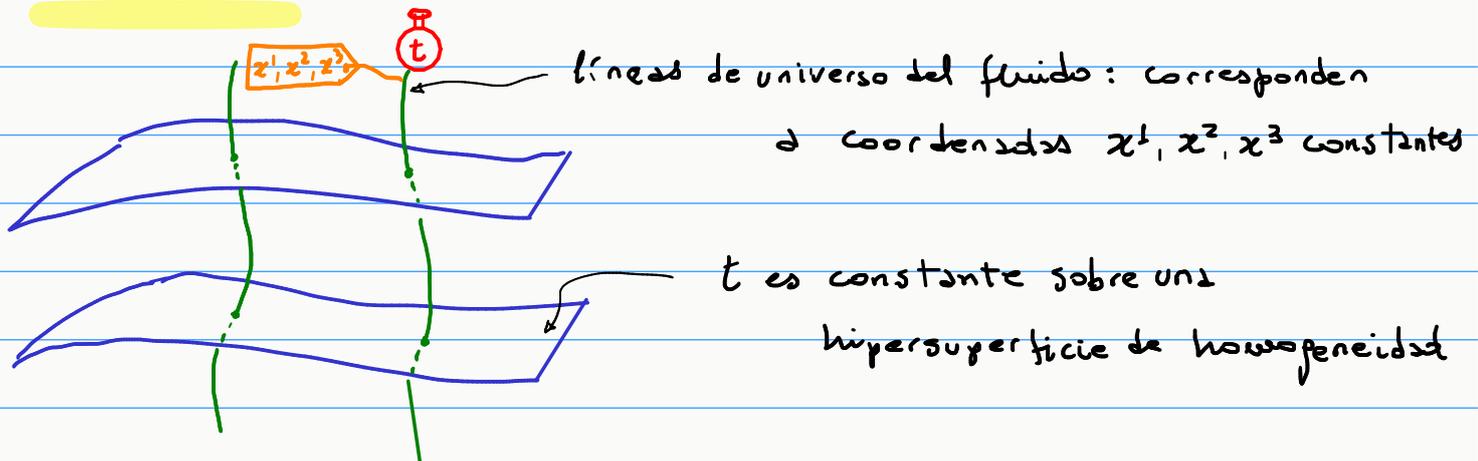
La hipótesis del Principio cosmológico es bastante fuerte porque involucra todo el universo, aun aquellas regiones de las que nada sabemos, ya sea por limitación tecnológica o porque están tan alejadas que todavía no hemos recibido luz proveniente de las mismas (esto sucedería si el universo tuviese una edad finita, o si el universo hubiese sido opaco a la propagación de la luz hasta cierta edad).

Las propiedades de homogeneidad e isotropía necesitan un enunciado más preciso en el marco de la Relatividad. Si pensamos que el universo puede evolucionar (su geometría puede cambiar), y que la densidad de materia acompañará esa evolución, entonces la homogeneidad (traducida como la uniformidad de la densidad y presión del fluido de materia-energía) debería verificarse en cada instante de la evolución. Pero la noción de simultaneidad no es absoluta en Relatividad. Por lo tanto la idea del Principio cosmológico se realiza diciendo que el espacio-tiempo admite una foliación de hipersuperficies espaciales tales que cada hoja de la foliación es homogénea. Es decir, cada hoja es un conjunto de eventos "simultáneos" que realizan la homogeneidad.



En cuanto a la isotropía, diremos que las líneas de universo del fluido de materia-energía no seleccionan direcciones privilegiadas sobre las hipersuperficies de homogeneidad; por lo tanto deben ser normales a las mismas. Si las líneas de universo de los elementos del fluido no fuesen normales, entonces sus cuadrivelocidades seleccionarían una dirección privilegiada en cada punto de la hipersuperficie: la dirección la proyección de la cuadrivelocidad sobre la hipersuperficie.

▶ Carta comóvil



En la carta comóvil cada línea de universo del fluido está etiquetada por tres coordenadas (espaciales) x^1, x^2, x^3 . La coordenada temporal $x^0 = ct$ es el tiempo propio a lo largo de cada línea (es decir, el tiempo de los relojes que se mueven con el fluido). Si los relojes son sincronizados sobre una hipersuperficie, entonces permanecerán sincronizados; si así no fuera se violaría la homogeneidad. Por lo tanto cada hipersuperficie está identificada con un valor de x^0 .

En la carta comóvil el intervalo tiene la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl^2$$

donde dl^2 es un elemento de arco sobre las hipersuperficies de homogeneidad (por lo tanto dl^2 es isótropo y homogéneo). Esto es así porque el "tiempo cosmológico" t es el tiempo propio de las líneas de coordenadas espaciales constantes ($g_{00} = 1$), y porque estas líneas son ortogonales a las hipersuperficies $t = cte$ ($g_{\alpha 0} = 0$). El factor de escala $a(t)$ implica la posibilidad de que las distancias evolucionen en el tiempo sin afectar la homogeneidad e isotropía.

La distancia en un espacio tridimensional isótropo y homogéneo puede escribirse como

$$dl^2 = e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 \overbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}^{d\Omega^2}$$

Para determinar la función $\lambda(r)$ calcularemos la curvatura del espacio 3-dimensional y exigiremos que sea uniforme para realizar la homogeneidad:

$${}^{(3)}R = \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r (1 - e^{-2\lambda(r)}) \right] \equiv k$$

$$\Rightarrow e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{k r^2}{6} - \frac{A}{r}}$$

Como no hay razón para que la métrica tenga un mal comportamiento en $r=0$ ($r=0$ es un punto cualquiera), entonces la constante de integración A se elige igual a cero. Si llamamos $K \equiv k/6$, el intervalo de los modelos cosmológicos isótropos y homogéneos escrito en una carta comóvil es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

Los valores del factor de escala $a(t)$ y la curvatura espacial K quedarán determinados a través de las ecuaciones de Einstein por las características del fluido que llene el universo. Este tipo de geometrías fue estudiado por Friedmann en 1922; en 1935-1936 Robertson y Walker establecieron que es la forma más general de describir un universo isótropo y homogéneo. Decimos que el intervalo anterior describe las geometrías de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

En la carta comóvil las componentes de la cuadrivelocidad de los elementos de fluido son $U^i = dx^i/d\tau = dx^i/dt = (c, 0, 0, 0)$. Es fácil verificar que \bar{U} satisface la ecuación de las geodésicas $\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$:

$$\frac{dU^k}{d\tau} + \Gamma_{ij}^k U^i U^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{00}^k U^0 U^0 = 0$$

$$\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} g^{kp} (g_{0e,0} + g_{e0,0} - g_{00,e})$$

▶ Espacio plano, cerrado o abierto

Está claro que no necesitamos considerar más que los casos $K=0, 1, -1$. Cualquier otro factor no nulo puede absorberse en un cambio de coordenadas y factor de escala:

$$|K| r^2 \rightarrow r^2, \quad |K|^{-1} a^2 \rightarrow a^2$$

▶ $K=0$ corresponde a una geometría espacial plana. El elemento de arco dl^2 es la geometría euclidiana escrita en coordenadas esféricas:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

► $K=1$ corresponde a la geometría esférica 3-dimensional; decimos que el espacio es cerrado. En efecto podemos hacer el cambio de coordenadas

$$\frac{dr^2}{1-r^2} = d\chi^2$$

Nótese que si usamos K adimensional, entonces r es adimensional y el factor de escala $a(t)$ tiene unidades de longitud.

Entonces $r = \text{sen } \chi$, y el elemento de arco $d\ell^2$ resulta

$$d\ell^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)$$

Esta es la geometría de una 3-esfera de radio 1 sumergida en un espacio euclidiano 4-dimensional:

3-esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

Parametrización de la 3-esfera (S^3):

$$(x, y, z) = \text{sen } \chi (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta)$$

$$w = \cos \chi \quad (\text{se cumple la ecuación de } S^3)$$

Distancia inducida sobre S^3 :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) \quad \checkmark$$

Si extendemos el rango de χ al intervalo $[0, \pi]$, entonces el volumen de S^3 es

$$3\text{-volumen} = \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \chi d\chi \int_0^{\pi} \text{sen } \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi^2$$

En la geometría FRW este volumen espacial queda multiplicado por $a(t)^3$. Una 3-esfera es isótropa en cualquier punto (y, por lo tanto, es homogénea). Su simetría responde al grupo de rotaciones, que son transformaciones que mueven puntos sobre S^3 en todas direcciones sin afectar la métrica (isometrías).

Nótese que el rango $[0, \pi]$ para la coordenada χ implica que la coordenada r recorre dos veces el intervalo $[0, 1]$.

▶ $K = -1$ corresponde a la geometría hiperbólica 3-dimensional; decimos que el espacio es abierto. En efecto podemos hacer el cambio de coordenadas

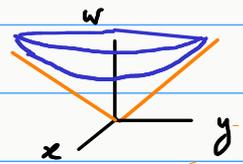
$$\frac{dr^2}{1+r^2} = d\chi^2$$

Entonces $r = \sinh \chi$, y el elemento de arco dl^2 resulta

$$dl^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta dy^2)$$

Esta es la geometría de una 3-hiperboloide sumergido en un espacio de Minkowski 4-dimensional:

3-hiperboloide $w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$



Parametrización del 3-hiperboloide:

$$(x, y, z) = \sinh \chi (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$w = \cosh \chi \quad (\text{se cumple la ecuación del 3-hiperboloide})$$

Distancia inducida sobre el 3-hiperboloide:

$$|dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2| = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \checkmark$$

El 3-hiperboloide es isótropo en todo punto (en el sentido del espacio de Minkowski donde está sumergido); por lo tanto es homogéneo. Esta simetría se basa en el grupo de Lorentz, que son transformaciones que mueven puntos sobre el 3-hiperboloide en todas direcciones sin afectar la métrica (isometrías).

Podemos resumir los tres casos de las geometrías FRW en la siguiente forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(d\chi^2 + f(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

$K=0$
 $\chi = r$
 $\theta = \pi/2$

$dl^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\varphi^2$

donde:

$$f(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{si } K=0 \\ \text{sen } \chi & \text{si } K=1 \\ \text{senh } \chi & \text{si } K=-1 \end{cases}$$

$K=1$
 $\text{sen } \chi = r$
 $\theta = \pi/2$

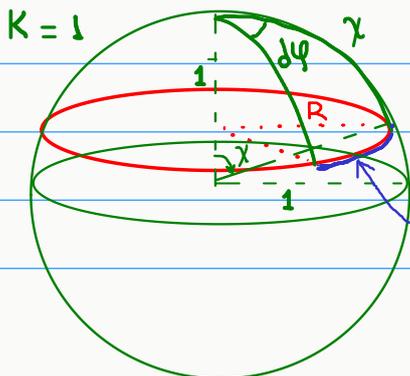
$dl^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi d\varphi^2$

$K=-1$
 $\text{senh } \chi = r$
 $\theta = \pi/2$

$dl^2 = d\chi^2 + \text{senh}^2 \chi d\varphi^2$

sumergido en Minkowski (notar que $\text{senh } \chi \geq \chi$)

La geometría plana se caracteriza porque el cociente entre la longitud del arco y la distancia al centro es igual al ángulo. La longitud del arco para χ fijo y $\theta = \pi/2$ es $dl = f(\chi) d\varphi$, mientras que la distancia de los puntos del arco al origen es χ . Por lo tanto la relación entre la longitud y el ángulo subtendido es



$dl = R d\varphi = \text{sen } \chi d\varphi < \chi d\varphi$

$$\frac{dl}{d\varphi} = f(\chi) = \begin{cases} = \chi & \text{si } K=0 \\ < \chi & \text{si } K=1 \\ > \chi & \text{si } K=-1 \end{cases}$$

► Cinemática del universo en expansión

Las ecuaciones de Einstein gobiernan la dinámica del factor de escala del universo, y darán cuenta de la expansión del mismo. Antes de ir a la dinámica, usemos la cinemática para averiguar qué tipo de fenómeno podría revelar el cambio del factor de escala al transcurrir el tiempo.

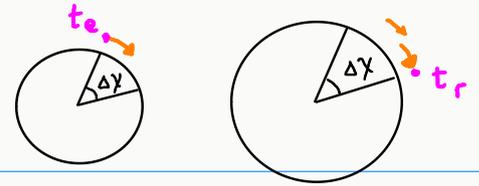
Consideremos una señal luminosa que es emitida desde una galaxia y recibida en otra galaxia. Recordemos que estamos trabajando en una carta comóvil, de manera que las galaxias mantienen fijas sus coordenadas espaciales (si despreciamos sus movimientos peculiares). Sin embargo la distancia entre ellas variará si el factor de escala varía. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir la carta de manera que la dirección que une ambas galaxias es una dirección radial; entonces las coordenadas θ, ψ son iguales para el emisor y el receptor de la señal. En otras palabras, la isotropía nos dice que lo único que importa aquí es la distancia entre las galaxias, y cómo es su variación mientras la señal esté en viaje. Como la luz viaja por una geodésica nula radial, tenemos que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\chi^2 = 0$$

Integrando resulta:

$$|\Delta\chi| = \int_{t_{\text{emisión}}}^{t_{\text{recepción}}} \frac{c dt}{a(t)}$$

Si consideramos dos crestas sucesivas de la onda, emitidas con una diferencia de tiempo Δt_e igual al período de la fuente T_f (recordemos que la coordenada t es el tiempo propio de cada galaxia que integra el fluido de materia), tendremos que cada cresta recorre el mismo $|\Delta\chi|$ en un intervalo de tiempo distinto. Si la primera cresta lo hace en el intervalo (t_e, t_r) , la segunda cresta lo hace en el intervalo $(t_e + T_f, t_r + T_{\text{obs}})$, donde T_{obs} es el período observado en el receptor. Esta es una consecuencia del cambio de la distancia entre emisor y receptor debido a la expansión del universo.



El 1er pulso se emite en t_e y se recibe en t_r . Un pulso posterior demora más porque recorre una distancia mayor debido a la expansión del universo.

$$\int_{t_e + T_f}^{t_r + T_{obs}} \frac{c dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_r} \frac{c dt}{a(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_r}^{t_r + T_{obs}} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + T_f} \frac{c dt}{a(t)}$$

En un período de la luz el factor de escala no cambia sensiblemente; entonces

$$\frac{T_{obs}}{a(t_r)} = \frac{T_f}{a(t_e)}$$

Si el factor de escala está creciendo, entonces $T_{obs} > T_f$, lo que equivale a $\nu_{obs} < \nu_f$. Este resultado indica que la expansión del universo da lugar a un corrimiento al rojo cosmológico de frecuencias, que es la consecuencia de que la segunda cresta llega retrasada respecto de la primera porque tuvo que recorrer una distancia más larga. El corrimiento se detecta en las líneas de emisión y absorción de las galaxias. El corrimiento de frecuencia relativo es

$$z \doteq \frac{\nu_f - \nu_{obs}}{\nu_{obs}} = \frac{\nu_f}{\nu_{obs}} - 1 = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} - 1$$

Si el factor de escala es una función monótona del tiempo, entonces a mayor distancia, o mayor tiempo de viaje, mayor será el corrimiento relativo z .

La teoría de la expansión del universo fue propuesta por Lemaître en 1927, y confirmada por Hubble en 1929 mediante la observación del corrimiento al rojo cosmológico en galaxias exteriores al grupo local.

Si vemos a z como una función del tiempo de emisión para un dado tiempo de recepción (que sería el tiempo actual), podemos diferenciar,

$$dz = - \frac{a_r}{a(t)^2} \dot{a}(t) dt = - a_r H(t) \frac{dt}{a(t)}$$

La relación entre \dot{a} y a recibe el nombre de parámetro o "constante" de Hubble:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

La expresión para dz permite hacer un cambio de variable en $|\Delta\chi| = \int_{t_e}^{t_r} \frac{c dt}{a(t)}$:

$$|\Delta\chi| = \int_0^z \frac{c dz'}{a_r H(z')}$$

pues $z=0$ si $t_e = t_r$ (tiempo de viaje nulo). Para valores pequeños de z podemos evaluar el integrando en $z=0$ (es decir, en $t=t_r$), y despejar z en función del valor actual de H , y la distancia actual a la fuente, $\sigma_r = a_r |\Delta\chi|$:

$$z \approx c^{-1} H_r \sigma_r$$

si $z \ll 1$

siendo el valor actual de H de unos $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (si bien H tiene unidades de inversa de tiempo, se usa esta unidad porque σ se mide en Mpc). Como $c^{-1} H_r$ es del orden de 10^{-4} Mpc^{-1} , el uso de la expresión aproximada anterior se extiende hasta distancias actuales de unos 500-1000 Mpc.

Si derivamos respecto del tiempo la distancia entre galaxias,

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{a}(t) |\Delta\chi| \Rightarrow \dot{\sigma}(t) = \dot{a}(t) |\Delta\chi| = H(t) \sigma(t)$$

la expresión para z queda

$$z \approx \frac{\dot{\sigma}_r}{c}$$

si $z \ll 1$

que evoca la expresión $z \approx v/c$ del efecto Doppler.

**19 Distancia luminosa.
Constituyentes. Constante
cosmológica. Evolución del
universo. Universo de de Sitter**

Habíamos encontrado una relación lineal entre z y la distancia actual $\sigma_r = a_r |\Delta\chi|$ entre emisor y receptor, valiéndonos de una aproximación de orden cero en el integrando de

$$\sigma_r = a_r |\Delta\chi| = \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')}$$

La función $H(z)$ en el integrando expresa la forma en que evoluciona el factor de escala del universo, evolución que será determinada por las ecuaciones de Einstein. Aunque todavía no estamos resolviendo la dinámica para hallar esa evolución, podemos lograr una aproximación más fina desarrollando el integrando a primer orden en z , lo que supone contar con los valores actuales de H y su primera derivada:

$$H(z) = H_r + \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=0} z + \dots = H_r + \frac{dH}{dt} \left. \frac{dt}{dz} \right|_{t_r} z + \dots$$

Ya hemos mostrado que $\frac{dt}{dz} = -\frac{a(t)}{a_r H_r}$

Además,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -H^2 (1 + q)$$

donde definimos el parámetro de desaceleración q como

$$q(t) \doteq -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

Entonces, en el desarrollo de $H(z)$ tenemos que

$$H(z) = H_r + H_r (1 + q_r) z + \dots$$

$$H^{-1} \approx H_r^{-1} [1 - (1 + q_r) z]$$

Reemplazando en la integral, la distancia actual emisor-receptor resulta

$$a_r |\Delta\chi| = \sigma_r \approx \frac{c}{H_r} \int_0^z \left[1 - (1 + q_r) z' \right] dz' = \frac{c}{H_r} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_r) z^2 \right]$$

► Distancia luminosa

Una relación como la acabamos de obtener podría usarse para determinar H_r y q_r a partir de la observación de z y σ_r . Pero no tenemos un acceso directo a σ_r . En Astronomía se utiliza el flujo de energía F (energía emitida por unidad de tiempo y de superficie atravesada) y la luminosidad L del objeto emisor (energía emitida por unidad de tiempo), para definir una noción de distancia llamada distancia luminosa d_L tal que

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

Nótese que se usa una relación euclidiana en la definición, pues $4\pi d_L^2$ es el área de una esfera de radio d_L (imaginemos al objeto emisor en el centro de esa esfera, y el detector sobre la esfera, a una distancia d_L del emisor, recogiendo un flujo F a través de la superficie de su boca). Mientras que el flujo F es accesible a la medición, la luminosidad del objeto L suele inferirse de alguna manera (por comparación con objetos similares de luminosidad conocida, por ejemplo). Nos gustaría entonces traducir la relación entre σ_r y z obtenida en la sección anterior a una relación entre d_L y z . Para ello debemos encontrar la relación entre σ_r y d_L . Por cierto en una geometría pseudo-euclidiana estas dos cantidades son iguales, pero no lo son en la geometría FRW. Además debemos tener en cuenta que en el flujo F la energía de los fotones se debilita por el corrimiento al rojo cosmológico, y que el número de fotones por unidad de tiempo también se debilita debido al "retraso" producido por la expansión del universo.

La luminosidad L es el número de fotones emitidos por unidad de tiempo, multiplicado por la energía de cada fotón:

$$L = \frac{\delta N}{\delta t_e} h \nu_e \quad \text{pero} \quad \nu_r = (1+z)^{-1} \nu_e$$

$$\delta t_r = (1+z) \delta t_e$$

(la frecuencia disminuye, y el tiempo entre fotones se agranda; ambos efectos son el mismo efecto). El flujo recibido está debilitado por un factor $(1+z)^2$.

Por otro lado la energía recibida se reparte sobre el área de una esfera, que en la geometría FRW es $4\pi a_r^2 f(|\Delta\chi|)^2$ (si se prefiere podemos pensar que la fuente está en $\chi_e=0$; de ese modo es $\Delta\chi = \chi_r$). Entonces el flujo es

$$F = \frac{L}{4\pi a_r^2 f(|\Delta\chi|)^2 (1+z)^2}$$

La función $f(\chi)$ puede ser χ , $\text{sen}\chi$ o $\text{senh}\chi$. En un desarrollo a segundo orden en z , no cometeremos error si reemplazamos $f(|\Delta\chi|) \approx |\Delta\chi|$ en los tres casos; en efecto, $f(\chi) \approx \chi + O(\chi^3)$, y al orden más bajo es $|\Delta\chi| = \frac{cz}{a_r H_r}$. Entonces,

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{\frac{1}{2}} = a_r f(|\Delta\chi|) (1+z) \approx \sigma_r (1+z)$$

\uparrow
 $\sigma_r = a_r |\Delta\chi|$

Reemplazando en la relación entre σ_r y z :

$$\frac{d_L}{1+z} \approx \frac{c}{H_r} \left[z - \frac{1}{2} (1+q_r) z^2 \right]$$

Entonces

$$(4,3 \text{ Gpc})^{-1} \left(c^{-1} H_r d_L \right) \approx z + \frac{1}{2} (1 - q_r) z^2$$

La determinación de d_L requiere conocer el valor de L , lo cual supone establecer objetos astronómicos que se comporten como candelas patrón. La medición de la curva d_L vs. z permitió descubrir que la expansión del universo se acelera: $q_r < 0$ (Perlmutter, Schmidt, Riess, 1998; Premio Nobel de Física 2011).

► Constituyentes del universo

El tensor de energía-momento del fluido isótropo y homogéneo que llena el universo, y actúa como fuente de las ecuaciones de Einstein, tiene la forma que conocemos en Relatividad Especial (en acoplamiento mínimo no deberían aparecer nuevos términos),

$$T^i_j = (\rho + p) c^{-2} U^i U_j - p \delta^i_j$$

↑ signatura +---

donde ρ , p son los valores de densidad de energía y presión en el sistema propio del fluido. Precisamente en la carta comóvil es $U^i = dx^i/d\tau = (c, 0, 0, 0)$; luego $U_j = (c, 0, 0, 0)$ en la signatura +---. Así es

$$T^i_j = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$$

El tensor T^i_j cumple la ecuación de conservación $T^i_{j;i} = 0$:

$$0 = T^i_{j;i} + \underbrace{\Gamma^i_{ki}}_{\partial_k \ln \sqrt{|g|}} T^k_j - \Gamma^k_{ji} T^i_k$$

De aquí saldrá una relación entre α , ρ y p como funciones de t . Para $j=0$ es

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k (\sqrt{|g|} T^k_0) - \Gamma^k_{0i} T^i_k = 0$$

En el primer término sólo cuenta $k=0$, y en el segundo usaremos que *

$$\Gamma^0_{00} = 0, \quad \Gamma^0_{0\beta} = c^{-1} H \delta^0_\beta$$

Así resulta

$$\frac{1}{\alpha^3} \partial_0 (\alpha^3 \rho) = -3 p c^{-1} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$$

* Nótese que la carta comóvil no es localmente inercial.

Es decir:

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = -p \frac{d}{dt} a^3$$

La conservación de T^{ij} significa que la variación de la energía contenida en un volumen comóvil (definido por valores constantes de $\Delta\chi$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$) es igual al trabajo de volumen realizado por la presión, que es la ley para la expansión adiabática de un fluido perfecto.

► Ecuación de estado

Para resolver la ecuación del fluido precisamos una ecuación de estado (una relación entre presión y densidad de energía). Trabajaremos con una ecuación sencilla que nos permite abarcar los casos de interés:

$$p = w \rho$$

i) $w=0$: materia compuesta por partículas que no chocan ("polvo")

ii) $w=1/3$: gas de fotones; y en forma aproximada para partículas ultra-relativistas (energía cinética mucho mayor que energía en reposo)

iii) constante cosmológica: ya mencionamos la posibilidad de incluir en las ecuaciones de Einstein el término de constante cosmológica,

$$R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R - \Lambda \delta^i_j = k T^i_j$$

↑
signatura +---

Pasando ese término a la derecha, se vería como un tensor de energía-momento $T_\Lambda^i_j = \frac{\Lambda}{k} \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ que corresponde a

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{k} = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \quad w_\Lambda = -1$$

Utilizaremos la constante cosmológica como si se tratara de uno más de los constituyentes del fluido de materia-energía que llena el universo.

Ahora podemos resolver la ecuación del fluido reemplazando la ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = -w \rho \frac{d}{dt} a^3$$

$$\Rightarrow (1+w) \rho \frac{d}{dt} a^3 + a^3 \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho a^{3(1+w)}) = 0$$

$$\rho(t) a(t)^{3(1+w)} = \text{constante}$$

i) $w=0$: $\rho a^3 = \text{cte}$ (la energía contenida en el volumen comóvil -básicamente, el número de partículas- no cambia)

ii) $w=1/3$: $\rho a^3 = \frac{\text{cte}}{a}$ (la energía del gas de fotones disminuye con la expansión del universo debido al corrimiento al rojo)

iii) $w=-1$ (constante cosmológica): $\rho_{\Lambda} = \text{cte}$

En un universo en expansión el fluido con mayor valor de w domina hacia el pasado, porque su densidad $\rho(t)$ crece más rápido a medida que el factor de escala $a(t)$ se vuelve más chico. Así el gas de fotones dominó en el pasado sobre la materia en forma de polvo, mientras que en el presente la materia domina sobre ese fluido de radiación. Hacia el futuro, el fluido con menor valor de w es el que prevalece finalmente, siempre que la expansión continúe.

► Evolución del universo

Debido a las simetrías de la geometría que surgen del Principio cosmológico, las ecuaciones de Einstein contienen sólo dos ecuaciones diferentes: la componente diagonal temporal, y una cualquiera de la diagonal espacial,

temporal:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t) \quad (\text{I})$$

ecuación de valores iniciales

H^2

espacial:

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p(t) \quad (\text{II})$$

$2\dot{H} + 3H^2$

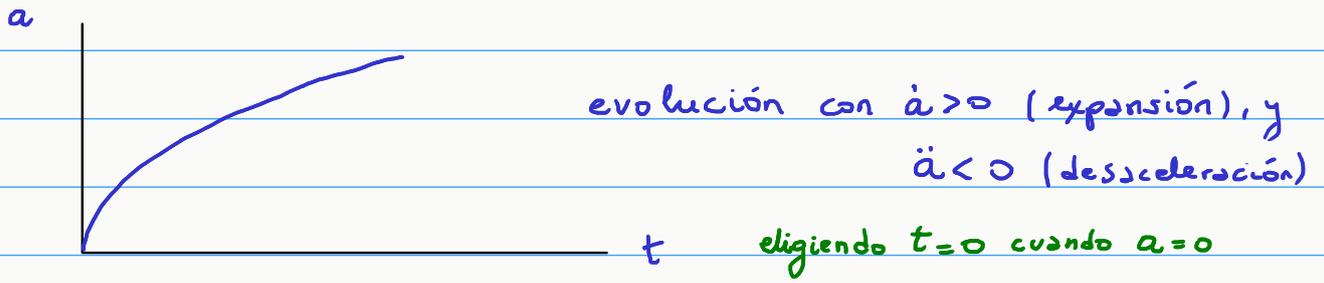
La segunda puede obtenerse derivando la primera y combinándola con la conservación de la energía-momento. Las ecuaciones no son independientes porque están ligadas por la conservación automática. En todo caso, la primera, que es de primer orden, manda porque restringe los valores iniciales de la segunda (que es de segundo orden).

Si restamos estas ecuaciones obtendremos

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(p + \frac{\rho}{3} \right)$$

Esto es interesante, porque dice que la expansión se frena siempre que el fluido tenga $w > -1/3$. Si existen varios fluidos, el fluido con mayor w domina cuando $a \rightarrow 0$. Bastará entonces que el universo en expansión contenga un fluido con $w > -1/3$ para garantizar que $\ddot{a} < 0$ en el pasado.[†] En ese caso, el factor de escala se anula en algún tiempo pasado finito, y la evolución del universo comienza en un Big-Bang donde las distancias se anulan y las densidades divergen:

[†] Sin embargo, los valores pequeños de a pueden estar obstruidos por una barrera de potencial; ver en Cap. 20 el potencial efectivo del caso $K > 0, \Lambda > 0$.



Las observaciones muestran que la expansión actual es acelerada, lo que indica la existencia de un constituyente con $w < -1/3$ que domina en la era actual, luego del dominio de la radiación primero, y la materia después.

► Solución para espacio plano y un único constituyente

Si el espacio es plano ($K=0$), conviene combinar las ecuaciones de Einstein en la siguiente forma:

$$3(I): \quad 3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho, \quad 3(I)-(II): \quad -2\dot{H} = \frac{8\pi G}{c^2} \underbrace{(\rho + p)}_{(1+w)\rho}$$

Dividiéndolas: $-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(1+w) \Rightarrow \left(\frac{1}{H}\right)' = \frac{3}{2}(1+w)$

Si $w \neq -1 \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{3}{2}(1+w)t$ (elegimos que $t=0$ sea el Big-Bang: $a(0)=0$)

La edad de este universo es $t_{\text{hoy}} = \frac{2}{3(1+w)H_{\text{hoy}}}$

donde $H_{\text{hoy}} = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \sim \frac{1}{14 \times 10^9 \text{ años}}$

si $w=0$, la edad resulta chica: las estrellas viejas son más antiguas

Como $H = \frac{d}{dt} \ln a \Rightarrow \ln a = \frac{2}{3(1+w)} \int \frac{dt}{t} \Rightarrow a(t) = \text{cte } t^{\frac{2}{3(1+w)}}$

Combinando los resultados:

$$H^2 \propto t^{-2} \propto a^{-3(1+w)} \propto (1+z)^{3(1+w)} \Rightarrow$$

$$H^2(z) = H_{\text{hoy}}^2 (1+z)^{3(1+w)}$$

Por otro lado, la densidad de energía del único constituyente cumple que

$$\rho(t) a(t)^{3(1+w)} = \text{constante} \Rightarrow \rho(t) \propto t^{-2} \propto H^2$$

(también resulta de la ecuación de valores iniciales)

▶ Universo de de Sitter

Si el único constituyente es la constante cosmológica ($w = -1$) entonces H es constante. Por lo tanto el factor de escala crece exponencialmente,

$$3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_{\Lambda} = c^2 \Lambda \Rightarrow$$

$$a(t) = cte \exp\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right]$$

universo de de Sitter ($K=0$)

▶ Einstein y la constante cosmológica. Universo estático de Einstein

Einstein introdujo la constante cosmológica por dos motivos. Por un lado le molestaba que las ecuaciones de vacío tuvieran a la geometría de Minkowski como solución. Pensaba que esto violaba el espíritu del Principio de Mach, pues esa geometría posee sistemas de referencia privilegiados sin materia en el universo a la cual atribuir ese privilegio (un privilegio sin causa física).

Por el otro lado, Einstein era consciente de que las ecuaciones con materia daban soluciones que evolucionaban en el tiempo; pero Einstein pensaba que el universo era estático. Con la introducción de la constante cosmológica, Einstein buscó eliminar las soluciones de vacío, y además obtener una solución cosmológica estática. En el universo estático de Einstein hay dos constituyentes: la constante cosmológica ($w = -1$), y materia en forma de polvo ($w = 0$). La solución estática se logra con $K > 0$. Einstein quedó satisfecho con un universo estático y cerrado, porque careciendo de borde no precisaba de condiciones de contorno para ajustar la solución; así la solución parecía satisfacer el Principio de Mach.

Las ecuaciones estáticas son:

$$(I): \frac{\kappa c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho_{mat} + \rho_\Lambda), \quad (II): \frac{\kappa c^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} (\rho_{mat} + \rho_\Lambda)$$

\uparrow \uparrow
 $= 0$ $= -\rho_\Lambda$

Restándolas: $0 = \rho_{mat} - 2\rho_\Lambda \Rightarrow \rho_{mat} = 2\rho_\Lambda = \frac{c^4}{4\pi G} \Lambda$

$$\frac{\kappa c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_\Lambda = c^2 \Lambda \Rightarrow \frac{\kappa}{a^2} = \Lambda$$

\uparrow
 ← universo de Einstein ($\Lambda > 0, \kappa > 0$)

Luego veremos que el universo de Einstein es una solución inestable.

▶ La solución de vacío de de Sitter

Inmediatamente después de que Einstein se valiera de la constante cosmológica para impedir que Minkowski fuera una solución de vacío, de Sitter encontró una solución de vacío con constante cosmológica libre de singularidades.

Más tarde Einstein dirá que la introducción de la constante cosmológica en sus ecuaciones fue el más grande desacierto de su vida. Hoy en día, la constante cosmológica parece ser la mejor forma de explicar la aceleración de la expansión del universo descubierta en 1998 (Perlmutter, Riess).

Como toda solución de vacío, la solución de de Sitter tiene escalar de curvatura constante. En efecto tomando la traza de las ecuaciones de Einstein de vacío,

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = 0 \Rightarrow R - 2R - 4\Lambda = 0 \Rightarrow R = -4\Lambda$$

\uparrow \uparrow
 ← \uparrow \uparrow
 signatura +--- signatura +---

La geometría de de Sitter puede presentarse en diferentes cartas. En una de esas cartas corresponde al universo plano de de Sitter, que ya hemos visto.

Pero de Sitter (1917) obtuvo la solución en una forma estática:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) c^2 dT^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

El cambio de coordenadas que lleva esta solución a la forma de universo plano fue hallado por Lemaître en 1925, y es válido si $\Lambda > 0$:

$$K = 0, \quad a(t) = cte \exp\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right],$$

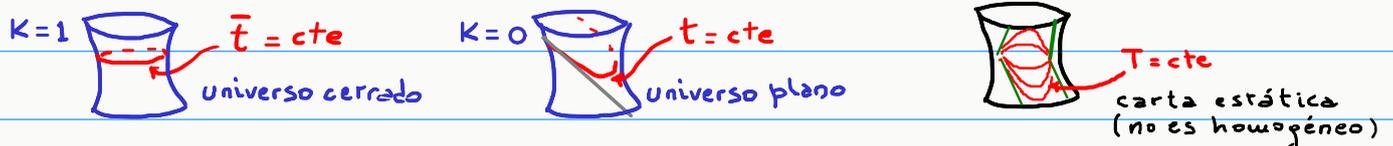
y existe otra carta donde la solución se ve como un universo cerrado,

$$K = 1, \quad a(\bar{t}) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c\bar{t}\right]$$

Si $\Lambda < 0$ existe una carta donde la solución se ve como un universo abierto:

$$K = -1, \quad a(t') = \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}} \cos\left[\sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} ct'\right] \quad \text{"anti-de Sitter"}$$

Siendo una solución de vacío, la geometría de de Sitter carece de un fluido que privilegie una foliación. Puede demostrarse que el espacio-tiempo de de Sitter es la geometría de un hiperboloide de 4 dimensiones sumergido en un espacio de Minkowski de 5 dimensiones. Es una solución de simetría máxima, ya que el grupo de Lorentz en 5 dimensiones (10 generadores) deja invariante el hiperboloide. Si $\Lambda > 0$ el hiperboloide puede ser "cortado" (foliado) en un espacio homogéneo y un tiempo de dos maneras diferentes, lo que da lugar a los dos posibles universos de de Sitter (cerrado y plano). En el caso plano ($K=0$) la carta sólo cubre la mitad del hiperboloide:



Si $\Lambda < 0$ (anti-de Sitter), el hiperboloide está volcado y sólo permite realizar un universo abierto ($K = -1$).

Si $\Lambda = 0$ la solución de de Sitter se vuelve la geometría de Minkowski, que también admite ser "cortada" de distintas formas. Así podemos verla como un universo plano con factor de escala constante, o como el universo abierto de Milne:

$$K = -1, \quad a(t') = ct'$$



**20 Fondo cósmico de microondas.
Eras dominadas por la radiación y
la materia. Materia y energía
oscuras**

En el capítulo anterior vimos cómo usar las ecuaciones de Einstein para obtener la relación entre el parámetro de Hubble H y el corrimiento al rojo z en un universo plano con un único constituyente. Esta relación es indispensable para el cálculo de la relación entre la distancia actual a una fuente, σ_r , y su corrimiento al rojo z (ver la integral para calcular σ_r), y con ello obtener la relación entre la distancia luminosa d_L , z y el valor actual del parámetro de Hubble H_{hoy} .

Pero el universo real posee varios constituyentes: materia, radiación, etc. Además, la cuestión de si es o no espacialmente plano debe ser resuelta mediante observaciones*. Las densidades de energía de los distintos constituyentes pueden ser mejor apreciadas si son referidas a un estándar de densidad que resulte práctico. Referiremos las densidades a la densidad necesaria para que el universo sea espacialmente plano; ese valor crítico es (sale de la ecuación de valores iniciales $\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho$):

$$\rho_{\text{critico}}(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2$$

Según el valor actual del parámetro de Hubble, el valor actual de ρ_{critico} es

$$\rho_{\text{critico}}(\text{hoy}) c^{-2} \simeq 0,9 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Para describir las densidades de los constituyentes en términos de fracciones de ρ_{critico} , definimos

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{critico}}(t)}$$

* Por cierto la geometría FRW es espacio-temporalmente curva. Su escalar de curvatura es

$$R = -\frac{6}{c^2} \left[(1-q)H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right] \quad \text{signatura (+---)}$$

La materia luminosa observada hoy tiene una densidad promedio de

$$\Omega^{\text{mat luminosa}} (\text{hoy}) \sim 0,005$$

Sin embargo, se observan efectos debido a materia oscura en los halos de las galaxias (Vera Rubin, 1980) y cúmulos de galaxias, donde la presencia de materia que no emite luz se infiere mediante la observación del movimiento de estrellas en los halos, y los efectos de lente gravitatoria producidos por la deflexión de la luz debida a materia no visible. Las evidencias de materia oscura elevan la densidad de materia al valor

$$\Omega^{\text{mat}} (\text{hoy}) \sim 0,3$$

lo que significa que el 99% de la materia en el universo es materia oscura. Buena parte de esta materia oscura es de naturaleza desconocida. Una parte es, sin duda, materia ordinaria (bariónica) distribuida en agujeros negros, enanas blancas, protoestrellas como las enanas marrones, planetas, etc. Pero se sabe que una cantidad muy grande de materia bariónica entraría en conflicto con la nucleosíntesis (la creación de los núcleos de los elementos químicos en el universo primitivo) pues llevaría a una abundancia de deuterio incompatible con el valor observado. Para que esto no suceda, el 85 % de Ω^{mat} debería ser materia oscura no bariónica ($\Omega^{\text{barion}} \simeq 0,04$); la única contribución conocida a este 85% es la de los neutrinos, pero es insuficiente.

El universo está lleno de un gas de fotones: el fondo cósmico de microondas (CMB). Estos fotones no fueron emitidos por la materia luminosa sino que provienen del universo primitivo, y son anteriores a la época de formación de estrellas y galaxias. El 99,97% de la densidad de energía electromagnética en el universo se debe al fondo cósmico de microondas.

Cada lugar del universo es alcanzado por fotones de CMB, desde todas las direcciones. El fondo cósmico de radiación se caracteriza por tener el espectro de un cuerpo negro a la temperatura de 2,725 K. La radiación posee una alta isotropía, pues esta temperatura sólo exhibe fluctuaciones en la siguiente cifra significativa. Según la curva de radiación de un cuerpo negro, una temperatura de unos 3K implica que la densidad de energía es máxima en longitudes de onda del orden de 1mm (300 GHz, $1,24 \times 10^{-3}$ eV). La densidad de energía del gas de fotones es

$$\Omega^{\text{fot}}(\text{hoy}) \simeq 5 \times 10^{-5}$$

Esta relación entre temperatura y densidad surge de la ley de Stefan-Boltzmann

$$\rho^{\text{fot}} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^3 h^3} T^4 = 7,56 \times 10^{-16} T^4 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

Como vimos, la densidad de los fotones va como a^{-4} ; por lo tanto la temperatura es proporcional a a^{-1} . La temperatura del gas de fotones aumenta hacia el pasado y disminuye hacia el futuro. También la temperatura de la materia disminuye al expandirse adiabáticamente a medida que el universo evoluciona. La historia del universo puede ser contada en escalas de tiempo cosmológico t , de corrimiento al rojo z , o de temperatura T del CMB.

En la época en que la temperatura del gas de fotones era de 3000 K ($k_B T \simeq 0,26$ eV) la cola del espectro de cuerpo negro tenía suficiente cantidad de fotones con la energía necesaria para ionizar toda la materia (la energía de ionización del hidrógeno es de 13,6 eV). Esto es así gracias a que el universo contiene muchos más fotones que protones; hoy en día hay 400-500 fotones por cm^3 , pero menos de un protón por m^3 (según resulta del valor de Ω^{barion}).

A temperaturas mayores que 3000 K la materia estaba totalmente ionizada. En estas condiciones el universo era opaco a la propagación de la luz, porque los fotones eran dispersados por los electrones libres (scattering de Thomson). Cuando el universo se enfrió por debajo de los 3000 K, se **desacoplaron** la radiación y la materia, se formaron átomos de hidrógeno y helio, y los fotones comenzaron a viajar libremente*. Como la temperatura de los fotones en el desacople es ~ 3000 K, y la actual es ~ 3 K, tenemos

$$1000 \sim \frac{T_{\text{desacople}}}{T_{\text{hoy}}} = \frac{a_{\text{hoy}}}{a_{\text{desacople}}} = 1+z \Rightarrow \boxed{z_{\text{desacople}} \sim 1000}$$

\uparrow
 $T_{\text{fotones}} \propto a^{-1}$

En la era actual la materia domina sobre la radiación ($\Omega_{\text{mat}}^{\text{mat}}(\text{hoy}) \gg \Omega^{\text{fot}}(\text{hoy})$). Pero hacia el pasado el dominio se invierte, pues la densidad de energía de los fotones crece más rápido que la de la materia. La era del dominio de la radiación se desarrolló hasta que se igualaron ambas densidades:

$$\rho^{\text{mat}}(t) = \rho^{\text{mat}}(\text{hoy}) \frac{a(\text{hoy})^3}{a(t)^3} = \rho^{\text{mat}}(\text{hoy}) (1+z)^3$$

$$\rho^{\text{fot}}(t) = \rho^{\text{fot}}(\text{hoy}) \frac{a(\text{hoy})^4}{a(t)^4} = \rho^{\text{fot}}(\text{hoy}) (1+z)^4$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^{\text{mat}}(t)}{\rho^{\text{fot}}(t)} = \frac{\rho^{\text{mat}}(\text{hoy})}{\rho^{\text{fot}}(\text{hoy})} \frac{1}{1+z} = \frac{\Omega^{\text{mat}}(\text{hoy})}{\Omega^{\text{fot}}(\text{hoy})} \frac{1}{1+z} \sim \frac{0,3}{5 \times 10^{-5}} \frac{1}{1+z}$$

Las densidades se igualan para $z \sim 6000$; el dominio de la radiación finalizó antes del desacople.

* El medio intergaláctico se ionizará casi completamente con la emisión UV de las primeras estrellas y galaxias, en $z \sim 10$. Pero su densidad es lo suficientemente baja para no afectar la propagación de fotones.

Podemos estimar el tiempo del desacople suponiendo que la materia dominó hasta hoy (luego vamos a revisar esta suposición) y que el universo es plano. En ese caso el factor de escala va como $t^{2/3}$; entonces

$$1+z = \frac{a(t_{\text{hoy}})}{a(t)} = \left(\frac{t_{\text{hoy}}}{t}\right)^{2/3}$$

Si $t_{\text{hoy}} \sim 14 \times 10^9$ años entonces el tiempo para $z \sim 1000$ es

$$t_{\text{desacople}} \sim 400.000 \text{ años}$$

El fondo cósmico de microondas fue descubierto por Penzias y Wilson en 1965. Fue identificado como una reliquia del universo primitivo por Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson, lo que dio un sustento definitivo al modelo de Big-Bang. Antes del desacople la radiación interactuaba con la materia ionizada; las pequeñas anisotropías de CMB se corresponden con inhomogeneidades en la densidad de materia en el momento de desacople, que evolucionarán hasta formar las estructuras del universo actual (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.).

La evolución térmica del universo puede continuarse hacia eras pasadas más remotas. Así, a la temperatura de 10^9 K ($k_B T \sim 0,1$ MeV) los neutrones se reunían con protones para formar deuterones y núcleos de helio. Hasta esa época, que es la época de la **nucleosíntesis primordial**, los fotones habían tenido energías suficientemente altas para impedir esas fusiones. Podemos pensar en épocas más remotas donde los quarks que constituyen los hadrones (bariones y mesones) estaban libres, y había abundancia de leptones masivos que luego se aniquilarían de a pares dando lugar a una cantidad importante de neutrinos y fotones (el descenso de la temperatura dejó a éstos sin la energía suficiente para recrear a aquellos). Los **neutrinos** se desacoplaron antes que los fotones, cuando $T \sim 5 \times 10^9$ K. Los neutrinos primordiales fueron ultra-relativistas hasta $z \sim 500$. Hoy en día se han enfriado a $1,95$ K, y forman un gas de materia leptónica de $\Omega' = 0,68 \Omega^{\text{fot}}$ (el $0,68$ depende del número de especies de neutrinos; corresponde a 3 especies).

► Universo con varios constituyentes

Las ecuaciones que describen el comportamiento del universo son la ecuación de conservación de la energía

$$\underbrace{\rho(t) a(t)^{3(1+w)}}_{\text{constante}} = \rho(\text{hoy}) a(\text{hoy})^{3(1+w)} = \rho_{\text{crit}}(\text{hoy}) \Omega(\text{hoy}) a(\text{hoy})^{3(1+w)}$$

y la ecuación de valores iniciales,

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t) = \underbrace{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{\text{crit}}(\text{hoy}) \Omega(\text{hoy})}_{H(\text{hoy})^2} \left(\frac{a(\text{hoy})}{a(t)} \right)^{3(1+w)}$$

Si existen varios constituyentes la densidad de energía se descompone en una suma de términos (ignorando interacciones):

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = H_0^2 \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+w_i)} \quad H_0 \equiv H(\text{hoy}), \text{ etc.}$$

Si especializamos la ecuación en el tiempo actual ($z=0$):

$$H_0^2 + \frac{Kc^2}{a_0^2} = H_0^2 \sum_i \Omega_{0i} \Rightarrow \boxed{-\frac{Kc^2}{a_0^2} = H_0^2 \left(1 - \sum_i \Omega_{0i}\right)}$$

(cuando los Ω_i suman 1, la densidad es crítica y $K=0$). Reemplazando el resultado en la ecuación anterior tenemos que

$$H^2 = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+w_i)} + \left(1 - \sum_i \Omega_{0i}\right) \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right)$$

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)} + (1 - \sum_i \Omega_{0i}) (1+z)^2 \right)$$

Nótese que la curvatura espacial contribuye a $H(z)$ como si se tratara de un fluido con una ecuación de estado con $\omega_k = -\frac{1}{3}$, y una fracción de energía $\Omega_k = 1 - \sum_i \Omega_{0i}$ (dependiente de las demás).

Esta expresión para $H(z)$, que resulta de resolver la dinámica del universo, entra en la expresión que relaciona z con la distancia actual a la fuente,

$$\sigma_r = a_r |\Delta\chi| = \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')},$$

que a su vez se relaciona con la distancia luminosa d_L .

► La expansión acelerada del universo. Energía oscura

El resultado exacto para $H(z)$ que acabamos de obtener puede compararse con el desarrollo en serie donde definimos el parámetro de desaceleración:

$$H(z) = H_r + H_r (1+q_r) z + \dots$$

En efecto, desarrollando a primer orden el resultado exacto obtenemos

$$H(z)^2 = H_0^2 \left(1 + 2z + \sum_i \Omega_{0i} (1+3\omega_i) z \right) + \dots$$

Entonces

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{0i} (1+3\omega_i)$$

(por supuesto, esta relación entre q y los Ω_i se cumple en el instante actual o en cualquier otro instante).

El parámetro de desaceleración sería positivo para constituyentes normales. Pero en 1998 (Riess) y 1999 (Perlmutter) hubo dos grupos que separadamente observaron la relación d_L vs. z hasta valores de z del orden de 1 (usaron supernovas "Ia" como candelas patrón), y concluyeron que el valor actual de q es negativo (recordemos que la relación es $c^{-1} H_r d_L = z + \frac{1}{2} (1 - q_r) z^2 + \dots$). De acuerdo a esas observaciones, el valor actual de q es $q(\text{hoy}) \sim -0,6$. Este descubrimiento implica la existencia de un constituyente con $w < -\frac{1}{3}$ que genéricamente se designa con el nombre de energía oscura.

El candidato más simple para la energía oscura es la constante cosmológica ($w = -1$), lo que parece estar confirmado mediante otras determinaciones observacionales. En tal caso el universo actual estaría dominado por dos constituyentes: la materia ($w = 0$) y la constante cosmológica ($w = -1$).

Reemplazando en la expresión para q :

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0^{mat} - \Omega_0^\Lambda$$

donde

$$\Omega^\Lambda = \frac{\frac{\Lambda}{k}}{\rho_{crit}} = \frac{\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}}{\frac{3c^2 H^2}{8\pi G}} = \frac{c^2 \Lambda}{3 H^2}$$

La determinación observacional de q_0 no permite obtener las fracciones actuales de los constituyentes; sólo da una relación entre las mismas. Se requiere una observación de otro tipo para romper la "degeneración". Una segunda relación entre Ω^{mat} y Ω^Λ se obtiene del tamaño característico de las fluctuaciones de temperatura en el fondo cósmico de microondas. Estas fluctuaciones provienen de las interacciones entre fotones, electrones y bariones antes del desacople (o recombinación). La materia buscaba aglutinarse gravitatoriamente y la presión de los fotones se lo impedía.

La competencia entre estas dos tendencias opuestas generaban oscilaciones de densidad, presión y temperatura. Estas oscilaciones poseen una escala de distancia característica (el "horizonte de sonido"), que quedó impresa en las fluctuaciones de la temperatura del fondo cósmico de microondas cuando la radiación se desacopló de la materia. Esta distancia característica tiene un valor conocido, que subtende un ángulo de 1° si el universo es plano. En cambio, si el universo es cerrado o abierto el ángulo subtendido sería distorsionado por la curvatura. Este ángulo fue observado por primera vez en 2000 (BOOMERanG), junto con otras características de las fluctuaciones de temperatura en la CMB. El valor medido favoreció al universo plano; esto implica que las fracciones de los constituyentes deberían sumar 1:

$$\Omega_0^{\text{mat}} + \Omega_0^\Lambda \approx 1$$

Este resultado, junto con el del parámetro de desaceleración, lleva a

$$\Omega_0^{\text{mat}} \sim 0,3 \text{ y } \Omega_0^\Lambda \sim 0,7 \quad (\Rightarrow \Lambda \sim 0,7 \frac{3H_0^2}{c^2} = 0,1 \text{ Gpc}^{-2} = 10^{-52} \text{ m}^{-2}).$$

► **Ejercicio:** determinar la distancia actual a las fuentes que emitieron los fotones del fondo cósmico de microondas que recibimos hoy.

Hay que calcular $\sigma_r = \int_0^{1000} \frac{c dz}{H(z)}$ en un universo con $\Omega_0^{\text{mat}} \sim 0,3$, $\Omega_0^\Lambda \sim 0,7$.

$$\sigma_r (z=1000) = \frac{c}{H_0} \int_0^{1000} \frac{dz}{\sqrt{0,3(1+z)^3 + 0,7}} = 13,8 \text{ Gpc} = 45 \text{ Gly} \quad \begin{matrix} \text{año luz} \\ \text{3,2} \end{matrix}$$

Como antes del desacople los fotones no podían propagarse libremente, este valor de 45 mil millones de años luz o 13,8 Gpc corresponde al radio del universo visible en radiación electromagnética.

► Ejercicio: determinar la edad de un universo con $\Omega_0^{mat} \sim 0,3$, $\Omega_0^\Lambda \sim 0,7$.

$$dt = \frac{dt}{da} da = \frac{da}{aH} \Rightarrow t_{hoy} = \int_0^{a_0} \frac{da}{aH}$$

En $H(z)$ reemplazamos $1+z$ por a_0/a :

$$t_{hoy} = \frac{1}{H_0} \int_0^{a_0} \frac{da}{a \sqrt{0,3 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + 0,7}} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da'}{a' \sqrt{0,3 a'^{-3} + 0,7}}$$

$$t_{hoy} = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3\sqrt{0,7}} \ln \frac{\sqrt{0,7 a'^3} + \sqrt{0,3 + 0,7 a'^3}}{\sqrt{0,3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{H_0} 0,96$$

$\xrightarrow{14 \times 10^9 \text{ años}}$

Este resultado muestra que la constante cosmológica ayuda a obtener un valor adecuado para la edad del universo, pues ya mostramos que un universo plano lleno exclusivamente de materia no conduce a un valor adecuado para la edad del universo. Si la contribución de la radiación fuera incluida, este resultado no sería afectado sensiblemente.

► Potencial para la evolución del factor de escala

Volvamos a la expresión para H en un universo dominado por materia y constante cosmológica:

$$\underbrace{H^2}_{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2} = H_0^2 \left[\underbrace{\Omega_0^{mat}}_{\left(\frac{a_0}{a}\right)^3} (1+z)^3 + \underbrace{\Omega_0^\Lambda}_{-\frac{Kc^2}{a_0^2 H_0^2}} + \underbrace{(1 - \Omega_0^{mat} - \Omega_0^\Lambda)}_{\left(\frac{a_0}{a}\right)^2} (1+z)^2 \right]$$

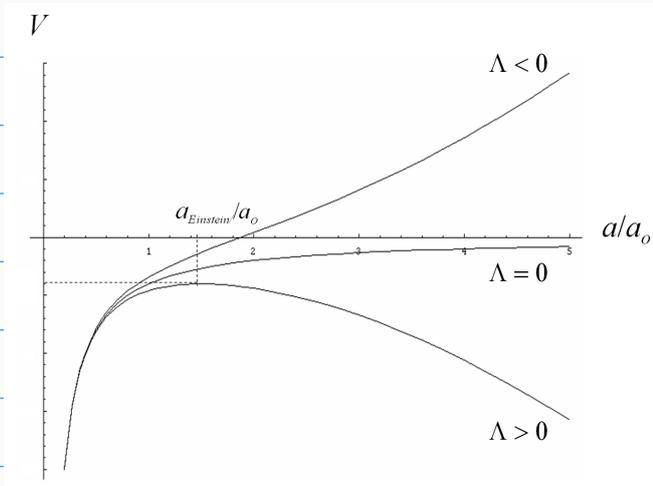
Multiplicando por a^2 y dividiendo por a_0^2 obtenemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - H_0^2 \left[\Omega_0^{mat} \frac{a_0}{a} + \Omega_0^\Lambda \frac{a^2}{a_0^2} \right] = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

$V\left(\frac{a}{a_0}\right)$

↑ nivel de "energía"

Podemos entender esta ecuación como lo hacemos con la conservación de la energía de una partícula en un potencial V

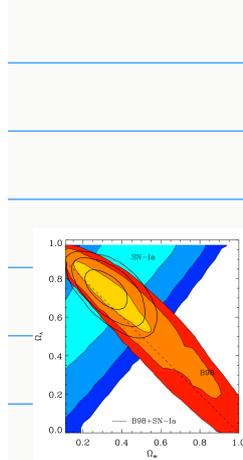
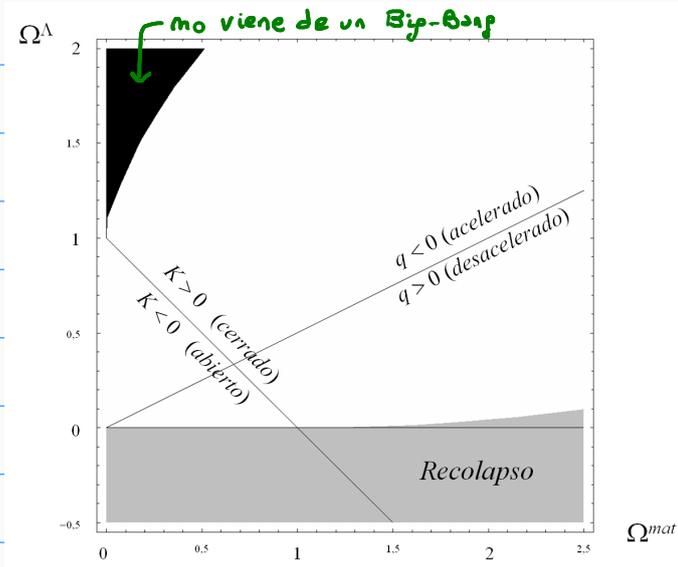


- Si $\Lambda < 0$ la expansión se detiene, y el universo comienza a contraerse

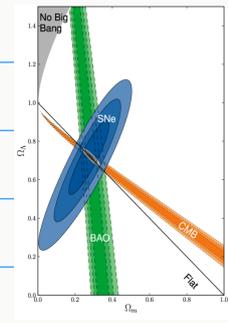
- si $\Lambda \geq 0$ la expansión puede detenerse o no, dependiendo del nivel de energía $-Kc^2/a_0^2$

- Hay un punto de equilibrio inestable cuando $\Lambda > 0, K > 0$. Es el universo de Einstein.

Podemos resumir estos aspectos en el plano de los parámetros $\Omega_0^{mat}, \Omega_0^\Lambda$:



arXiv:0201137
BOOMERanG



arXiv:1105.3470

▶ Tiempo conforme

Es útil definir una coordenada temporal $\eta(t)$ que permite ver a la geometría FRW plana como conforme a la geometría de Minkowski. De esa forma los rayos de luz viajarán a 45° en el plano $\eta-\chi$. Definimos

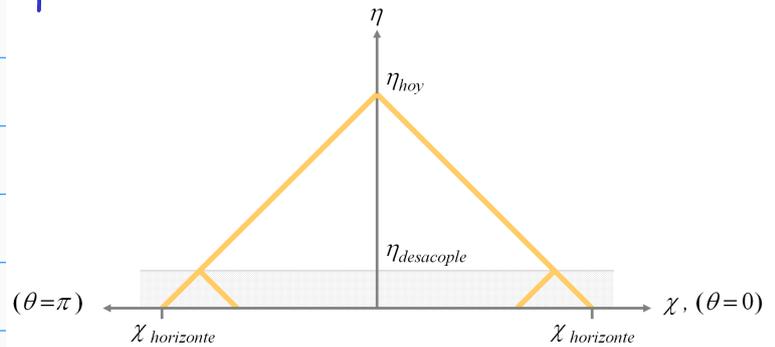
$$d\eta \doteq \frac{c dt}{a(t)} = \frac{c da}{a^2 H(a)}$$

Entonces $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - dl^2]$

Si dl^2 es plano, el corchete es Minkowski; FRW plano es conforme a Minkowski.

Los rayos de luz radiales viajan según $d\eta = \pm d\chi$ (aun si $K \neq 0$).

Puede verse que si la edad del universo η_{hoy} es finita,[†] entonces existen "horizontes de partícula": cada observador sólo podría estar causalmente conectado a una porción



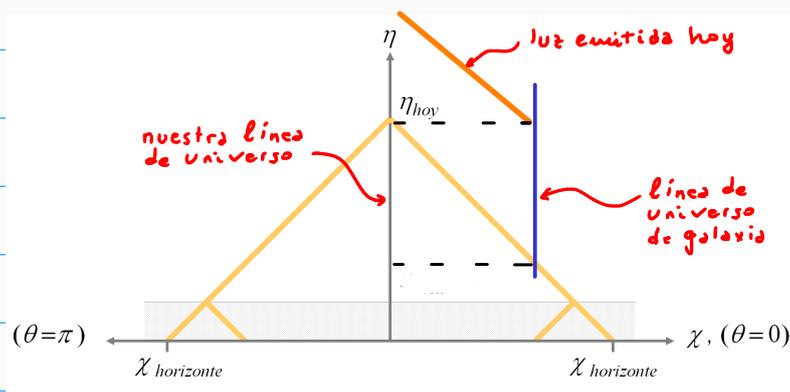
de universo vecino a él. En particular esto es válido para los puntos de la superficie del "último scattering", desde donde nos llegan los fotones de la CMB viajando desde el tiempo de desacople. ¿Cómo puede ser CMB tan isótropa si los fotones que llegan en distintas direcciones no están conectados causalmente? (en el modelo estándar de Big-Bang es suficiente una diferencia en la dirección de 1° para que no haya conexión causal). La isotropía tendría que deberse a la condición inicial; pero esta respuesta es poco atractiva. En los modelos inflacionarios, el modelo estándar es precedido por una era de expansión exponencial gobernada por un campo escalar cuántico cuyo estado es inestable. Al decaer este campo, su energía se transforma en partículas y radiación, dando comienzo a la era dominada por la radiación. Si la era inflacionaria dura suficiente tiempo, los puntos de la superficie del último scattering quedarán causalmente conectados. Los modelos inflacionarios dan respuesta también al problema de la planitud del universo. En el modelo estándar la condición inicial $\sum \Omega_i \approx 1$ tiende a perderse durante la evolución del universo. Por lo tanto se requiere de un ajuste muy fino de condiciones iniciales para llegar a nuestra época con $\sum \Omega_{0i} \approx 1$. En cambio, durante la era inflacionaria el universo evoluciona hacia la planitud, dejando una condición inicial muy precisa para el comienzo de la era estándar.

[†] Esto sucede si cuando $a \rightarrow 0$ es $H(a) \propto a^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$; es decir, si existe un constituyente con $w > -1/3$.

► El futuro del universo visible

La expansión acelerada del universo tiene una consecuencia dramática. Si el espacio se expande más rápido que lo que la luz puede recorrer en el tiempo de la expansión, ocurrirá que galaxias que hoy son visibles (en el estado que tenían en un pasado), podrán dejar de serlo en un futuro porque la luz que emiten hoy nunca nos alcanzará.

Tomemos una de las galaxias visibles más lejanas; la luz que hoy recibimos habrá viajado durante unos 10 mil millones de años. Para que la luz que emite hoy nos alcance algún día, el tiempo conforme debería crecer lo suficiente (ver Figura). Como la luz viaja según $\Delta\eta = \pm \Delta\chi$, habrá que aguardar un tiempo



conforme igual a $|\Delta\chi|$. Pero en un universo dominado por la constante cosmológica, como lo será el universo futuro, el parámetro de Hubble se vuelve constante. La consecuencia es que η no crece indefinidamente.

En efecto, para H constante es

$$d\eta = \frac{c da}{a^2 H} \Rightarrow \Delta\eta = \frac{c}{H} \int_{a_0}^{a_{final}} \frac{da}{a^2} = \frac{c}{H} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{final}} \right)$$

Cuando el factor de escala se vuelve infinito, el tiempo conforme transcurrido es

$$\Delta\eta_{\infty} = \frac{c}{a_0 H}$$

Este es el tiempo conforme de la evolución de un universo de de Sitter, desde el instante en que el factor de escala vale a_0 hasta que se vuelve asintóticamente infinito. En tal universo, la luz emitida en ese instante por cualquier galaxia que esté a $|\Delta\chi| > \frac{c}{a_0 H}$ no llegará nunca a nuestro punto de observación, por más grande que sea el tiempo cosmológico Δt transcurrido.

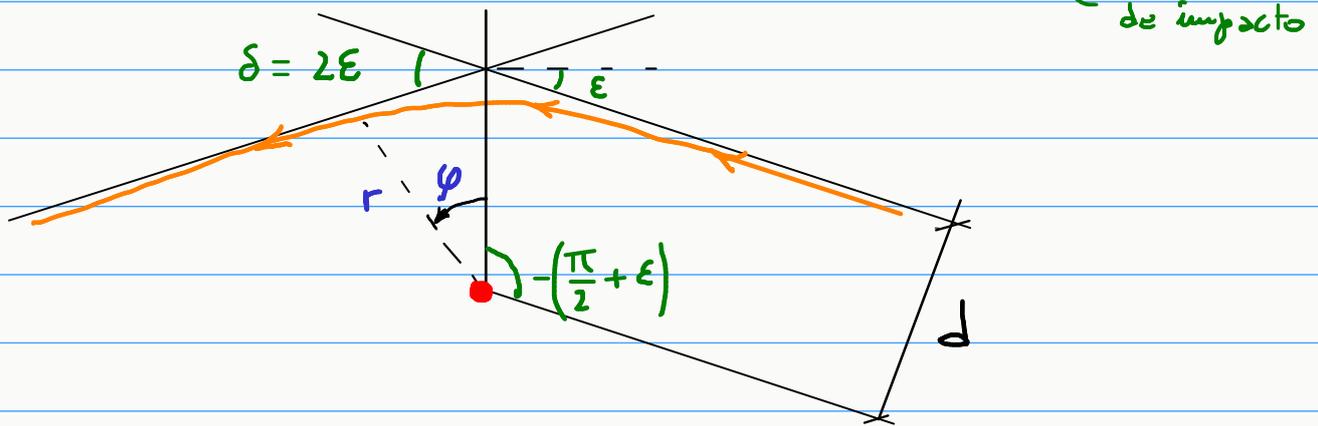
(En cambio, en un universo dominado por materia es $H \propto a^{-3/2}$; entonces $\Delta\eta_{\infty}$ diverge).

21 Lentes gravitatorias. Diagramas de Penrose

▶ Lentes gravitatorias

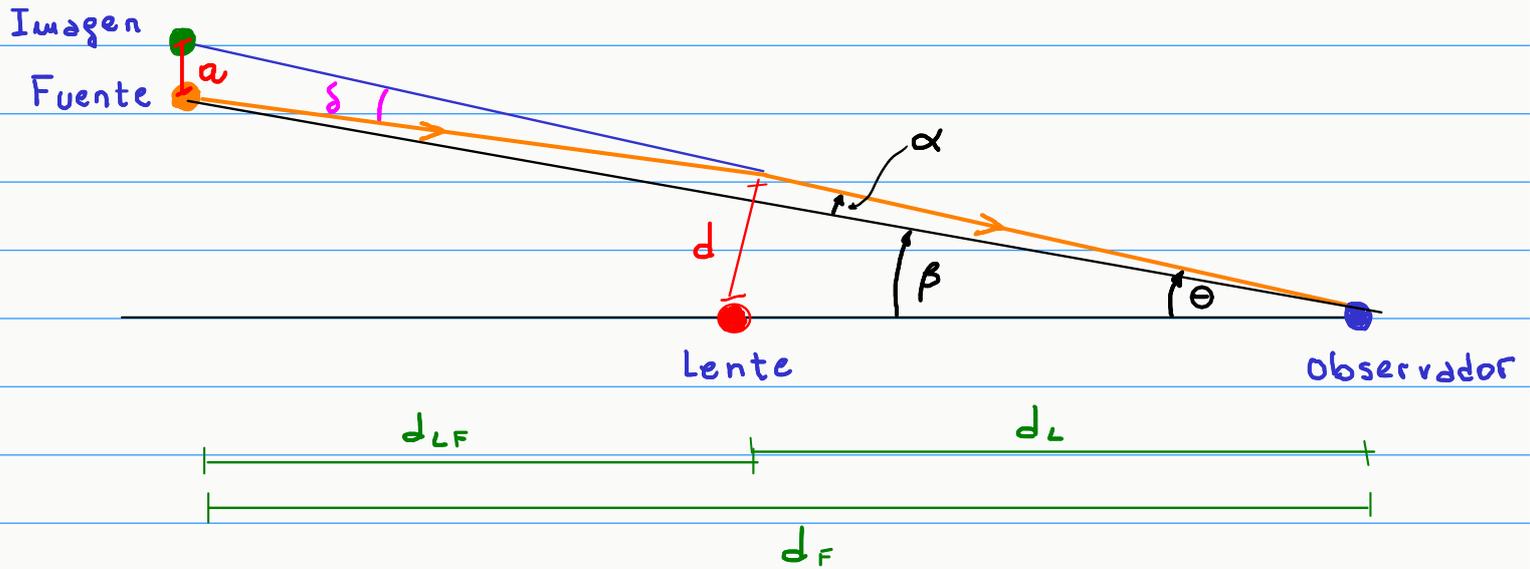
(Bibliog.: -Schneider, Ehlers y Falco)
-Carroll

Consideraremos el fenómeno de lente gravitatoria en la geometría de Schwarzschild, y en la aproximación de campo débil. Hemos visto que, en estas condiciones, la luz se desvía un ángulo $\delta = 2\epsilon = \frac{2r_s}{d}$



Esta deflexión de rayos de luz semeja la que se produce cuando la luz pasa por una lente convergente, cuyo centro correspondería al centro de la geometría de Schwarzschild. Sin embargo hay una diferencia: en el caso de una lente convergente, la deflexión aumenta cuando aumenta el parámetro de impacto, mientras que en el caso gravitatorio sucede lo contrario. Así en óptica las lentes convergentes enfocan rayos y pueden producir imágenes reales; en gravedad esto no ocurre. No obstante la desviación gravitatoria de la luz produce distorsiones en la percepción de las posiciones y formas de los objetos celestes, pudiéndose formar imágenes múltiples.

Para estudiar la cuestión es útil aproximar la trayectoria de los rayos mediante sus asíntotas. La Figura siguiente muestra la trayectoria de un rayo en el plano que contiene la fuente, la lente y el observador. Supondremos que todos los ángulos son pequeños.



$$a \approx d_{LF} \delta, \quad d \approx d_L \theta$$

La alteración de la visual a la estrella es el ángulo $\alpha = \theta - \beta$

$$\theta - \beta = \alpha = \frac{a}{d_F} = \frac{d_{LF}}{d_F} \delta = \frac{d_{LF}}{d_F} \frac{2r_s}{d} = \frac{4 d_{LF}}{d_L d_F} \frac{GM}{c^2} \frac{1}{\theta}$$

Entonces

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Ecuación de la lente (deflexión débil)

donde

$$\theta_E \doteq \sqrt{\frac{4 GM d_{LF}}{d_L d_F c^2}} = \sqrt{\frac{2 r_s d_{LF}}{d_L d_F}}$$

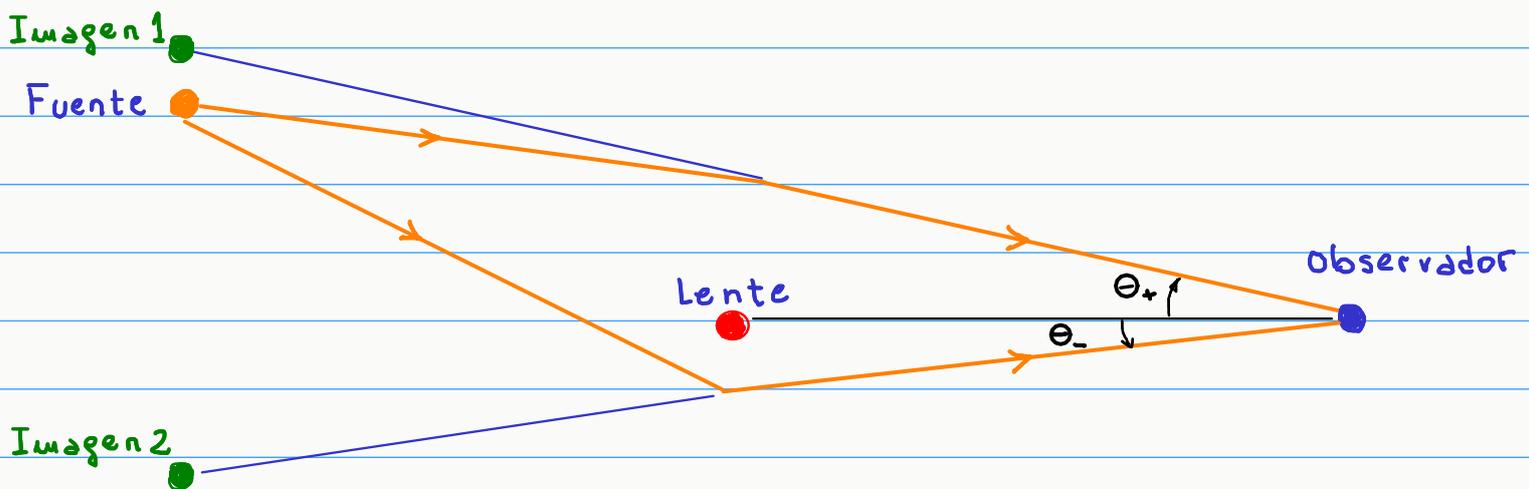
Hay dos valores de θ que resuelven la ecuación de la lente:

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 \theta_E^2} \right), \quad \theta_+ > \beta, \quad \theta_- < 0$$

Entonces hay dos imágenes, con una separación

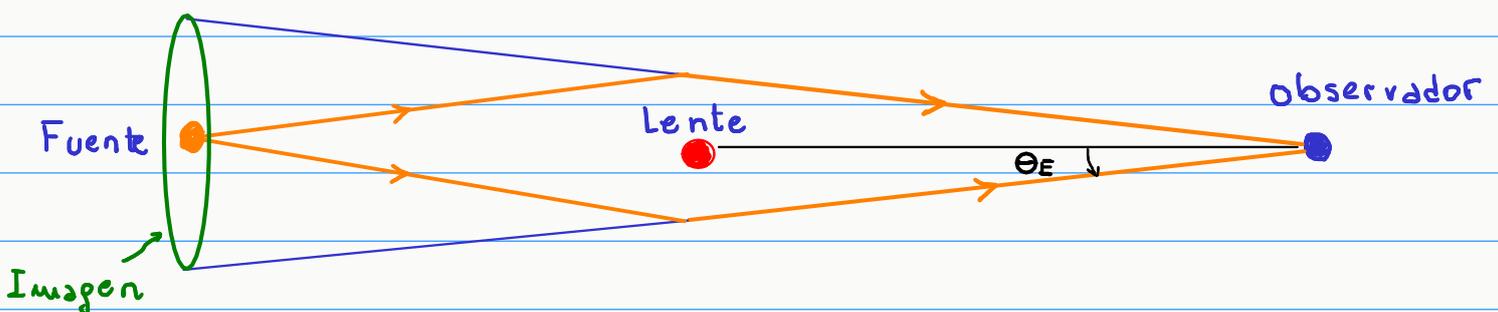
$$\Theta_+ - \Theta_- = \sqrt{\beta^2 + 4\Theta_E^2} \quad , \quad \text{además es } \Theta_+ + \Theta_- = \beta$$

La imagen que se observa bajo el ángulo Θ_- tiene menor parámetro de impacto (por lo tanto, mayor desviación) como se ve en la Figura siguiente:



Para que valga la aproximación de campo débil debe ser $d_L \Theta_- \gg r_s$. Si la lente no es puntual, la Imagen 2 podría ser obstruida por el cuerpo del objeto que actúa como lente.

En el caso $\beta = 0$, cuando la fuente, la lente y el observador están alineados, hay una única solución $\Theta = \Theta_E$; la imagen deviene en un anillo ("anillo de Einstein")



Está claro que para que el anillo sea observable Θ_E tiene que ser mayor que el ángulo subtendido por el cuerpo del objeto que actúa como lente.

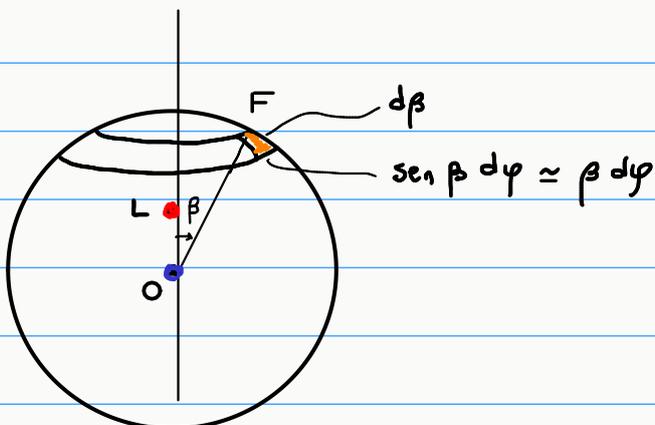
Si β se aparta de cero entonces vale que $\Theta_+ > \Theta_E$ y $|\Theta_-| < \Theta_E$.

El orden de magnitud de Θ_E puede variar desde milésimas de segundo de arco hasta segundos de arco. Para una lente de masa comparable a la solar (r_s es igual a algunos kilómetros), y distancias interiores a la galaxia (digamos $d \sim 1 \text{ kpc} = 3 \times 10^{16} \text{ km}$) es $\Theta_E \sim 10^{-8} = 2$ milisegundos de arco. Pero también hay "lensing" a escala cosmológica, donde la lente puede ser un cúmulo de galaxias, y las distancias involucradas llegan a cientos de Mpc.

En el caso cosmológico debemos tener en cuenta que la relación entre distancia y ángulo no es la de la geometría de Euclides, como venimos usando en la aproximación de campo débil de la lente de Schwarzschild. En ese caso las distancias de las expresiones que hemos utilizado corresponden, en realidad, a la noción de distancia diámetro-ángulo que veremos luego (en particular, no tendría sentido reemplazar d_F por $d_L + d_{LF}$).

► Magnificación de la lente de Schwarzschild

Sea una fuente extensa que subtende un ángulo $d\beta$ en el plano OLF. Como β es pequeño, el ángulo sólido subtendido se aproxima por $\beta d\beta d\varphi$. Las respectivas imágenes subtenden los ángulos sólidos $\Theta_{\pm} d\Theta_{\pm} d\varphi$



La magnificación μ de la lente es el cociente entre los ángulos sólidos subtendidos por la imagen y la fuente:

$$\mu_{\pm} = \frac{\Theta_{\pm} d\Theta_{\pm}}{\beta d\beta}$$

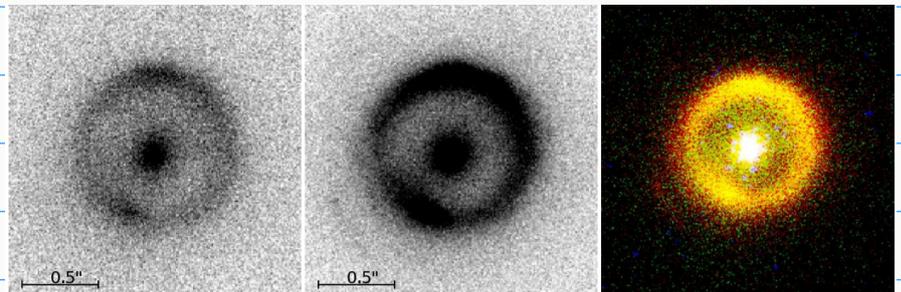
Como $\theta_{\pm} = \frac{\beta}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \right)$, entonces

$$\mu_{\pm} = \frac{\left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \right)^2}{4 \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}}} + \sqrt{1 + 4 \frac{\theta_E^2}{\beta^2}} \pm 2 \right],$$

lo que implica que las dos imágenes tienen distinto brillo.

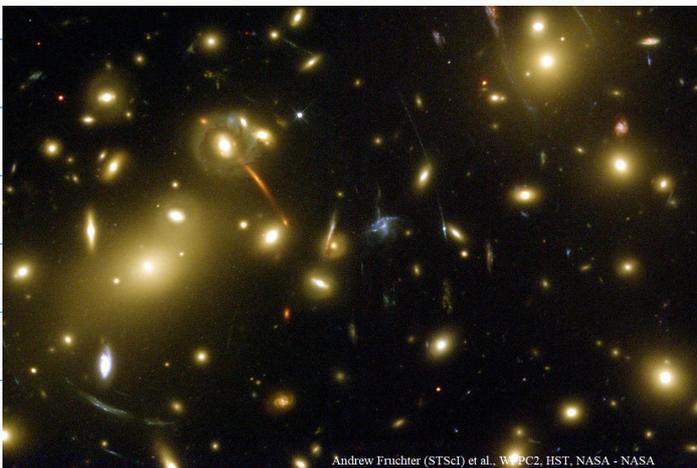
La primera detección de una doble imagen ocurrió en 1979 (Walsh, Carswell y Weymann). La fuente es un quasar a $z=1,4$; sus imágenes están separadas por 5,7 arcsec. La lente es una galaxia a $z=0,35$.

El primer anillo de Einstein (incompleto) fue observado en 1988, en emisiones de radio. La siguiente Figura muestra el primer anillo de Einstein completo detectado, que corresponde a un quasar a $z=1,8$; en el centro de la imagen se ve la galaxia que actúa como lente.



B1938+666.

arXiv:1206.1681



Andrew Fruchter (STScI) et al., WFC2, HST, NASA - NASA

Imágenes en forma de arco producidas por el cúmulo Abell 2218

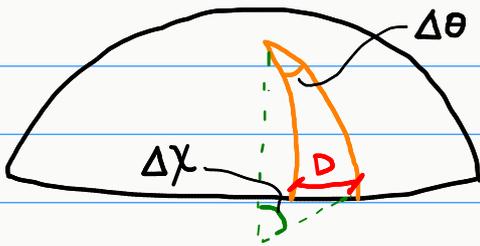
► Distancia diámetro-angular

Si D es el diámetro de una fuente que se observa bajo un ángulo $\Delta\theta$, entonces definimos la distancia diámetro-angular a la fuente

$$d_A \equiv \frac{D}{\Delta\theta}$$

Por supuesto d_A no es la distancia real a la fuente, pues no toma en cuenta la geometría del espacio-tiempo; es sólo una definición, como lo es también la distancia luminosa d_L . En la geometría FRW el diámetro propio de la fuente en el instante de la emisión es

$$D = a_e f(|\Delta\chi|) \Delta\theta$$



Entonces

$$d_A = a_e f(|\Delta\chi|) = \frac{a_e}{a_r} \underbrace{a_r f(|\Delta\chi|)}_{\substack{\approx |\Delta\chi| \\ d_L (1+z)^{-1}}} (1+z)^{-1}$$

Es decir,

$$d_A = d_L (1+z)^{-2}$$

(Bibliog: Carroll)

▶ Diagramas de Penrose

Los diagramas de Penrose, o diagramas conformes, buscan capturar la estructura causal y las propiedades globales de un espacio-tiempo en un gráfico bidimensional. La idea básica es encontrar coordenadas donde los conos de luz se vean a 45° , y los infinitos pasado, futuro y nulo correspondan a valores finitos de las coordenadas. Para que el diagrama sea bidimensional, el espacio-tiempo considerado tendrá que tener suficiente simetría; de esa forma cada punto del diagrama representará una determinada subvariedad (usualmente, una 2-esfera). Una transformación de coordenadas que asigne coordenadas finitas al infinito, conducirá a algún tipo de singularidad de coordenadas en las componentes del tensor métrico. La idea aquí es que esa singularidad se manifieste en un factor conforme; esto es, que la métrica resulte proporcional a una métrica libre de singularidades:

$$g_{ij} = W(x)^2 \tilde{g}_{ij}$$

↑ factor conforme

Como el factor conforme no afecta la estructura causal (no cambia ángulos; los vectores nulos se mantienen nulos), entonces bastará hacer la representación gráfica de \tilde{g}_{ij} , atendiendo al rango de coordenadas que resulten del cambio de carta.

El ejemplo más sencillo es el espacio-tiempo de Minkowski, que en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty$$

o en coordenadas nulas radiales, $u = ct - r$, $v = ct + r$ ($-\infty < v < \infty$, $u \leq v$),

$$ds^2 = du dv - \frac{1}{4} (v - u)^2 d\Omega^2$$

Para darle coordenadas finitas al infinito proponemos el cambio de carta

$$U = \arctan u, \quad V = \arctan v, \quad -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad U \leq V$$

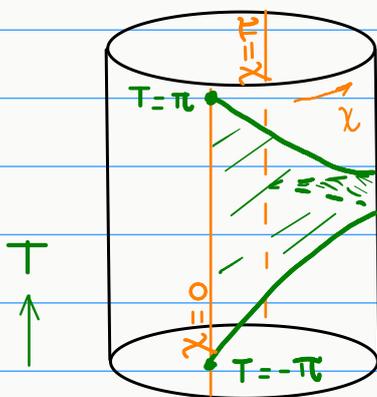
y el intervalo resulta

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} \left[dU dV - \sin^2 (V-U) d\Omega^2 \right]$$

Ahora hacemos $T = U+V$, $\chi = V-U$, $0 \leq \chi < \pi$, $|T| + \chi < \pi$ * para llegar a

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos T + \cos \chi)^2} \left[dT^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi d\Omega^2 \right]$$

La métrica entre corchetes es el universo estático de Einstein. Por lo tanto, la métrica de Minkowski g_{ij} es conforme a la del universo estático de Einstein \tilde{g}_{ij} ; de manera que comparten la estructura causal. En esta carta los rayos de luz radiales tienen líneas de universo a 45°, $T = \pm \chi + cte$, tanto en Minkowski como en el universo estático de Einstein. Pero mientras en el universo estático de Einstein las coordenadas barren el rango $-\infty < T < \infty$, $0 \leq \chi < \pi$, el espacio-tiempo de Minkowski corresponde al rango $0 \leq \chi < \pi$, $|T| + \chi < \pi$.



universo de Einstein: cada punto representa una 2-esfera de radio $\sin \chi$

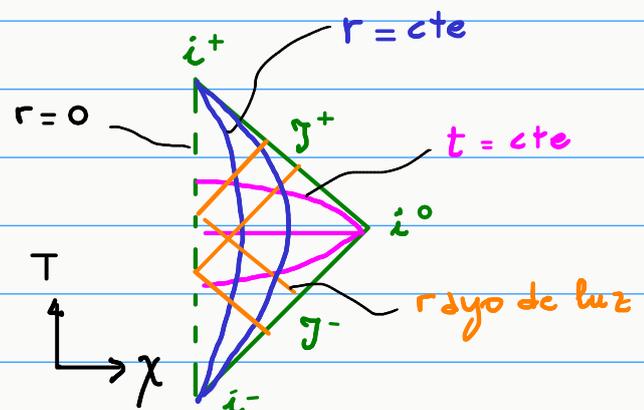


diagrama de Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski

* Si $T > 0$ es $|T| + \chi = 2V < \pi$. Si $T < 0$ es $|T| + \chi = -2U < \pi$.

i^+ : futuro temporal infinito $T = \pi$, $\chi = 0$: es un punto (no representa una 2-esfera)

i^0 : infinito espacial $T = 0$, $\chi = \pi$: es un punto (no representa una 2-esfera)

i^- : pasado temporal infinito $T = -\pi$, $\chi = 0$: es un punto (no representa una 2-esfera)

\mathcal{J}^+ : ("scri" +) futuro nulo infinito; es una superficie nula adonde van los rayos de luz radiales

\mathcal{J}^- : ("scri" -) pasado nulo infinito; es una superficie nula de donde vienen los rayos de luz radiales

Todas las geodésicas temporales de Minkowski vienen de i^- y van a i^+ (con el tiempo propio yendo a $\pm \infty$). Todas las geodésicas espaciales van a i^0 .

Los rayos de luz son líneas a 45° . Una línea de universo de partícula puede ir hacia \mathcal{J}^+ (o venir de \mathcal{J}^-) si es asintóticamente nula (por ejemplo, la partícula uniformemente acelerada).

En realidad i^+ , i^- , i^0 , \mathcal{J}^+ , \mathcal{J}^- no forman parte de Minkowski. Estos bordes son el **infinito conforme**; su unión con Minkowski se llama **compactificación conforme**, que es una variedad con borde.

Un espacio-tiempo tiene una región **asintóticamente plana**, si esa región comparte con Minkowski la estructura $\mathcal{J}^+ i^0 \mathcal{J}^-$.

► En un modelo cosmológico FRW plano, la métrica es conforme a Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) = a(\eta)^2 \underbrace{(d\eta^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2)}_{\text{Minkowski}}$$

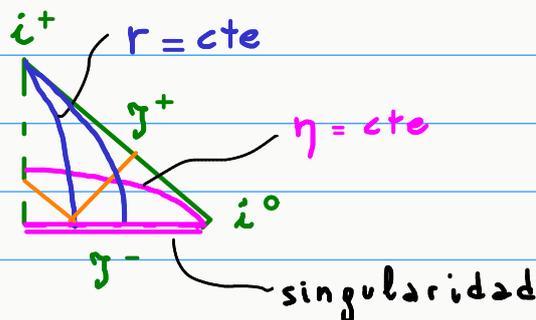
donde $d\eta = \frac{c dt}{a(t)}$ es el "tiempo conforme".

Esto sugiere que el diagrama conforme de esta cosmología es el mismo de Minkowski. Sin embargo debemos poner atención en el rango que cubren las coordenadas. Por ejemplo, para un único constituyente con $w > -1$ resulta

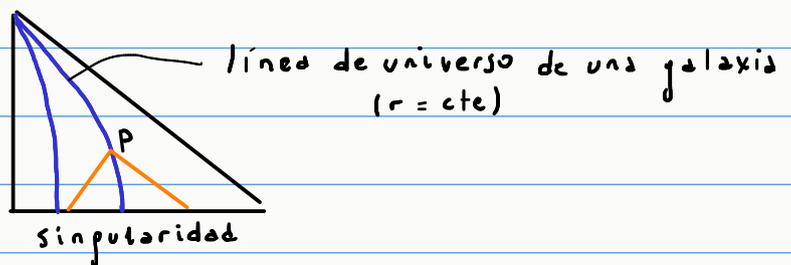
$$a(t) = cte t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Entonces
$$\eta \propto \int t^{-\frac{2}{3(1+w)}} dt = \frac{3(1+w)}{1+3w} t^{\frac{1+3w}{3(1+w)}}$$

Si $w > -\frac{1}{3}$ entonces el instante $t=0$ (cuando se anula el factor de escala) corresponde a $\eta = 0$. Esto significa que el diagrama de Penrose para el modelo cosmológico en cuestión sólo cubre la parte $\eta > 0$ del respectivo diagrama de Minkowski:

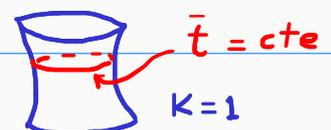


Que la superficie γ^- sea espacial en lugar de nula, implica la existencia de horizontes de partícula: en cada evento P existen galaxias que no son visibles, y que no influyen causalmente sobre P.



- ▶ **Universo de de Sitter:** la geometría de de Sitter es la de un hiperboloide de 4 dimensiones sumergido en la geometría de Minkowski de 5 dimensiones. En la carta que cubre todo el hiperboloide, el intervalo tiene la forma de un FRW cerrado:

$$ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - \frac{3}{\Lambda} \cosh^2 \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c\bar{t} \right] (d\chi^2 + \text{sen}^2\chi d\Omega^2)$$



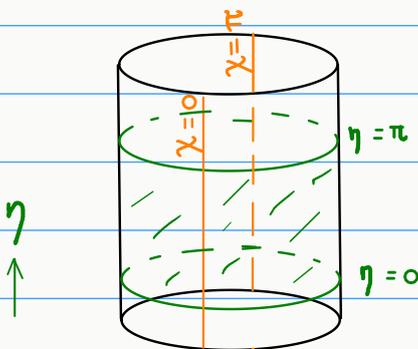
Introduciendo el tiempo conforme $d\eta^2 = \frac{c^2 d\bar{t}^2}{\frac{3}{\Lambda} \cosh^2 \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c\bar{t} \right]}$,

es decir $\text{sen } \eta = \frac{1}{\cosh \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c\bar{t} \right]}$, $0 < \eta < \pi$,

el intervalo del universo de de Sitter queda

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda} \text{sen}^2 \eta \underbrace{(d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sen}^2 \chi d\Omega^2)}_{\text{universo de Einstein}}$$

de Sitter es conforme al universo de Einstein, pero la carta que cubre toda la geometría de de Sitter sólo cubre una parte del universo de Einstein, pues $0 < \eta < \pi$. Así el diagrama conforme para de Sitter es un cuadrado



universo de Einstein: cada punto representa una 2-esfera de radio $\text{sen } \chi$

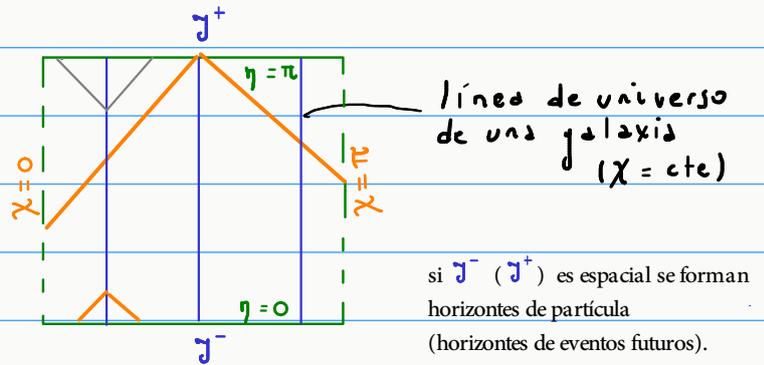
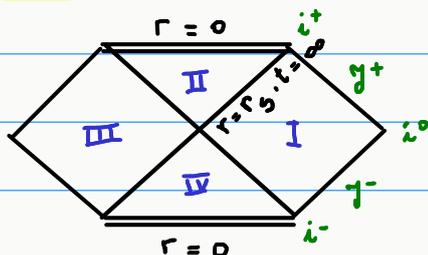


diagrama conforme de la geometría de de Sitter: cada punto representa una 2-esfera de radio $\text{sen } \chi$

▶ El diagrama de Penrose de la máxima extensión analítica de la geometría de Schwarzschild es



Las regiones externas son asintóticamente planas (el infinito conforme es como en Minkowski).

22 Radiación de ondas gravitatorias

► Aproximación lineal. Ecuación de ondas con fuentes

Habíamos linealizado las ecuaciones de Einstein para obtener que la perturbación de la métrica de Minkowski obedece la ecuación de ondas en el gauge de Lorenz:

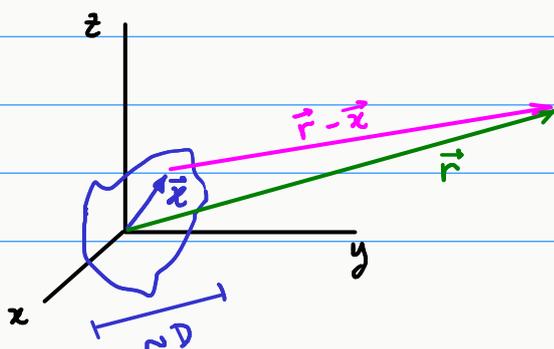
$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ij} \quad \bar{h}^k{}_{j,k} = 0$$

Nótese la compatibilidad del gauge de Lorenz con la conservación de T_{ij} (conservación automática). La solución retardada de la ecuación de ondas es

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{ij}(t - \overbrace{|\vec{r}-\vec{x}|}^{t_{ret}}, \vec{x})}{|\vec{r}-\vec{x}|} d^3x \quad \text{signature } (-+++)$$

donde \vec{r} es el punto campo, la integral se realiza sobre las posiciones \vec{x} de las fuentes en el tiempo retardado t_{ret} . Damos por conocida esta solución, así como el cumplimiento del gauge de Lorenz, porque el problema es enteramente análogo al que se presenta para el potencial electromagnético A_k en su relación con las fuentes j_k .

Si las fuentes están localizadas podemos considerar la aproximación de campo lejano. En ese caso, tomando el origen de coordenadas próximo a las fuentes, tendremos $|\vec{r}| \gg |\vec{x}|$:



$$|\vec{r}-\vec{x}| = [(\vec{r}-\vec{x}) \cdot (\vec{r}-\vec{x})]^{1/2} \approx |\vec{r}| - \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}}{|\vec{r}|}$$

En el integrando aproximaremos el denominador por $|\vec{r} - \vec{x}| \approx |\vec{r}|$.

Para hacer la misma aproximación en el tiempo retardado debemos ser más cuidadosos. Para fuentes monocromáticas de frecuencia ω tendremos

$$\omega t_{ret} \approx \omega t - \frac{\omega}{c} |\vec{r}| + \frac{\omega}{c} \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}}{|\vec{r}|}$$

Si despreciamos el último término estaríamos ignorando los desfases debidos a que las fuentes no emiten todas desde un mismo punto; eliminar ese término equivale a considerar que las fuentes están ubicadas en el origen de coordenadas. Esos desfases son despreciables cuando la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño de la fuente, $\frac{c}{\omega} \gg D$; dicho de otra forma, cuando el período de la fuente es mucho mayor que el tiempo que tarda la onda en recorrerla (la fuente varía "lentamente"). En ese caso la perturbación se aproxima por

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{r}) \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(t - \frac{r}{c}, \vec{x}) d^3x$$

Nos concentraremos en el sector espacial de la perturbación, porque podemos usar el gauge de Lorenz para obtener las restantes componentes.

En efecto para fuentes monocromáticas, el gauge de Lorenz queda

$$0 = \bar{h}^k{}_{j,k} = \bar{h}^0{}_{j,0} + \bar{h}^\alpha{}_{j,\alpha} = i \frac{\omega}{c} \bar{h}^0{}_j + \bar{h}^\alpha{}_{j,\alpha}$$

si $j = \beta = 1, 2, 3$ obtenemos $\bar{h}^0{}_\beta = -i \frac{c}{\omega} \bar{h}^\alpha{}_{\beta,\alpha}$ ($= -\bar{h}^\beta{}_0$)
↖ los índices suben y bajan con η^{ij} y η_{ij}

si $j = 0$ obtenemos $\bar{h}^0{}_0 = -i \frac{c}{\omega} \bar{h}^\alpha{}_{0,\alpha}$

Para llevar el integrando a una forma diferente, consideremos la conservación de la energía-momento (no usamos derivada covariante porque T_{ij} es del mismo orden que la perturbación):

$$\partial_i T^{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 \partial_i T^{ij} = 0$$

si $j=0$ obtenemos $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 T^{\alpha 0}}{\partial t \partial x^\alpha} = 0$,

También la ecuación de conservación implica que $\partial_\alpha \overbrace{\partial_i T^{i\alpha}} = 0$

es decir, $\frac{1}{c} \frac{\partial^2 T^{0\alpha}}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = 0$,

Restando las ecuaciones, y usando la simetría de T^{ij} :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

Multipliquemos este resultado por $x^\gamma x^\delta$ e integremos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^\gamma x^\delta d^3x = \int \frac{\partial^2 T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} x^\gamma x^\delta d^3x = 2 \int T^{\gamma\delta} d^3x$$

En el último paso hemos integrado por partes dos veces (no hay término de bordes porque $T^{\alpha\beta}$ se anula fuera de la localización de las fuentes).

Reemplazando en $\bar{h}^{\alpha\beta}$,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^\alpha x^\beta d^3x \Big|_{t=t_{\text{ret}}}$$

Definimos el tensor de momento cuadrupolar de la densidad de energía (es un tensor frente a rotaciones espaciales en Minkowski):

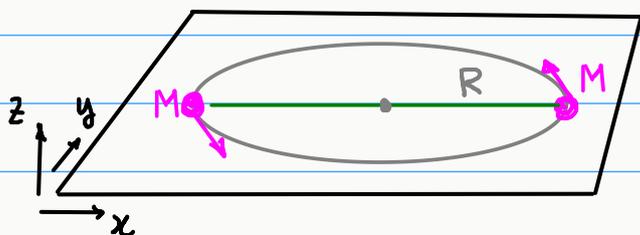
$$I^{\alpha\beta} \doteq \int T^{00} x^\alpha x^\beta d^3x$$

Entonces

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{r}) \approx \frac{2G}{c^6 r} \ddot{I}^{\alpha\beta}(t - \frac{r}{c})$$

En la aproximación más baja, la radiación de una fuente localizada que varía lentamente es la radiación de un cuadrupolo puntual. La doble derivada temporal indica que la perturbación es proporcional al cuadrado de la frecuencia. La ausencia de radiación dipolar gravitatoria se debe a que el momento dipolar de la distribución de masa de un sistema aislado no puede variar porque se violaría la conservación (automática) de la cantidad de movimiento.

- ▶ **Estrella binaria:** consideremos un sistema de dos estrellas orbitando alrededor del centro de masa común. Para simplificar supondremos que las dos estrellas tienen la misma masa M .



En la aproximación newtoniana es

$$\frac{GM}{(2R)^2} = \underbrace{\Omega^2 R}_{\text{fuerza por unidad de masa}} \text{ centrípeta}$$

La frecuencia angular de la órbita resulta

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{4R^3}}$$

La densidad de energía se escribe como

$$T^{00} = M c^2 \delta(z) \left[\delta(x - R \cos \Omega t) \delta(y - R \sin \Omega t) + \delta(x + R \cos \Omega t) \delta(y + R \sin \Omega t) \right]$$

y su momento cuadrupolar es

$$I^{\alpha\beta} = \int T^{00} x^\alpha x^\beta d^3x = \begin{cases} I^{11} = 2 M c^2 R^2 \cos^2 \Omega t = M c^2 R^2 (1 + \cos 2 \Omega t) \\ I^{22} = 2 M c^2 R^2 \sin^2 \Omega t = M c^2 R^2 (1 - \cos 2 \Omega t) \\ I^{12} = 2 M c^2 R^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = M c^2 R^2 \sin 2 \Omega t \end{cases}$$

$I^{21} = I^{12}$, y el resto de las componentes se anulan.

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{r}) \approx -8GM R^2 \frac{\Omega^2}{c^4 r} \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t_{\text{ret}} & \sin 2\Omega t_{\text{ret}} & 0 \\ \sin 2\Omega t_{\text{ret}} & -\cos 2\Omega t_{\text{ret}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}}$$

Nótese que la traza de la perturbación es distinta de cero:

$$h = -\bar{h} = -\bar{h}^0_0 - \underbrace{\bar{h}^a_a}_0 = -\bar{h}^0_0 = -i \frac{c}{\omega} \bar{h}^{\alpha}_{\alpha, \alpha} = \dots$$

↑ gauge de Lorenz ↓

es distinta de cero porque hay dependencia en r . Como la perturbación de la métrica es $h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h}$, esto significa que h_{zz} es no nula.

Para pasar esta solución al gauge TT, usando la libertad de gauge remanente, ver Problema 32 en Schutz Sección 9.7.

Nótese el carácter no-machiano de la solución: un efecto físico como la emisión de una onda gravitatoria se produce por la rotación de dos cuerpos en un espacio por lo demás vacío.

▶ Pérdida de energía por radiación gravitatoria

No existe una energía gravitatoria localizada en Relatividad General (las primeras derivadas de la métrica se anulan localmente mediante un cambio de carta). Sin embargo, en soluciones asintóticamente planas es posible dar una definición global de la energía de la solución. Aun así podría pensarse que en la aproximación lineal, donde la perturbación h_{ij} es vista como un campo que se propaga en la geometría de Minkowski, debería existir una noción de densidad de energía para ese campo. La energía de un campo, como el campo electromagnético, es cuadrática en el campo; esto obliga a avanzar un orden más en el desarrollo perturbativo:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)}$$

donde $h_{ij}^{(2)} = \mathcal{O}(|h_{ij}^{(1)}|^2)$. La expresión linealizada del Ricci, que usamos hasta aquí, deberá ahora incorporar términos cuadráticos en la perturbación:

$$R_{ij} = R_{ij}^{(1)} + R_{ij}^{(2)}$$

↳ linealizado

donde

$$R_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{kl} (h_{kj,il} + h_{il,kj} - h_{ke,ij} - h_{ij,kl})$$

$$R_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} h^{kl} h_{kl,ij} + \frac{1}{4} h_{kl,i} h^{kl},_j + \eta^{kl} \eta^{ef} h_{i[f,k]} h_{ej,e} \\ - h^{kl} h_{k(i,j)l} + \frac{1}{2} (h^{kl} h_{ij,k}),_e - \frac{1}{4} \eta^{kl} h_{ij,k} h_{,le} \\ - (h^{kl},_e - \eta^{kl} h_{,le}) h_{k(i,j)}$$

Las ecuaciones de Einstein de vacío, $R_{ij} = 0$, se deben cumplir a cada orden:

1er orden: $R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] = 0$ (es el orden ya estudiado)

2do orden: $R_{ij}^{(1)} [h^{(2)}] + R_{ij}^{(2)} [h^{(1)}] = 0$

Vamos a usar esta última relación para armar una ecuación de Einstein para $h_{ij}^{(2)}$ en el siguiente sentido:

$$R_{ij}^{(1)} [h^{(2)}] - \frac{1}{2} \eta_{ij} R^k{}^k{}^{(1)} [h^{(2)}] = -R_{ij}^{(2)} [h^{(1)}] + \frac{1}{2} \eta_{ij} R^k{}^k{}^{(2)} [h^{(1)}]$$

El miembro derecho es cuadrático en $h_{ij}^{(1)}$, y actúa como la fuente en una suerte de ecuación de Einstein lineal para $h_{ij}^{(2)}$. Con el espíritu de ver al segundo miembro como el tensor de energía-momento correspondiente a la perturbación $h_{ij}^{(1)}$, llamaremos

$$t_{ij} \doteq -\frac{1}{k} \left(R_{ij}^{(2)} [h^{(1)}] - \frac{1}{2} \eta_{ij} R^k{}^k{}^{(2)} [h^{(1)}] \right)$$

Como el miembro izquierdo de la ecuación de Einstein es lineal en la perturbación ($R_{ij}^{(1)} [h] = R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] + R_{ij}^{(1)} [h^{(2)}]$), y vale la ecuación de 1er orden $R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] = 0$, podemos resumir diciendo que si $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, entonces la perturbación h_{ij} cumple que

$$R_{ij}^{(1)} [h] - \frac{1}{2} \eta_{ij} R^{(1)} [h] = k t_{ij} [h^{(1)}]$$

donde $h_{ij}^{(1)}$ es la solución de las ecuaciones lineales y homogéneas

$$R_{ij}^{(1)} [h^{(1)}] = 0$$

Es fácil verificar que $\partial_i \left(R^{ij} [h] - \frac{1}{2} \eta^{ij} R^{(1)} [h] \right) = 0 \quad \forall h$

de modo que tenemos la conservación automática de la fuente en la geometría de Minkowski:

$$\partial_i t^{ij} = 0$$

La principal limitación para interpretar a t^{ij} como un tensor de energía-momento para la perturbación lineal $h^{(1)}$ no es la falta de comportamiento tensorial ante cambios de carta, pues no puede esperarse que lo tenga en el marco de las aproximaciones realizadas (sí es tensorial ante transformaciones de Lorentz). El peor obstáculo es que t^{ij} no posee la invariancia de gauge característica de la aproximación lineal (la transformación de gauge es $h^{(1)}_{ij} \rightarrow h^{(1)}_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i}$); esto se debe a que t^{ij} se construye con $R^{(2)}_{ij}$, mientras que la invariancia de gauge es propia de $R^{(1)}_{ij}$.

Como decíamos al comienzo, no es posible esperar encontrar una buena definición de densidad de energía, siendo que las primeras derivadas de la métrica se anulan localmente mediante un cambio de carta. Tal vez la información necesaria para definir una densidad de energía podría recogerse promediando en regiones del tamaño de varias longitudes de onda.

Con ese fin, promediaremos a cero todos los términos que sean derivadas de funciones oscilantes,

$$\langle \partial_i X \rangle = 0$$

Si $X = AB$ resulta:

$$\langle A \partial_i B \rangle = - \langle B \partial_i A \rangle$$

y así convertiremos los términos de $R_{ij}^{(2)}$ que tienen la forma $h \partial^2 h$ en términos cuadráticos en derivadas primeras. Después de un largo cálculo resulta

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{1}{4k} \langle h_{ke,i} h^{ke}_{,j} - h_{,i} h_{,j} - 2 h^{ke}_{,k} h_{e(i,j)} \rangle$$

que resulta invariante de gauge. En vacío siempre es elegible el gauge TT,

$$h = 0, \quad h^k_{j,k} = 0 \quad (\text{sale del gauge de Lorenz})$$

Luego:

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} \langle h^{TT}_{ke,i} h^{TT\,ke}_{,j} \rangle$$

► Energía-momento de la onda plana

$$h^{TT}_{ij} = H_{ij} \cos k_e z^e$$

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} k_i k_j \underbrace{H_{ke} H^{ke}}_{2(H_+^2 + H_x^2)} \underbrace{\langle \sin^2 k_e z^e \rangle}_{1/2}$$

Si la onda se propaga en x es

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_x \\ & H_x & -H_+ \end{pmatrix}, \quad k_i = \left(\frac{\Omega}{c}, -\frac{\Omega}{c}, 0, 0 \right)$$

$$\langle t_{ij} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} (H_+^2 + H_x^2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▶ Estrella binaria

En general, la energía contenida en la radiación gravitatoria a un tiempo t es

$$E = \int \langle t^{00} \rangle d^3x$$

y el flujo de energía por unidad de tiempo sobre una superficie esférica en el infinito es

$$P = \int_{S_{\infty}^2} \langle t^{0i} \rangle n_i r^2 d\Omega, \quad \text{normal unitaria: } n_i = \left(0, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

El resultado para la estrella binaria que ya hemos considerado es (hay que pasar la onda al gauge TT):

$$P = \frac{128}{5} c^{-5} G M^2 R^4 \Omega^6 = \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 R^5}$$

↪ pulsating source of radio

▶ Púlsar binario PSR 1913+16

↪ ascensión recta y declinación

En 1974 Hulse y Taylor descubrieron un sistema binario formado por un púlsar y una estrella compañera. El púlsar es una estrella de neutrones en rotación rápida. Posee una emisión electromagnética muy colimada que se comporta como un faro. Cuando la emisión se dirige hacia nuestro punto de observación, registramos un pulso en ondas de radio. El estudio sistemático de la variación de los tiempos de llegada de los pulsos permitió establecer el radio de la órbita del púlsar; pulsos emitidos desde el punto más alejado de la órbita llegaban 3 s atrasados respecto de los que se emiten desde el punto más cercano de la órbita. La velocidad orbital se obtuvo de los corrimientos Doppler al rojo y al azul. Así fueron determinándose todos los parámetros:

distancia: 6,4 kpc

masas: púlsar $1,4 M_{\odot}$ compañera $1,38 M_{\odot}$

período orbital: 7,75 h

periastro: $1,1 R_{\odot}$ apastro: $4,8 R_{\odot}$

corrimiento del periastro: 35000 veces el de Mercurio

período del púlsar: 59 ms

Usemos la expresión de la potencia total emitida en ondas gravitatorias (aunque no estemos ante una órbita circular): $P \sim 3 \times 10^{24} \text{ W}$

Por otro lado, la energía mecánica del sistema es

$$E_{mec} = \underbrace{M \Omega^2 R^2}_{\text{cinética} \uparrow} - \underbrace{\frac{GM^2}{2R}}_{\text{potencial} \leftarrow}$$

Usando la ecuación de movimiento $\Omega^2 R^3 = \frac{GM}{4}$ resulta $E_{mec} = -\frac{GM^2}{4R}$

La potencia radiada debe traducirse en una disminución de la energía mecánica del púlsar binario:

$$P = -\frac{dE_{mec}}{dt} = -\frac{GM^2}{4R^2} \dot{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 R^5} = -\frac{GM^2}{4R^2} \dot{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{R}}{R} = -\frac{8}{5} \frac{G^3 M^3}{R^4 c^5} \sim -6 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad \left(= -\frac{2}{3} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \text{ de acuerdo a la ecuación de mov.} \right)$$

La radiación de ondas gravitatorias produce un efecto acumulativo sobre los parámetros del púlsar binario (disminución del radio orbital, aumento de la frecuencia orbital). Hulse y Taylor observaron durante más de una década los parámetros del púlsar binario, registrando un total acuerdo con la predicción de Relatividad General (Premio Nobel 1993). Otros sistemas del mismo tipo han mostrado resultados similares.

23 Geometría de Reissner-Nordström. Geometría de Kerr

▶ Teorema "no pelo"

Las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Einstein, de tipo agujero negro asintóticamente planas, acopladas al electromagnetismo, que no posean singularidades fuera del horizonte de eventos, están completamente caracterizadas por la masa, la carga eléctrica (y magnética, si la hubiere), y el momento angular.

Si hubiera otros campos de largo alcance actuando como fuentes, podrían aparecer otros "pelos". Pero la idea general de este teorema es que unos pocos parámetros caracterizan completamente la solución.*

Como estas soluciones son vistas como el estado final del colapso gravitatorio, llama la atención que el estado final no guarde el registro de ninguna otra característica del estado inicial (por ejemplo, el objeto que colapsa podría no ser simétrico, etc.). Esto significa que la diferencia entre los posibles estados iniciales es radiada en forma de ondas gravitatorias durante el colapso.

▶ Horizonte de eventos

Así como sucede con la solución de Schwarzschild, esperamos que otros tipos de agujeros negros también posean horizontes de eventos. El horizonte de eventos es una propiedad global de la solución, que proviene de su estructura causal. Se trata de una superficie nula que separa aquellos eventos que admiten una conexión causal con el futuro nulo infinito, de aquellos otros eventos que no lo admiten. Como se trata de un concepto global, difícilmente puede ser capturado en términos de una carta. Sin embargo, los horizontes de topología esférica asociados a soluciones de tipo agujero negro pueden ser caracterizados de esa forma si la carta es apropiada.

* Se trata de una conjetura que tiene demostraciones en casos específicos o bajo hipótesis adicionales.

- En una geometría estacionaria debe existir en la región externa un vector de Killing temporal $\bar{K} = \frac{\partial}{\partial t}$; podemos elegir una carta tal que $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 0$.
- En las hipersuperficies $t = \text{cte}$ elegiremos una carta (r, θ, ψ) tal que la métrica se vea en el infinito como Minkowski en esféricas.
- Supongamos que cuando r decrece desde el infinito las hipersuperficies $r = \text{cte}$ son temporales hasta volverse nulas en $r = r_H$ (y para todo θ, ψ). En tal caso, para regresar desde $r < r_H$ habría que atravesar una superficie nula, lo cual está prohibido (no se puede superar la velocidad de la luz).
- Como $\tilde{d}r$ es la 1-forma normal a las hipersuperficies $r = \text{cte}$, $\tilde{d}r$ debería hacerse nula en $r = r_H$; es decir,

$$0 = \bar{g}(\tilde{d}r, \tilde{d}r) = g^{rr} \quad \text{en } r = r_H$$

Entonces la ubicación del horizonte satisface

$$g^{rr}(r_H) = 0$$

Esta será nuestra forma de aproximarnos a la noción de horizonte. Los diagramas de Penrose de las soluciones que vamos a mostrar confirmarán que es la forma adecuada. Puede inquietar que la posición del horizonte se obtenga a partir de g^{rr} en lugar de g_{tt} . En las soluciones con rotación sucede que el sector temporal de la métrica es no diagonal en la carta usual; aparece una componente $g_{t\psi}$ no nula. Resulta entonces razonable que la ubicación del horizonte quede asociada a la anulación de g^{rr} .

▶ Geometría de Reissner-Nordström (agujero negro cargado)

En la misma época de la solución de Schwarzschild se obtuvo también la solución esféricamente simétrica con carga eléctrica Q . Esto significa que se resolvieron las ecuaciones de Einstein-Maxwell para una fuente correspondiente al campo electrostático de una carga puntual. Para plantear y resolver las ecuaciones de Einstein deberá tenerse en cuenta que la métrica incógnita también aparece en el tensor de energía-momento. La solución es

$$ds^2 = \Delta c^2 dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$\Delta = 1 - \frac{2MG}{rc^2} + \frac{GQ^2}{r^2 c^4}$$

▶ Horizontes: $g^{rr}(r_H) = 0 \Rightarrow \Delta(r_H) = 0$

$$\Rightarrow r_{H\pm} = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{Q^2}{GM^2}} \right)$$

- Si $GM^2 > Q^2$ Hay dos horizontes de eventos, que son singularidades de la carta utilizada. Δ cambia de signo dos veces; la singularidad $r=0$ es entonces una hipersuperficie temporal y puede ser evitada.
- Si $GM^2 < Q^2$ No hay horizontes; Δ es siempre positivo, y la coordenada r tiene siempre carácter espacial. La singularidad $r=0$ es una hipersuperficie temporal y visible; es una singularidad desnuda. Se considera que no se forman objetos de este tipo en la naturaleza ("censura cósmica").
- Si $GM^2 = Q^2$ (agujero negro extremal); $\Delta = \left(1 - \frac{MG}{rc^2}\right)^2 \geq 0$. La coordenada r es espacial en el interior, pero es nula en $r_H = MG/c^2$. La singularidad $r=0$ es una hipersuperficie temporal. Notablemente este es el caso donde la repulsión coulombiana equilibra la atracción gravitatoria entre cuerpos cargados.

► **Geometría de Kerr** (agujero negro rotante)

En 1963, 47 años después de la solución esférica de Schwarzschild, Kerr obtuvo la **solución axialmente simétrica** de las ecuaciones de Einstein de vacío. La geometría de Kerr está caracterizada por dos parámetros: la masa y el momento angular. Para quien se interese en saber cómo se obtuvo una solución de esta naturaleza, es recomendable la narración que el propio autor publicara en 2007 (arXiv:0706.1109). La solución es

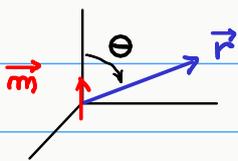
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{\rho^2 c^2} r\right) c^2 dt^2 + \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2 c} dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\varphi^2$$

donde $\Delta \equiv r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + a^2$, $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

Para r grande es $g_{00} \approx 1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2GM}{r^3 c^2} a^2 \cos^2 \theta$

$$g_{0\varphi} \approx \frac{2GM a \sin^2 \theta}{r c^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta\right)$$

► **Gravitomagnetismo:** $g_{0\varphi}$ es comparable al potencial vector de un dipolo magnético en un espacio euclidiano:



$$\vec{A} \propto \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{m}{r^2} \sin \theta \hat{e}_\varphi = \frac{m}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} = A^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ pues $g_E(\hat{e}_\varphi, \hat{e}_\varphi) = 1$

entonces:

$$A_\varphi = g_{E\varphi\varphi} A^\varphi = \frac{m \sin^2 \theta}{r} \quad \text{pues es análogo a } g_{0\varphi}$$

La magnitud $J = c a M$ es el momento angular de la solución. Así resulta no sólo de la analogía magnética sino de la definición global de momento angular, que se utiliza para soluciones asintóticamente planas.

Las coordenadas (t, r, θ, φ) se llaman coordenadas de Boyer-Lindquist. En el límite $a \rightarrow 0$ recuperamos la solución de Schwarzschild en la carta usual. Si hacemos $M = 0$ obtenemos la geometría de Minkowski, aun cuando $a \neq 0$ (porque corresponde a $M \rightarrow 0$, $J \rightarrow 0$ pero $a = c \frac{J}{M} = cte$).

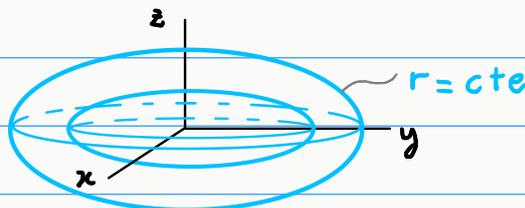
En efecto, si $M = 0$ tendremos la geometría de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas (un tipo de coordenadas elipsoidales):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

cuya relación con las coordenadas cartesianas es

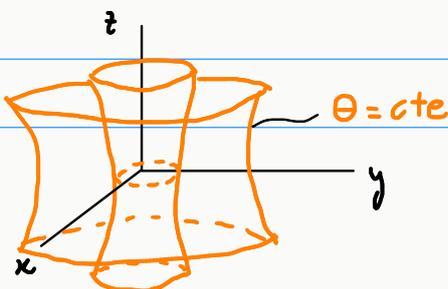
$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

Las superficies $r = cte$ son elipsoides de revolución alrededor del eje z :



$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

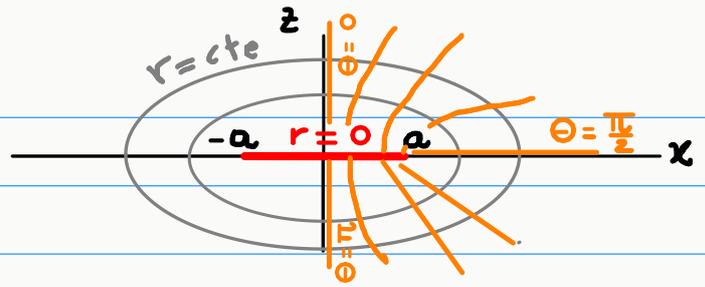
En lugar de los conos característicos de las coordenadas esféricas, las superficies $\theta = cte$ son hiperboloides:



$$\frac{x^2 + y^2 - a^2 \sin^2 \theta}{z^2} = \tan^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta$$

En el plano xz las líneas coordenadas se ven así:



El disco de radio a en el plano xy corresponde a $r=0$. Sus distintos puntos se diferencian por los valores de las coordenadas θ , φ . En efecto, si $r=0$ resulta que $z=0$, $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$. En particular, $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \theta$.

Volviendo a la métrica de Kerr, vemos que no depende de t , y que $g_{t\varphi} \neq 0$. Decimos que la métrica es estacionaria; no es estática porque $g_{t\varphi} \neq 0$ implica que la métrica no es invariante ante el cambio $t \rightarrow -t$. La geometría de Kerr es singular en $\rho = 0$, donde el invariante de Kretschmann $R_{ijkl} R^{ijkl}$ diverge. ρ se anula en $r=0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (en Minkowski estos valores de las coordenadas describen el anillo de radio a en el plano xy).

► Horizontes: el sector radial de la métrica constituye un sub-bloque diagonal. Por lo tanto resulta que $g^{rr} = g_{rr}^{-1}$. Entonces la anulación de g^{rr} requiere que

$$\Delta(r_H) = 0$$

Si $\frac{GM}{c^2} > a$ se tienen dos soluciones (horizontes exterior e interior):

$$r_{\pm} = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - a^2}$$

$\frac{GM}{c^2} < a$ conduce a una singularidad desnuda. El caso $\frac{GM}{c^2} = a$ se llama "extremal".

▶ Órbita de un fotón

Consideremos la órbita circular de un fotón en el plano ecuatorial $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

$$ds^2 = 0 = g_{tt} dt^2 + 2 g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$$

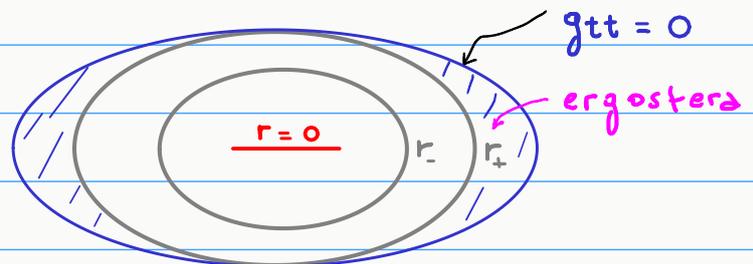
$$\Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\pm} = - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}$$

recordemos que: $\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} < 0$

Evaluemos esta cantidad sobre la superficie donde se anula g_{tt} (desde el punto de vista geométrico, esta es la superficie donde se vuelve nulo el vector de Killing $\bar{k} = \frac{\partial}{\partial t}$, y se llama "superficie de límite estacionario")

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{-} = 0 \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{+} = \frac{a}{\frac{2G^2 M^2}{c^2} + a^2} \qquad \text{en } g_{tt} = 0$$

La solución no nula tiene el signo de a , y es interpretada como un fotón moviéndose en la dirección del giro del agujero negro. La solución nula indica que el fotón que intenta moverse en sentido opuesto queda fijo (en esta carta, por supuesto) cuando la órbita se realiza sobre la superficie de límite estacionario donde $g_{tt} = 0$.



Este fenómeno es conocido como el "dragado" de los sistemas de referencia, pues implica que las partículas que están dentro de la "ergosfera" (región comprendida entre la superficie de límite estacionario y el horizonte externo) son obligadas a moverse en la dirección del giro del agujero negro.

Cuando el fotón está sobre el horizonte externo, la menor de las dos velocidades angulares que puede tener el fotón es

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_-(r_+) = \frac{ac}{r_+^2 + a^2} \equiv \Omega_H \quad (\text{en el sentido de rotación del agujero negro})$$

Esta cantidad recibe el nombre de "velocidad angular del horizonte" Ω_H .

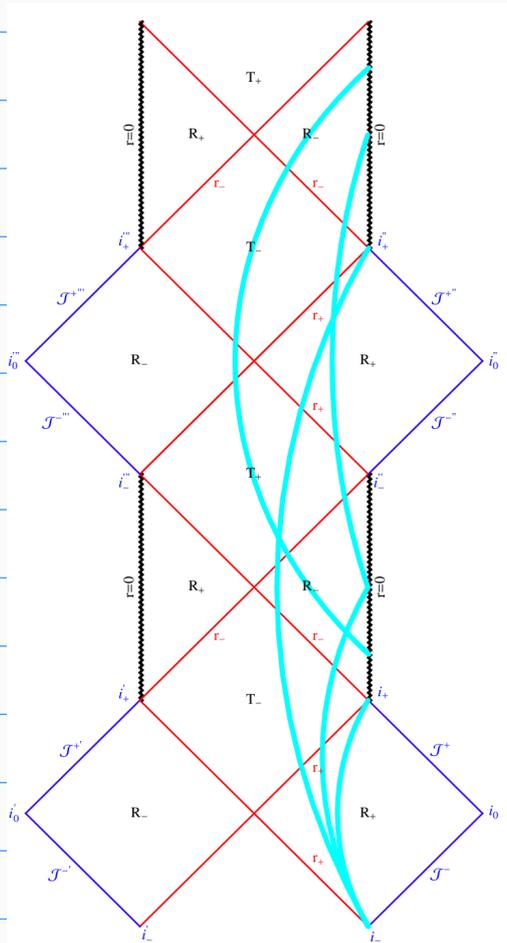
► Proceso de Penrose

Una partícula libremente gravitante en la geometría de Kerr conserva el valor de $E = \bar{K} \cdot \bar{p}$, donde $\bar{K} = \frac{\partial}{\partial t}$ es un vector de Killing. \bar{K} es un vector temporal fuera de la ergosfera, pero dentro de la ergosfera es espacial. En cambio \bar{p} es siempre temporal. Como una partícula puede entrar y salir de la ergosfera, Penrose ideó un proceso mediante el cual la región exterior podía ganar energía. La idea es que una partícula entre en la ergosfera (con $E > 0$, claro), y allí se fraccione en dos partes. Como \bar{K} es espacial dentro de la ergosfera, es factible que una de las partes adquiera una $E < 0$. Se puede ver que en tal caso esa parte no puede emerger a la región externa (a menos que sea acelerada). Por conservación de la energía, la otra parte posee energía mayor que la partícula inicial. En caso de emerger de la ergosfera, la región exterior habrá ganado energía. Se puede ver, además, que la parte de energía negativa debe tener momento angular negativo, contribuyendo así a la disminución del momento angular del agujero negro. El proceso de Penrose extrae energía del agujero negro rotante a expensas de su momento angular.

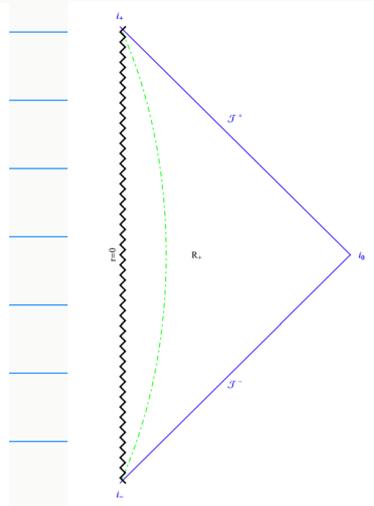
► Geometría de Kerr-Newman: es la geometría de un agujero negro rotante y cargado. Fue obtenida en 1965.

▶ Diagramas de Penrose: geometría de Reissner-Nordström

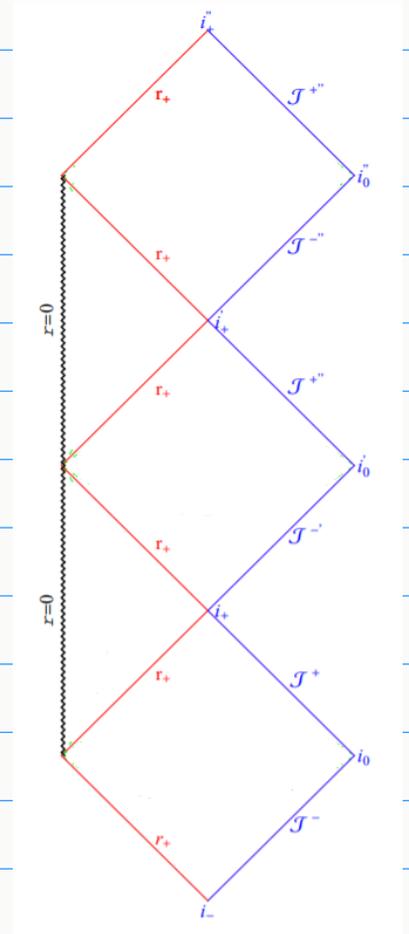
Las Figuras pertenecen a: V. A. Berezin & V. I. Dokuchaev, "Global geometry of space-time with the charged shell", arXiv:1404.2726.



$GM^2 > Q^2$



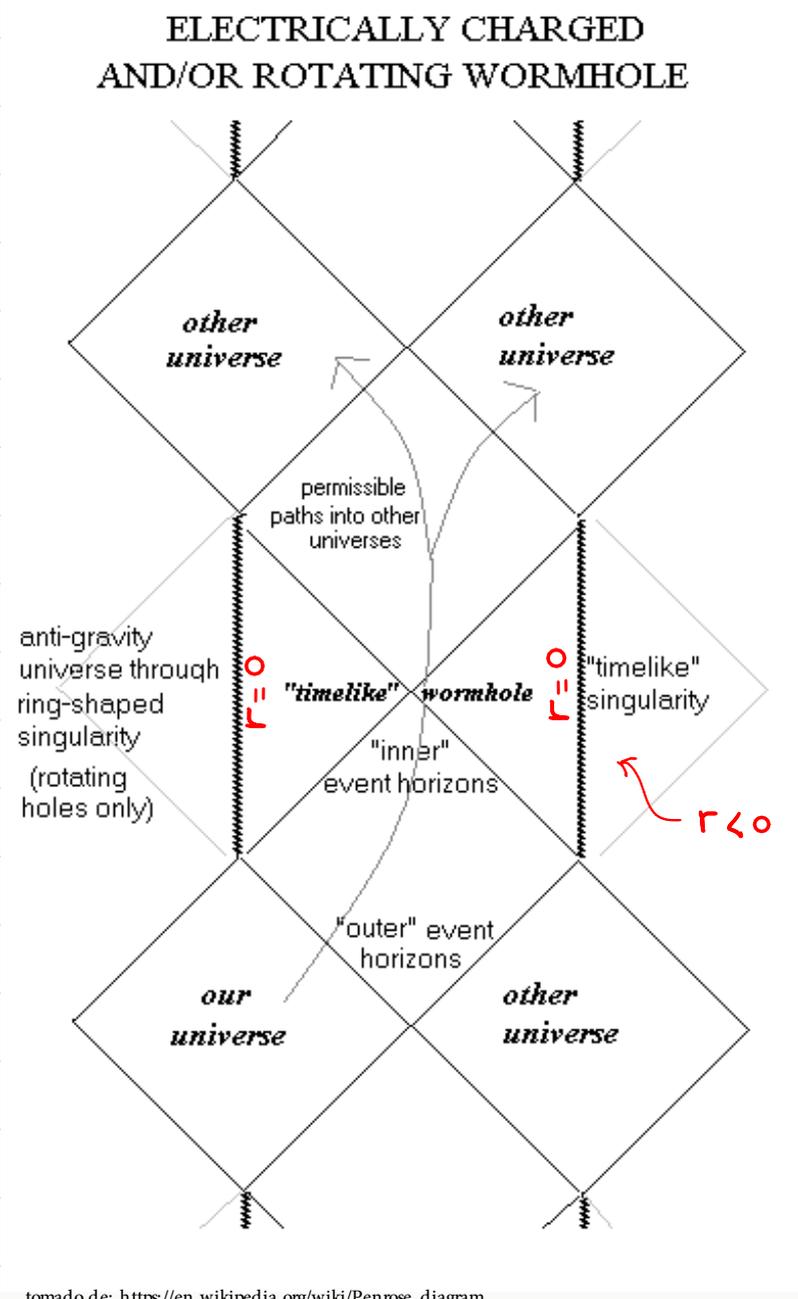
$GM^2 < Q^2$
(singularidad desnuda)



$GM^2 = Q^2$
(extremal)

Estos diagramas corresponden a la máxima extensión analítica de la geometría en cuestión.

► **Diagramas de Penrose: geometría de Kerr**



En este diagrama conforme no puede decirse que cada punto representa una esfera, como en los anteriores casos, pues la geometría de Kerr carece de tal simetría.

En realidad, esta representación corresponde a fijar el valor $\Theta = \frac{\pi}{2}$; por eso $r=0$ es la singularidad.

Pero en cualquier otro valor de Θ no habría problema en extender la carta a los valores negativos de la coordenada r , ya que no atravesaríamos la singularidad. Sin embargo, en una región con r negativo aparecerían curvas temporales cerradas (CTC).

Si una curva tiene $t=cte$, $r=cte < 0$, y $\Theta = \frac{\pi}{2}$ entonces el intervalo es

$$ds^2 = - \left[r^2 + a^2 + \frac{2GM}{rc^2} a^2 \right] d\psi^2$$

Para r suficientemente pequeño y negativo, resulta $ds^2 > 0$: la curva es temporal, y se cierra porque la coordenada ψ es periódica. No obstante, estos aspectos que aparecen en las extensiones analíticas de las soluciones deben verse como totalmente especulativos; se considera que el colapso gravitatorio no genera todas las regiones que aparecen en el diagrama.

24 Acción de Hilbert. Ecuaciones de estructura de Cartan

► Acción de Hilbert

Las ecuaciones de Einstein pueden obtenerse de un principio variacional. La acción de Hilbert (o de Hilbert-Einstein) es

$$S[g_{ij}] = \frac{c^3}{16\pi G} \int (-R - 2\Lambda) \sqrt{|g|} d^4x$$

↑
signatura (+---)

Para efectuar la variación usaremos que

$$\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{ij} \delta g_{ij} \quad (\text{sale de } d \ln[\det g_{ij}] = g^{ij} \delta g_{ij} = -g_{ij} \delta g^{ij})$$

$$\delta R = \delta(g^{ij} R_{ij}) = \delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}$$

Para calcular $g^{ij} \delta R_{ij}$ en un evento P cualquiera usaremos una carta localmente inercial con origen en P. De esa forma vale que

$$\Gamma_{mp}^m(P) = 0, \quad g_{mm,p}(P) = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} g^{mn} \delta R_{mn} &= g^{mn} \delta R^p{}_{mpn} = g^{mn} (\delta \Gamma^p{}_{mn,p} - \delta \Gamma^p{}_{mp,m}) \\ &= (g^{mn} \delta \Gamma^p{}_{mn} - g^{mp} \delta \Gamma^m{}_{mm}),_p \end{aligned}$$

Aunque las componentes de una conexión no transforman tensorialmente, las componentes de la diferencia de dos conexiones sí transforman como componentes de un tensor. Por lo tanto, el resultado es tensorial; es la cuadrivergencia de un vector. Para pasarlo a una carta arbitraria alcanza con reemplazar la derivada común por derivada covariante:

$$g^{ij} \delta R_{ij} = (g^{ij} \delta \Gamma_{ij}^k - g^{ik} \delta \Gamma_{ij}^i)_{;k}$$

Como esta parte de la variación de S es una divergencia, se puede usar el teorema de la divergencia para convertirlo en un término de borde que no afecta las ecuaciones dinámicas.*

* La expresión anterior contiene variaciones de las *derivadas* de la métrica, que no se anulan en el borde. Para evitar esta contribución de borde a δS , se debe sumar a S el término de borde de Gibbons-Hawking-York.

Entonces la variación de la acción de Hilbert da

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{c^3}{16\pi G} \delta \int (-R - 2\Lambda) \sqrt{|g|} d^4x \\ &= - \frac{c^3}{16\pi G} \int \left[(R + 2\Lambda) \underbrace{\delta \sqrt{|g|}}_{-\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{ij} \delta g^{ij}} + \underbrace{\delta R \sqrt{|g|}}_{\delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}} \right] d^4x \end{aligned}$$

término de borde

$$\delta S = - \frac{c^3}{16\pi G} \int \left[R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} \right] \delta g^{ij} \sqrt{|g|} d^4x + \text{términos de borde}$$

signatura (+---)

En presencia de materia la acción es $S = S_{H-E} + S_{mat}$. La variación de esta acción respecto de la métrica debe conducir a las ecuaciones de Einstein con fuentes. Por lo tanto, el llamado tensor de energía-momento "métrico" es tal que

$$\delta S_{mat} = \int \frac{1}{2c} T_{ij} \delta g^{ij} \sqrt{|g|} d^4x \Rightarrow T_{ij} = \frac{2c}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{ij}}$$

derivada funcional

signatura (+---)

► Invariancia de gauge de la acción

Es importante destacar que algunas variaciones de la métrica en la acción de Hilbert-Einstein no generan dinámica, porque la acción es indiferente a esas variaciones sobre cualquier evolución de las 10 variables dinámicas g_{ij} . Eso ocurre cuando la variación de la métrica tiene la forma

$$\bar{g} \rightarrow \bar{g} + \mathcal{L}_{\xi} \bar{g}$$

es decir, $\delta g^{ij} = (\mathcal{L}_{\xi} \bar{g})^{ij} = \xi^k g^{ij}_{,k} + g^{ki} \xi^j_{,k} + g^{ik} \xi^j_{,k}$

Cuando no hay torsión vale reemplazar las derivadas comunes por derivadas covariantes. En ese caso, si la conexión es métrica se anula el primer término:

$$\delta g^{ij} = g^{ki} \xi^j_{,k} + g^{ik} \xi^j_{,k} = 2 \xi^{(i;j)}$$

Entonces la variación de la acción queda

$$\delta S = - \frac{c^3}{16\pi G} \int 2 \overbrace{G^{ij} \xi_{(i;j)}}^{G^{ij} \xi_{(i;j)}} \sqrt{|g|} d^4x + \text{términos de borde}$$

Como el tensor de Einstein es simétrico y tiene cuadri-divergencia nula:

$$\delta S = - \frac{c^3}{16\pi G} \int 2 (G^{ij} \xi_j)_{;i} \sqrt{|g|} d^4x + \text{términos de borde}$$

El primer término se convierte en un término de borde usando el teorema de la divergencia. Por lo tanto, el tipo de variación considerada no aporta a la dinámica.* Aunque la acción no es en sí misma invariante, como sucede con las transformaciones de gauge en el electromagnetismo, el hecho que estas variaciones sólo producen términos de borde indica que si se dotara la acción con un término de borde apropiado entonces podría lograrse una acción invariante ante transformaciones de la forma $\delta g = \mathcal{L}_{\xi} g$.

* Como ya vimos, la invariancia de gauge reduce a 2 el número de grados de libertad (en $n=4$).

► Ecuaciones de estructura de Cartan

El uso del cálculo exterior permite lograr expresiones reveladoras para la torsión y la curvatura. La torsión quedará dada en términos de las derivadas exteriores de las 1-formas de la base del espacio cotangente, mientras que la curvatura resulta de la derivada exterior de 1-formas definidas por la conexión. Así, la base $\{\tilde{E}^a\}$ y la conexión se comportan como potenciales para la torsión y la curvatura. Esta formulación fue desarrollada por Elie Cartan en 1922.

Comencemos por la definición conocida de la torsión,

$$T(\bar{u}, \bar{v}) \doteq \nabla_{\bar{u}} \bar{v} - \nabla_{\bar{v}} \bar{u} - [\bar{u}, \bar{v}]$$

Este tensor de tipo $\binom{1}{2}$ se descompone en una base cualquiera como

$$T = T^a{}_{bc} \bar{E}_a \otimes \tilde{E}^b \otimes \tilde{E}^c = \bar{E}_a \otimes \frac{1}{2} T^a{}_{bc} \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c \doteq \bar{E}_a \otimes \tilde{T}^a$$

donde hemos explotado la antisimetría del tensor para definir una 2-forma \tilde{T}^a "valuada" en el espacio tangente; es decir, \tilde{T}^a es un conjunto de 2-formas que ante cambio de base transforman como componentes de un vector para que $\bar{E}_a \otimes \tilde{T}^a$ resulte un tensor $\binom{1}{2}$.

Calculemos las componentes $T^a{}_{bc}$:

$$\begin{aligned} T^a{}_{bc} &= T(\tilde{E}^a; \bar{E}_b, \bar{E}_c) = \langle \tilde{E}^a, \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_c - \nabla_{\bar{E}_c} \bar{E}_b - [\bar{E}_b, \bar{E}_c] \rangle \\ &= \langle \tilde{E}^a, (\Gamma_{cb}^d - \Gamma_{bc}^d) \bar{E}_d - (E_b^i \partial_i E_c^j - E_c^i \partial_i E_b^j) \partial_j \rangle \\ &= (\Gamma_{cb}^a - E_j^a E_b^i \partial_i E_c^j) - (c \leftrightarrow b) \end{aligned}$$

Los dos términos contribuyen igual a $\tilde{T}^a = \frac{1}{2} T^a{}_{bc} \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$. Por otro lado sabemos que $E_j^a \partial_i E_c^j = -E_c^j \partial_i E_j^a$, pues $E_j^a E_c^j = \delta_c^a$. Entonces

$$\tilde{T}^a = \left(\Gamma_{cb}^a + \underbrace{E_c^j E_b^i \partial_i E_j^a}_{d\tilde{x}^i \text{ (usar } \tilde{E}^b = E_k^b d\tilde{x}^k)} \right) \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c = \Gamma_{cb}^a \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c + \underbrace{\partial_i E_j^a}_{d\tilde{E}^a} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^j$$

Definimos la conexión de spin, como el siguiente conjunto de 1-formas

$$\tilde{\omega}^a{}_c = \Gamma_{cb}^a \tilde{E}^b$$

↑ índice de derivación

lo que nos permite escribir

$$\tilde{T}^a = d\tilde{E}^a + \tilde{\omega}^a{}_c \wedge \tilde{E}^c = D\tilde{E}^a$$

La derivada exterior covariante D no sólo actúa como la derivada exterior d , en el sentido que toma una p -forma y da una $(p+1)$ -forma, cumpliendo todas las reglas de la derivada exterior; la presencia del término de conexión implica que si se aplica D a una p -forma valuada en el espacio tangente entonces resulta un objeto tensorial de ese mismo carácter:

$$\tilde{E}^a \rightarrow \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a \tilde{E}^a \Rightarrow D\tilde{E}^a \rightarrow D\tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a D\tilde{E}^a$$

No hace falta demostrar esto; así debe funcionar debido al carácter tensorial de la torsión $T = \tilde{E}_a \otimes D\tilde{E}^a$. En cambio la derivada exterior d no tiene esa propiedad, pues involucraría derivadas de los coeficientes $\Lambda^{a'}{}_a$. No hay en esto nada que no sepamos ya; el término de conexión de spin se transforma adecuadamente para compensar las derivadas de los $\Lambda^{a'}{}_a$ que provienen de la derivada exterior común:

$$\tilde{E}^a \rightarrow \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}_a \tilde{E}^a \Rightarrow \tilde{\omega}^a_c \rightarrow \tilde{\omega}^{a'}_{c'} = \Gamma^{a'}_{c'b'} \tilde{E}^{b'}$$

Ejercicio: usando la transformación de la conexión afín y la base obtener que

$$\tilde{\omega}^{a'}_{c'} = \Lambda^{a'}_a \tilde{\omega}^a_c \Lambda^c_{c'} + \Lambda^{a'}_a d\Lambda^a_{c'}$$

Como se puede ver, la diferencia de dos conexiones de spin es un tensor.

Entonces hemos obtenido que la torsión es la derivada exterior covariante de la base del espacio cotangente:

$$T = \bar{E}_a \otimes \tilde{T}^a = \bar{E}_a \otimes D\tilde{E}^a$$

Veamos ahora qué puede decirse de la curvatura. El tensor de Riemann es

$$R(\cdot, \cdot; \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) \doteq [\nabla_{\bar{a}}, \nabla_{\bar{b}}] \bar{c} - \nabla_{[\bar{a}, \bar{b}]} \bar{c}$$

Este tensor de tipo $\binom{1}{3}$ se descompone en una base cualquiera como

$$R = R^d_{c\alpha\beta} \bar{E}_d \otimes \tilde{E}^c \otimes \tilde{E}^a \otimes \tilde{E}^b = \bar{E}_d \otimes \tilde{E}^c \otimes \frac{1}{2} R^d_{c\alpha\beta} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$$

donde fue aprovechada la antisimetría de las dos últimas entradas del Riemann. La estructura del Riemann contiene una familia de 2-formas valuadas en el espacio tangente:

$$\tilde{R}^d_c \doteq \frac{1}{2} R^d_{c\alpha\beta} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$$

tal que $R = \bar{E}_c \otimes \tilde{E}^d \otimes \tilde{R}^c_d$.

Calculemos los valores de $R^d{}_{cab}$

$$R^d{}_{cab} = R(\tilde{E}^d; \bar{E}_c, \bar{E}_a, \bar{E}_b) = \langle \tilde{E}^d, \nabla_{\bar{E}_a} \nabla_{\bar{E}_b} \bar{E}_c - \nabla_{\bar{E}_b} \nabla_{\bar{E}_a} \bar{E}_c - \nabla_{[\bar{E}_a, \bar{E}_b]} \bar{E}_c \rangle$$

Explotando la antisimetría,

$$R^d{}_{cab} = \langle \tilde{E}^d, \nabla_{\bar{E}_a} (\Gamma_{cb}^f \bar{E}_f) - \nabla_{(\bar{E}_a^i \partial_i \bar{E}_b^j) \partial_j} \bar{E}_c \rangle - (a \leftrightarrow b)$$

Notemos que $\bar{E}_f = E_f^k \partial_k \Rightarrow \partial_j = E_j^f \bar{E}_f$. Así podemos reemplazar

$$(E_a^i \partial_i \bar{E}_b^j) \partial_j = E_a^i E_j^f \partial_i \bar{E}_b^j \bar{E}_f \stackrel{E_j^f E_b^i = \delta_b^f}{=} - E_a^i E_b^j \partial_i E_j^f \bar{E}_f$$

Entonces

$$\begin{aligned} R^d{}_{cab} &= \langle \tilde{E}^d, \nabla_{\bar{E}_a} (\Gamma_{cb}^f \bar{E}_f) + E_a^i E_b^j (\partial_i E_j^f) \nabla_{\bar{E}_f} \bar{E}_c \rangle - (a \leftrightarrow b) \\ &= \langle \tilde{E}^d, E_a^i (\partial_i \Gamma_{cb}^f) \bar{E}_f + \Gamma_{cb}^f \Gamma_{fa}^g \bar{E}_g + E_a^i E_b^j (\partial_i E_j^f) \Gamma_{cf}^g \bar{E}_g \rangle - (a \leftrightarrow b) \\ &= E_a^i \partial_i \Gamma_{cb}^d + \Gamma_{cb}^f \Gamma_{fa}^d + E_a^i E_b^j (\partial_i E_j^f) \Gamma_{cf}^d - (a \leftrightarrow b) \end{aligned}$$

Si se tratara de una base coordenada obtendríamos la expresión conocida de las componentes del Riemann. Cuando el resultado obtenido se combina con $\tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$ para construir $\tilde{R}^d{}_c = \frac{1}{2} R^d{}_{cab} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$, aparecerá la combinación

$$E_a^i \tilde{E}^a = E_a^i E_k^a \tilde{\omega}^k = \tilde{\omega}^i$$

junto con $E_b^j \tilde{E}^b = \tilde{\omega}^j$. Además, en el segundo término se forma $\tilde{\omega}^d{}_f \wedge \tilde{\omega}^f{}_c$.

Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{R}^d_c &= \frac{1}{2} R^d_{cab} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b = d\Gamma^d_{cb} \wedge \tilde{E}^b + \tilde{\omega}^d_f \wedge \tilde{\omega}^f_c + \Gamma^d_{cf} d\tilde{E}^f = \\ &= d(\underbrace{\Gamma^d_{cb} \tilde{E}^b}_{\tilde{\omega}^d_c}) + \tilde{\omega}^d_f \wedge \tilde{\omega}^f_c\end{aligned}$$

$$\tilde{R}^d_c = d\tilde{\omega}^d_c + \tilde{\omega}^d_f \wedge \tilde{\omega}^f_c$$

Ante un cambio de base, la conexión de spin transforma apropiadamente para que la curvatura se comporte tensorialmente:

$$\tilde{E}^a \rightarrow \tilde{E}^{a'} = \Lambda^{a'}_a \tilde{E}^a \Rightarrow \tilde{R}^d_c \rightarrow \tilde{R}^{d'}_{c'} = \Lambda^{d'}_d \Lambda^c_{c'} \tilde{R}^d_c$$

Sería incorrecto pretender ver a \tilde{R}^d_c como la derivada exterior covariante de la conexión de spin, pues la conexión de spin no es tensorial.

► Los resultados obtenidos para la torsión y la curvatura constituyen las ecuaciones de estructura de Cartan,

$$\begin{aligned}\tilde{T}^a &= d\tilde{E}^a + \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{E}^c = D\tilde{E}^a \\ \tilde{R}^d_c &= d\tilde{\omega}^d_c + \tilde{\omega}^d_f \wedge \tilde{\omega}^f_c\end{aligned}$$

que exhiben a la base y la conexión de spin como potenciales para la torsión y la curvatura.

Es interesante ver lo que sucede cuando aplicamos dos veces la derivada exterior covariante a un conjunto de p-formas $\tilde{\phi}^a$ valuada en el espacio tangente:

$$D^2 \tilde{\phi}^a = D(d\tilde{\phi}^a + \tilde{\omega}^a_b \wedge \tilde{\phi}^b) = \overbrace{d\tilde{\omega}^a_b \wedge \tilde{\phi}^b - \tilde{\omega}^a_b \wedge d\tilde{\phi}^b} + \tilde{\omega}^a_c \wedge (d\tilde{\phi}^c + \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\phi}^b)$$

$$\Rightarrow D^2 \tilde{\phi}^a = \tilde{R}^a_b \wedge \tilde{\phi}^b$$

En particular, como $\tilde{T}^a = D\tilde{E}^a$, resulta

$$D\tilde{T}^a = \tilde{R}^a_b \wedge \tilde{E}^b$$

1ra. identidad de Bianchi

Por otro lado, si tomamos la derivada exterior covariante a la curvatura:

$$D\tilde{R}^a_b = d\tilde{R}^a_b + \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{R}^c_b - \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{R}^a_c$$

dos términos de conexión: uno para cada índice con los signos que corresponden a cada tipo de índice.

$$D\tilde{R}^a_b = d(d\tilde{\omega}^a_b + \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{\omega}^c_b) + \tilde{\omega}^a_c \wedge (d\tilde{\omega}^c_b + \tilde{\omega}^c_d \wedge \tilde{\omega}^d_b) - \tilde{\omega}^c_b \wedge (d\tilde{\omega}^a_c + \tilde{\omega}^a_d \wedge \tilde{\omega}^d_c)$$

$$= d\tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{\omega}^c_b - \tilde{\omega}^a_c \wedge d\tilde{\omega}^c_b + \dots$$

$$= \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{\omega}^c_d \wedge \tilde{\omega}^d_b - \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_d \wedge \tilde{\omega}^d_c = 0$$

$$D\tilde{R}^a_b = 0$$

2da. identidad de Bianchi

Nótese que hasta aquí no hemos introducido la métrica. En su intercambio epistolar con Einstein, Cartan abogaba por distinguir la conexión de la métrica, y verlas como dos estructuras separadas.

► En presencia de una métrica podemos trabajar con bases ortonormales (también llamadas "vierbeins" o tétradas), que indicaremos con $\{\bar{E}_{\hat{a}}\}$. En tal caso la métrica es

$$\tilde{g} = \eta_{ab} \tilde{E}^{\hat{a}} \otimes \tilde{E}^{\hat{b}} \Rightarrow \bar{E}_{\hat{a}} \cdot \bar{E}_{\hat{b}} = \tilde{g}(\bar{E}_{\hat{a}}, \bar{E}_{\hat{b}}) = \eta_{ab}$$

► Las tétradas se relacionan entre ellas vía transformaciones de Lorentz locales (dejan el símbolo de Minkowski invariante, preservando la ortonormalidad).

► Una conexión métrica es aquella que cumple la regla de Leibniz ante el producto escalar. Luego, la derivada covariante de la expresión anterior da

$$0 = (\nabla_{\bar{E}_c} \bar{E}_a) \cdot \bar{E}_b + \bar{E}_a \cdot \nabla_{\bar{E}_c} \bar{E}_b = \Gamma_{ac}^d \bar{E}_d \cdot \bar{E}_b + \bar{E}_a \cdot (\Gamma_{bc}^d \bar{E}_d)$$

$$= \Gamma_{ac}^d \eta_{db} + \Gamma_{bc}^d \eta_{ad}$$

Multiplicando por \tilde{E}^c : $\tilde{\omega}^d_{\hat{a}} \eta_{db} + \tilde{\omega}^d_{\hat{b}} \eta_{ad} = 0$ conexión métrica

El resultado significa que $\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{ac} \tilde{\omega}^c_{\hat{b}}$ es antisimétrico.

Aunque la conexión de spin no transforma como componentes de un tensor, esta propiedad no es alterada por transformaciones locales de Lorentz. †

► La metricidad de la conexión implica que $\tilde{R}^{\hat{a}\hat{b}} = \eta^{bc} \tilde{R}^{\hat{a}}_c$ es antisimétrico.

► El símbolo de Minkowski es un conjunto de 0-formas valuado en el espacio tangente; la conexión métrica implica que $D\eta_{ab} = 0$:

$$D\eta_{ab} = \underbrace{\tilde{d}\eta_{ab}}_0 - \tilde{\omega}^c_{\hat{a}} \eta_{cb} - \tilde{\omega}^c_{\hat{b}} \eta_{ac} = 0$$

† si la conexión es métrica

► La conexión métrica también implica que $D\varepsilon_{abc\dots} = 0$:

$$D\varepsilon_{abc\dots} = \underbrace{\tilde{d}\varepsilon_{abc\dots}}_0 - \tilde{\omega}^f_{\hat{a}} \varepsilon_{fbc\dots} - \tilde{\omega}^f_{\hat{b}} \varepsilon_{afc\dots} - \dots$$

(si $ab\dots$ son diferentes, usar que la diagonal de $\tilde{\omega}^f_{\hat{a}}$ se anula por antisimetría. Para pares de índices iguales, usar la antisimetría del símbolo de Levi-Civita para cancelar los términos de conexión).

† Las transformaciones de Lorentz infinitesimales tienen la forma $\Lambda^a_{c'} = \delta^a_{c'} + \sigma^{gh} \delta^a_g \eta_{h'c'}$, donde σ^{gh} son los parámetros infinitesimales. Así el término no tensorial de la transformación de la conexión $\tilde{\omega}^a_{c'}$ queda $\Lambda^a_{c'} \tilde{d}\Lambda^c_{a'} = \delta^a_g \eta_{h'c'} \partial_c \sigma^{gh} \tilde{d}z^i$; su contribución a $\tilde{\omega}^a_{c'}$ es antisimétrica.

▶ La conexión de Levi-Civita resulta de pedir metricidad y torsión nula. La condición de metricidad involucra $\frac{m}{2}(m+1)$ relaciones entre 1-formas, que totalizan $m \times \frac{m}{2}(m+1)$ ecuaciones. Por otro lado la anulación de \tilde{T}^a involucra m relaciones entre 2-formas, que totalizan $m \times \frac{m}{2}(m-1)$ ecuaciones. Así tenemos un total de m^3 ecuaciones que fijan completamente las m^3 componentes de la conexión.

▶ Acción de Hilbert-Einstein: sea la n-forma

$$\epsilon_{f g c d \dots} \tilde{R}^{\hat{f} \hat{g}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}} \wedge \dots = \frac{1}{2} \epsilon_{f g c d \dots} R^{\hat{f} \hat{g}}{}_{\hat{a} \hat{b}} \overbrace{\tilde{E}^{\hat{a}} \wedge \tilde{E}^{\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}} \wedge \dots}^{m \text{ factores}}$$

que será proporcional al escalar de curvatura por el volumen métrico. En efecto, $a b c d \dots$ tienen que ser todos distintos para que no se anule el producto wedge; pero también tienen que ser $f g c d \dots$ todos distintos para que no se anule el símbolo de Levi-Civita. Entonces en la sumatoria sólo sobreviven los términos donde ab coincide con fg . Como tanto ab como fg son antisimétricos en la curvatura, y se contraen con objetos antisimétricos, tendremos cuatro contribuciones iguales para cada par de valores; por ejemplo para el par 12 tendremos:

$$\epsilon_{12 \dots} R^{\hat{1} \hat{2}}{}_{\hat{1} \hat{2}} \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \dots = \epsilon_{21 \dots} R^{\hat{2} \hat{1}}{}_{\hat{1} \hat{2}} \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \dots = \epsilon_{12 \dots} R^{\hat{1} \hat{2}}{}_{\hat{2} \hat{1}} \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \dots = \epsilon_{21 \dots} R^{\hat{2} \hat{1}}{}_{\hat{2} \hat{1}} \tilde{E}^{\hat{2}} \wedge \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \dots$$

Por otro lado, al escalar de curvatura $R^{ab}{}_{ab}$ contribuyen dos términos iguales por cada par de índices: $R^{12}{}_{12} + R^{21}{}_{21} + \dots$. Estas diferentes multiplicidades son canceladas por el factor 1/2 en la expresión del comienzo. En suma, necesitamos dos términos por cada par de índices para construir el escalar de curvatura.

Sin embargo, cada uno de estos dos términos viene acompañado por $(n-2)!$ términos iguales que provienen del resto de los índices en $\epsilon_{abcd\dots}$:

$$\epsilon_{fgcd\dots} \tilde{R}^{\hat{f}\hat{g}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}} \wedge \dots = (n-2)! R \underbrace{\tilde{E}^{\hat{0}} \wedge \tilde{E}^{\hat{1}} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{\hat{m-1}}}_{\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|} d\tilde{x}^0 \wedge d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{m-1}}$$

escalar de curvatura

En la acción de Hilbert-Einstein en $n=4$ dimensiones tenemos que

$$\underbrace{(-R - 2\Lambda)}_{\text{signatura (+---)}} \sqrt{|g|} d\tilde{x}^0 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^3 = \epsilon_{abcd} \left(-\frac{1}{2} \tilde{R}^{\hat{a}\hat{b}} - \frac{2\Lambda}{4!} \tilde{E}^{\hat{a}} \wedge \tilde{E}^{\hat{b}} \right) \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}}$$

signatura (+---)

► **Variación "a la Palatini"**: En 1919 Attilio Palatini mostró que variando la acción respecto de la conexión y la métrica independientemente, se obtenía la conexión de Levi-Civita y las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto no es necesario presuponer la conexión de Levi-Civita, sino que alcanza con la hipótesis de metricidad. En la formulación que estamos viendo deberíamos variar respecto de la tétrada y la conexión de spin independientemente:

$$\delta \tilde{R}^a_b = d \delta \tilde{\omega}^a_b + \underbrace{\delta \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{\omega}^c_b + \tilde{\omega}^a_c \wedge \delta \tilde{\omega}^c_b}_{-\tilde{\omega}^{\hat{c}}_{\hat{b}} \wedge \delta \tilde{\omega}^{\hat{a}}_{\hat{c}}} = D \delta \tilde{\omega}^a_b$$

es un tensor (diferencia de conexiones)

$$\Rightarrow \delta_{\omega} (\epsilon_{abcd} \tilde{R}^{\hat{a}\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}}) = \epsilon_{abcd} D \delta \tilde{\omega}^{\hat{a}\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}} = 2 \epsilon_{abcd} \delta \tilde{\omega}^{\hat{a}\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge D \tilde{E}^{\hat{d}} + \text{término de borde}$$

conexión métrica

$\uparrow \approx \hat{d}$

$$\delta_E (\epsilon_{abcd} \tilde{R}^{\hat{a}\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{E}^{\hat{d}}) = -2 \epsilon_{abcd} \tilde{R}^{\hat{a}\hat{b}} \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \delta \tilde{E}^{\hat{d}}$$

Las ecuaciones dinámicas de vacío son:

$$\epsilon_{abcd} \tilde{E}^{\hat{c}} \wedge \tilde{T}^{\hat{d}} = 0$$

$$\epsilon_{abcd} \left(\tilde{R}^{\hat{a}\hat{b}} - \frac{\Lambda}{3} \tilde{E}^{\hat{a}} \wedge \tilde{E}^{\hat{b}} \right) \wedge \tilde{E}^{\hat{c}} = 0$$

- La primera ecuación significa que la torsión debe anularse: hay tantas ecuaciones como componentes de $\tilde{T}^{\hat{d}}$ (6 elecciones para $\hat{a}\hat{b}$ por 4 componentes de la 3-forma), que es el número de componentes de $\delta\tilde{\omega}^{\hat{a}\hat{b}}$. Por lo tanto la conexión es la de Levi-Civita.
- La segunda ecuación corresponde a las ecuaciones de Einstein.

▶ **Ejercicio:** mostrar que si la conexión es la de Levi-Civita entonces

$$\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2} (C_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} - C_{\hat{c}\hat{a}\hat{b}} - C_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}}) \tilde{E}^{\hat{c}}$$

donde los $C_{ab}{}^c$ son los **coeficientes de rotación de Ricci:**

$$C_{ab}{}^c \doteq -d\tilde{E}^c(\bar{E}_a, \bar{E}_b) = -\left(\mathcal{L}_{\bar{E}_a} \tilde{E}^c\right)(\bar{E}_b)$$

↑
ver propiedades de la derivada de Lie

Para ello, mostrar que $\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{b}}$ es antisimétrica, y que anula las componentes $T^{\hat{c}}(\bar{E}_{\hat{a}}, \bar{E}_{\hat{b}})$ de la torsión.

▶ **Ejercicio:** mostrar que

$$[\bar{E}_a, \bar{E}_b] = C_{ab}{}^c \bar{E}_c$$

$$d\tilde{E}^c = -\frac{1}{2} C_{ab}{}^c \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b$$