Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2021

Guía 1: *Relatividad especial.*

1. Un detector se mueve en el espacio-tiempo de Minkowski siguiendo la línea de universo descripta por ecuaciones paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$, siendo x^α las coordenadas cartesianas) que determinan el siguiente *vector tangente*

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \gamma(v)\left(c\cosh\frac{a\lambda}{c}, c\sinh\frac{a\lambda}{c}, 0, v\right). \tag{1}$$

   a) Muestre que el parámetro de la curva λ es el tiempo propio τ medido a lo largo de esa línea de universo. Por lo tanto el vector tangente dado es la cuadrivelocidad U^α.

   b) Integre las ecuaciones de movimiento del detector para obtener la curva que describe. Muestre que su movimiento proyecta una hipérbola en el plano t-x.

   c) Verifique que la línea de universo del detector es interior al cono de luz de cualquiera de los eventos pertenecientes a dicha línea. (Dos eventos cualesquiera de una línea de universo de partícula tienen separación “temporal”).

   d) Caracterice la región del espacio-tiempo que no puede influir sobre el comportamiento del detector. Haga un gráfico espacio-temporal con la curva del detector y la región en cuestión.

   e) En una región del espacio-tiempo atravesada por el detector la temperatura está descripta por la función

$$T(t, x, y, z) = \frac{Ct}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

   Calcule $dT/d\tau$ a lo largo de la línea de universo del detector.

2. a) Obtenga la transformación del vector aceleración $\boldsymbol{a}$ ante un *boost* de Lorentz con velocidad $\boldsymbol{v} = v\,\hat{x}$.

   b) Como caso particular, transforme la aceleración al sistema propio de la partícula (es decir que la velocidad del *boost* es igual a la velocidad $\boldsymbol{u}$ de la partícula en el instante considerado).

   c) Compruebe que el movimiento del problema anterior, en el caso $v = 0$, tiene *aceleración propia* constante.

3. a) Encuentre cómo participan la velocidad $\boldsymbol{u}$ y la aceleración $\boldsymbol{a}$ en la cuadrivelocidad $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ y en la cuadriaceleración $a^\alpha = dU^\alpha/d\tau$.

   b) Muestre que $U \cdot U = g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = U_\alpha U^\alpha = c^2$.

   c) Muestre que U^α y a^α son ortogonales (en el sentido de la métrica pseudo-euclidiana): $U \cdot a = U^\alpha a_\alpha = 0$. Como U es siempre temporal sobre cualquier línea de universo de partícula, entonces a es espacial.

   d) Calcule el invariante $a \cdot a = a^\alpha a_\alpha$ y relaciónelo con la aceleración propia.

4. Sea ${\Lambda^\alpha}_\beta$ (la componente (α, β) de) la matriz correspondiente a un *boost* de Lorentz de velocidad $\boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c}\,\hat{x}$:

$$W'^\alpha = {\Lambda^\alpha}_\beta W^\beta, \tag{3}$$

siendo W^α las componentes cartesianas de un cuadrivector cualquiera.

   a) Escriba las componentes de la matriz ${\Lambda^\alpha}_\beta$.

   b) Llamemos ${(\Lambda^{-1})^\alpha}_\beta$ a la matriz que realiza la transformación inversa:

$$W^\alpha = {(\Lambda^{-1})^\alpha}_\beta\, W'^\beta, \qquad {(\Lambda^{-1})^\alpha}_\gamma\, {\Lambda^\gamma}_\beta = {\delta^\alpha}_\beta. \tag{4}$$

   Muestre que ${(\Lambda^{-1})^\alpha}_\beta$ se obtiene cambiando v por $-v$ en ${\Lambda^\alpha}_\beta$.

5. Componga dos *boosts* de Lorentz en direcciones ortogonales, el primero con velocidad $\boldsymbol{v}_1 = v_x\,\hat{x}$ y el segundo con velocidad $\boldsymbol{v}_2 = v_y\,\hat{y}$.

   a) Muestre que los *boosts* de Lorentz en direcciones distintas no conmutan.

   b) Muestre que el resultado de la composición no es un *boost* (ayuda: note que las matrices de los *boosts* son simétricas).

   c) Muestre que el resultado de la composición es igual a un *boost* de velocidad

$$\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{x} + \frac{1}{\gamma(v_x)} v_y\,\hat{y} \tag{5}$$

   (composición relativista de ambas velocidades), seguido de una rotación en el plano x-y (rotación de Wigner). Obtenga el ángulo de la rotación.

   d) ¿Tiene la rotación de Wigner un análogo clásico?

6. Muestre que el operador D'Alembertiano es invariante.

7. Para una partícula de masa m y cuadrivelocidad U^α se define el cuadrimpulso como $p^\alpha = mU^\alpha$, de modo que

$$p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right). \tag{6}$$

En el caso de un fotón no se puede definir la cuadrivelocidad. El cuadrimpulso es

$$p^\alpha = \frac{h\nu}{c}(1, \hat{p}), \tag{7}$$

con h la constante de Planck y $\hat{p}$ la dirección de propagación.

   a) Muestre que la conservación del cuadrimpulso prohíbe una reacción en la cual un electrón y un positrón se aniquilan para dar lugar a un único fotón. Pruebe que la producción de dos fotones está permitida.

b) Un fotón de frecuencia ν incide sobre un electrón en reposo, cuya masa es m_e, dispersándose con una frecuencia ν' y un ángulo θ después del choque (*scattering* de Compton). Muestre que

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta). \tag{8}$$

8. Los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ forman el tensor de campo electromagnético

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{9}$$

donde $A^\alpha = (\phi, \boldsymbol{A})$ es el cuadrivector potencial electromagnético (en unidades cgs/Gaussianas).

a) Encuentre cómo aparece la fuerza de Lorentz sobre una carga,

$$\boldsymbol{f} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}\right), \tag{10}$$

en la *cuadrifuerza*

$$K^\alpha = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta U^\beta. \tag{11}$$

b) Deduzca la ley de transformación de la fuerza $\boldsymbol{f}$ en Relatividad Especial.

c) Concluya que la fuerza $\boldsymbol{f}$ se transforma igual que $d\boldsymbol{p}/dt$.

9. La acción de una carga q de masa m en un campo electromagnético A_α es

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} - \frac{q}{c} \int A_\alpha \, dx^\alpha. \tag{12}$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Muestre que $\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{p}/dt$ y $K^\alpha = ma^\alpha$.

10. Las ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse de la variación de la acción

$$S\left[A^\alpha(x)\right] = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \, d^4x - \frac{1}{c^2} \int A_\alpha \, j^\alpha \, d^4x, \tag{13}$$

donde d^4x es el cuadrivolumen en coordenadas cartesianas y $j^\alpha = (c\rho, \boldsymbol{j})$.

a) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción electromagnética.

b) La transformación de *gauge* $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha \xi$ no modifica el tensor de campo (¿por qué?). Muestre que las fuentes del campo deben conservar la carga para que la acción $S[A^\alpha(x)]$ sea invariante ante una transformación de *gauge* sobre cualquier configuración de campo, sea o no una solución de las ecuaciones de Maxwell. Muestre que este aspecto de las fuentes está contenido también en las ecuaciones de Maxwell, ya que el vector $\partial_\beta F^{\alpha\beta}$ es "automáticamente" conservado.

11. Si $T^{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento, $T^{\alpha j} dS_j$ es un flujo de p^α a través de $d\boldsymbol{S}$ por unidad de tiempo, de modo que las componentes T^{ij} corresponden al tensor de esfuerzos. Atendiendo a estas características:

    a) Escriba el tensor de energía-momento de un fluido ideal en reposo.

    b) Transforme ese tensor a un sistema donde el fluido se mueve con velocidad $\boldsymbol{u}$.

12. El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha}{}_{\lambda}\, F^{\beta\lambda} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta}\, F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}\right). \tag{14}$$

    Muestre que este tensor tiene traza nula. Usando las ecuaciones de Maxwell pruebe que el tensor de energía-momento electromagnético se conserva en una región libre de cargas.

13. Así como las componentes $T^{\alpha 0}$ del tensor de energía-momento son densidades de p^α, y las componentes $T^{\alpha j}$ dan cuenta de transferencias de p^α a través de superficies, el tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma} \tag{15}$$

    contiene las densidades de momento angular en sus componentes $M^{\alpha\beta 0}$, y los torques asociados a las transferencias de cantidad de movimiento. Del mismo modo que la conservación de la energía-momento requiere que $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, la conservación del momento angular requiere que $\partial_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Muestre que esto sólo es posible si el tensor de energía-momento es simétrico.