Clase 30/8 (Con comentarios adicionales)

lunes, 30 de agosto de 2021 15:12

11) GPS

$$T_s = 12\,hs \rightarrow \frac{2\pi R_s}{v_s} = 12\,hs \rightarrow \boxed{R_s = \frac{12hs}{2\pi}\, v_s}$$

a) v_s lo calculo con mec. Newtoniana:

$$v_s^2 = \frac{M_T G}{R_s} = \frac{R_T^2}{R_s} \cdot \left(\frac{M_T G}{R_T^2}\right) = \frac{R_T^2}{R_s}\, 9{,}8\, \frac{m}{s^2}$$

$$\hookrightarrow v_s^3 = \frac{R_T^2}{12hs} \cdot 2\pi \cdot 9{,}8\, m/s^2 \xrightarrow{R_T \simeq 6 \cdot 10^3 km}$$

$$\boxed{v_s \simeq 3{,}87\ 10^3\, \frac{m}{s}}$$

obs: $\frac{v_s}{c} \simeq \frac{4 \cdot km/s}{3 \cdot 10^5\, km/s} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$

$$\hookrightarrow \boxed{R_s \simeq 26621 \cdot 10^3\, m \simeq 2{,}7\ 10^4\, km}$$

$\frac{3 \cdot 10^4 km}{c} = \Delta t \simeq \frac{10^4 km}{10^5 km} \cdot s = 10^{-1} s$

b) $\Delta \tau_s = \gamma^{-1}(v_s)\, \Delta t = (1 - v_s^2/c^2)^{1/2}\, \Delta t \simeq \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_s^2}{c^2}\right)\Delta t$

$$f_r := \frac{\Delta t - \Delta \tau_s}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{v_s^2}{c^2} > 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{f_r \simeq 0{,}84 \cdot 10^{-10}}$$

c) $ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - d\vec{x}^2\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) = c^2 d\tau_s^2$ (asumiendo por un momento q' el satélite está quieto)

$$c^2 d\tau_s^2 \overset{d\vec{x}=0}{=} c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 \Rightarrow d\tau_s = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{1/2} dt \simeq \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)dt \longrightarrow \Delta\tau_s \simeq \Delta t\left(1 - \frac{GM_T}{c^2 R_s}\right)$$

$\Phi = -\frac{GM_T}{R_s}$

$$f_G = \frac{\Delta t - \Delta \tau_s}{\Delta t} = \frac{GM_T}{c^2 R_s} = -\Phi/c^2$$

$$\hookrightarrow f_g \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-10}$$

ojo, acá en realidad estoy comparando $\Delta\tau_s$ con el $\Delta t = \Delta\tau$ de un reloj en $r \to \infty$, no con el $\Delta\tau_T$ del reloj en Tierra. Ver a continuación:

$4\pi\varepsilon^2\, \vec{\nabla}\Phi(\varepsilon) = \oint_\varepsilon \vec{\nabla}\Phi\, d\vec{S} = 4\pi G \iiint \rho\, dVol = 4\pi G\, \rho(\varepsilon)\, \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$

Obs: este es el $d\tau$ de un reloj en $r \to \infty$ ya que ahí $\Phi \to 0 \Rightarrow ds^2 \underset{r\to\infty}{=} c^2 d\tau^2$.

En gral: $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - d\vec{x}^2\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)$

$$d\tau_s^2 = dt^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{v^2}{c^2}dt^2\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

v medida respecto de $r \to \infty$, pero es igual a la medida respecto de Tierra. Ver siguiente comentario

$$= dt^2\left[1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v^2}{c^2}\frac{\Phi}{c^2}\right] \simeq dt^2\left[1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right]$$

$$= dt^2 \left[1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v^2}{c^2}\frac{\Phi}{c^2}\right] \simeq dt^2\left[1+\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right]$$

respecto de Tierra. Ver siguiente comentario

$$d\tau_S = dt \left[1 + \frac{2\Phi_S}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2} \simeq dt\left[1+\frac{\Phi_S}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right]$$

$$\Delta\tau_T \simeq \Delta t\left[1+\frac{\Phi_T}{c^2}\right] = \Delta t\left[1 - \frac{MG}{c^2R_T}\right] \to \Delta t = \frac{\Delta\tau_T}{1-\frac{MG}{c^2R_T}}$$

$$\Delta\tau_S \simeq \Delta t\left[1+\frac{\Phi_S}{c^2} - \frac{1}{2} v^2/c^2\right] = \Delta\tau_T \frac{\left[1-\frac{MG}{c^2R_S} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right]}{1-\frac{MG}{c^2R_T}}$$

Acá está implícito que la Tierra está quieta respecto del observador a $r\to\infty$

$$\Delta\tau_S \simeq \Delta\tau_T\left[1-\frac{MG}{c^2R_S} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right]\left[1+\frac{MG}{c^2R_T}\right]$$

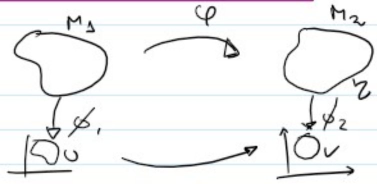
$$\simeq \Delta\tau_T\left[1 + \underbrace{\frac{MG}{c^2}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_S}\right)}_{\text{Provoca un adelanto}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}}_{\text{Provoca un retraso}}\right]$$

d) $(-f_g + f_r)\, 60\ \text{seg} \cong -0{,}8 \cdot 60 \cdot 10^{-10}\ \text{seg} = -\frac{1{,}44}{3}\cdot 10^{-8}\ \text{seg} \simeq \Delta t_{error}$

$\Delta \ell \simeq c\,\Delta t_{error} = 3\cdot 10^{8} \frac{m}{s}\left(\frac{-1{,}44}{3}\right)10^{-8} s \simeq -\frac{0{,}5}{3}\ m = -\frac{50}{3}\ cm$!

17) $$\boxed{t = \frac{c}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\text{sh}\left(\frac{gt'}{c}\right), \quad x = \frac{c^2}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\text{ch}\left(\frac{gt'}{c}\right) - \frac{c^2}{g}, \quad y'=y, \quad z'=z}$$

$\varphi : (t',x',y',z') \longmapsto (t,x,y,z)$



$M_1 \longrightarrow M_2$, $g_{Mink} = \eta$

$$\boxed{ds^2_\eta = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

$$dt = \frac{c}{g}\left[\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\text{ch}\left(\frac{gt'}{c}\right)\frac{g}{c}dt' + \frac{g}{c^2}dx'\,\text{sh}\left(\frac{g}{c}t'\right)\right]$$

a) $$ds^2 = c^2\frac{c^2}{g^2}\left[\frac{g}{c^2}dx'\,\text{sh}\left(\frac{gt'}{c}\right) + \left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\frac{g}{c}\,\text{ch}\left(\frac{gt'}{c}\right)dt'\right]^2 - \left(\frac{c^2}{g}\right)^2\left[\frac{g}{c^2}dx'\,\text{ch}\left(\frac{gt'}{c}\right) + \left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\frac{g}{c}\,\text{sh}\left(\frac{gt'}{c}\right)dt'\right]^2$$
$$- dy'^2 - dz'^2$$

$$- dy'^2 - dz'^2$$

$$= dx'^2 \left[sh^2\left(\tfrac{gt'}{c}\right) - ch^2\left(\tfrac{gt'}{c}\right) \right] + c^2 dt'^2 \left[\left(1 + \tfrac{gx'}{c^2}\right)^2 ch^2\left(\tfrac{gt'}{c}\right) - \left(1 + \tfrac{gx'}{c^2}\right) sh^2\left(\tfrac{gt'}{c}\right) \right]$$

$$+ 2c\, dt' dx' \left[sh()\, ch()\left(1 + \tfrac{gx'}{c^2}\right) - sh()\, ch()\left(1 + \tfrac{gx'}{c^2}\right) \right] - dy'^2 - dz'^2$$

$$\boxed{ds_1^2 = c^2 \left(1 + \tfrac{gx'}{c^2}\right)^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 - dy'^2 - dz'^2}$$

b) si $\frac{gx'}{c^2} \ll 1 \Rightarrow ds^2 = c^2(1 + 2\Phi/c^2)\, dt'^2 - d\vec{x}'^2$ con $2\Phi = gx' \ll c^2 \rightarrow \Phi \sim V$ de aceleración cte.

c) si $\frac{gx'}{c^2} \ll 1$, $\frac{gt'}{c} \ll 1$: $t \simeq \frac{c}{g}\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right)\frac{gt'}{c} \simeq t' + g\frac{x't'}{c^2} = \Big(1 + \overbrace{\tfrac{gx'}{c^2}}^{\ll 1}\Big) t' \simeq t'$

$$x \simeq \frac{c^2}{g}\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{gt'}{c}\right)^2\right) - \frac{c^2}{g} \simeq x' + \frac{1}{2} g t'^2$$

$$ds_1^2 = \overbrace{c^2\left(1 + \tfrac{gx'}{c^2}\right)}^{g_{1\,00} = (g_1)_{t't'}} dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

d) $x' = h$ y $x' = 0$

adelanta respecto del reloj en $x'=0$!

$$d\tau|_{x'=0} = dt'$$

$$d\tau|_{x'=h} = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^{1/2} dt' > d\tau|_{x'=0}$$

1) $M_1 = \mathbb{R}^4$ $\quad M_2 = \mathbb{R}^4$

Como variedades son equivalentes porque son iguales.

2) $M_1 = \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\varphi} (M_2 = \mathbb{R}^4,\ g = \eta)$

$\varphi(x') = x$ con $x' \in M_1$, $x \in M_2$

3) $(M_1 = \mathbb{R}^4, g') \xrightarrow{\varphi} (M_2 = \mathbb{R}^4, g = \eta)$

g' lo construyo con φ y η

$\Rightarrow$ Como variedades son equivalentes.

Como "variedades métricas" no, porque si bien $M_1 = M_2$, $g' \neq g$

4) Y si g' que viene de un difeomorfismo φ y una dada g lo declaro equivalente a g?

O sea "métricas difeomorfas" son físicamente equivalentes