Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2021

Guía 2: *Coordenadas curvilíneas. Principio de equivalencia.*

1. Ante un cambio general de coordenadas $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\mu)$, las componentes U^μ de la cuadrivelocidad cambian a

$$U^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\,U^\mu, \tag{1}$$

mientras que el intervalo se escribe en las nuevas coordenadas como*

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\,dx^{\mu'}dx^{\nu'}, \tag{2}$$

es decir que

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}, \qquad \text{y} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} := (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}. \tag{3}$$

a) Calcule las funciones $\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}$ para el cambio de coordenadas cartesianas a polares en el plano. Transforme las componentes del tensor métrico y verifique que las nuevas componentes conducen al elemento de línea $d\ell^2$ escrito en coordenadas polares.

b) Transforme las componentes cartesianas de un vector a la *base coordenada* polar; en particular transforme los versores cartesianos. ¿Es la base coordenada polar una base de versores?

c) Considere el campo vectorial

$$V^x = x^2 + y^2, \qquad V^y = \alpha x. \tag{4}$$

Calcule $\partial_\mu V^\mu$ en ambos sistemas de coordenadas. ¿Qué conclusión obtiene?

2. En el espacio-tiempo de Minkowski bidimensional considere los siguientes cambios de coordenadas y escriba el intervalo ds^2 en función de las coordenadas nuevas:

a) Coordenadas nulas (u, v):

$$u = -x + ct, \qquad v = x + ct. \tag{5}$$

b) Coordenadas de Rindler (η, ξ):

$$ct = \xi \sinh\frac{a\eta}{c}, \qquad x = \xi\cosh\frac{a\eta}{c}. \tag{6}$$

c) ¿Cuál es la región del espacio-tiempo cubierta por la carta de Rindler?

---

*Hay una manera rigurosa de entender esto, pero está por fuera del curso, y es la siguiente: si llamamos $\phi : M \mapsto M'$ al difeomorfismo que manda puntos de M a puntos de M' (es decir $\phi(x) = x'$), entonces una métrica g' en M' induce a través de ϕ una métrica g en M denotada $\phi^*(g')$ y llamada *pull-back*. Lo que estamos diciendo en el ejercicio es que para que la métrica pull-back $\phi^*(g')$ coincida con g, entonces g' debe relacionarse con g de esa manera particular. Algo análogo sucede para los vectores, reemplazando pull-back por *push-forward*.

d) Muestre que el detector del Problema 1 de la Guía 1, en el caso $v = 0$, se mueve sobre una línea de universo $\xi = \xi_0$ y que el tiempo propio a lo largo de esa línea es $\tau = a\xi_0\eta/c^2$.

3. En el plano, considere las coordenadas $u = t - x$ y $X = x$. Obtenga los vectores de la base coordenada asociada. Explique por qué $X = x$ y sin embargo $\partial_X \neq \partial_x$. Dibuje las líneas coordenadas correspondientes.

4. (Ver libro de Rafael, sección 7.5. Aquí respetamos la convención del libro, donde índices griegos están siendo usados como índices espaciales.)

   a) En un espacio euclídeo de dimensión d, un volumen queda delimitado por d vectores linealmente independientes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, … Compruebe para los casos $d = 2$ y $d = 3$ que la expresión

$$\text{volumen} = \det \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & \dots \\ B^1 & B^2 & B^3 & \dots \\ C^1 & C^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{7}$$

   efectivamente corresponde a la noción de volumen (A^α, B^α, C^α son las componentes cartesianas de los vectores respectivos). Note que se puede escribir el determinante con ayuda del *símbolo de Levi-Civita* $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\dots}$. Luego:

$$\text{volumen} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\dots}\, A^\alpha\, B^\beta\, C^\gamma\, \dots \tag{8}$$

   b) Una *hipersuperficie* es una superficie de dimensión $d - 1$ en un espacio de dimensión d. Un elemento de hipersuperficie $\Delta\Sigma_\alpha$ queda determinado por $d-1$ vectores linealmente independientes tangentes a la hipersuperficie. Si las componentes cartesianas de estos vectores son Δx^λ_A, Δx^λ_B, Δx^λ_C, …, entonces

$$\Delta\Sigma_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dots}\, \Delta x^\beta_A\, \Delta x^\gamma_B\, \Delta x^\delta_C\, \dots \tag{9}$$

   Si n^α es un vector unitario normal a la hipersuperficie entonces $n^\alpha\Delta\Sigma_\alpha$ es un volumen en d dimensiones numéricamente igual al área $\Delta\sigma$ de la hipersuperficie; por lo tanto es $d\Sigma_\alpha = n_\alpha d\sigma$. Muestre que si $a, b, c, \dots$ son coordenadas sobre la hipersuperficie, entonces

$$d\Sigma_\alpha = \varepsilon_{\alpha|\beta\gamma\delta\dots|}\, \frac{\partial(x^\beta, x^\gamma, x^\delta, \dots)}{\partial(a, b, c, \dots)}\, da\, db\, dc\, \dots \tag{10}$$

   donde las barras $|\dots|$ indican ordenamiento de menor a mayor. Ayuda: elija vectores Δx^β_A, Δx^γ_B, Δx^δ_C, … tangentes a las líneas coordenadas a, b, c, …

   c) Aplique el resultado anterior a la superficie de una esfera de radio R inmersa en un espacio euclídeo de 3 dimensiones. Encuentre el valor de $d\sigma$ y asócielo con el determinante de la métrica “inducida” sobre la esfera.

5. a) La esfera se define como el conjunto de puntos (x, y, z) del espacio euclídeo tridimensional a distancia R del origen. Escriba la métrica (inducida) de la esfera en coordenadas esféricas,

$$x = R\sin\theta\,\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\,\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta. \tag{11}$$

   b) El plano hiperbólico se define como el conjunto de puntos (t, x, y) del espacio-tiempo de Minkowski tridimensional que se encuentran en el futuro del origen y a distancia ℓ de éste. Proponga un sistema de coordenadas para el plano hiperbólico y escriba la métrica en esas coordenadas.

   c) El espacio *de Sitter* tres-dimensional, dS_3, se define como el hiperboloide

$$X \cdot X = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = -\ell^2$$

   dentro de $\mathbb{R}^{1,3}$. Encontrar la métrica inducida en de Sitter y un sistema de coordenadas en él.

   d) El espacio *Anti-de Sitter* tres-dimensional, AdS_3, se define como el hiperboloide

$$X \cdot X = (X^{-1})^2 + (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 = \ell^2$$

   dentro de $\mathbb{R}^{2,2}$. Encontrar la métrica inducida en Anti-de Sitter y un sistema de coordenadas en él. Mostrar que hay curvas temporales cerradas. Esta es la versión Lorentziana del espacio hiperbólico.

6. Mostrar que una[†] *transformación de Weyl* dada por $g \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\; g_{\mu\nu}$ (las longitudes se multiplican por el factor conforme $\Omega^2(x)$, que depende de la posición) preserva todos los ángulos.

7. La idea de un *Penrose diagram* es lograr reducir la infinidad de un espacio-tiempo no compacto a una región compacta (en la pantalla o cuaderno) y así poder dibujar el espacio-tiempo en cuestión. Es imporante mantener la estructura causal. Para Minkowski, siga esta receta:

   a) Escriba la métrica de Minkowski en coordeandas esféricas (t, r, θ, ϕ). Debería obtener:

$$ds^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

   con $d\Omega^2$ el intervalo de una 2-esfera.

   b) Muestre que en coordenadas nulas $u = t - r$, $v = t + r$ (con $u, v \in \mathbb{R}$ y notar que $u \leq v$), la métrica queda $ds^2 = dudv - \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega^2$.

[†]Esta es una *transformación conforme* si es producto de un cambio de coordenadas. Pero no es necesario asumir esto ahora.

c) Hasta ahora las coordenadas tenían rango no acotado. Ahora solucionamos eso, definiendo nuevas coordenadas $U = \arctan u$, $V = \arctan v$, con $U, V \in (-\pi/2, \pi/2)$. Notar que $U \leq V$. Muestre que

$$ds^2 = \sec^2(U)\sec^2(V)\left(dUdV - \frac{1}{4}(V-U)^2 d\Omega^2\right)$$

d) Volvemos a coordenadas no tipo-luz, definiendo $T = V + U,\ R = V - U$. Notar que $R \in (0,\pi)$ y $|T| + R < \pi$. Mostrar que la métrica queda

$$ds^2 = (\cos T + \cos R)^{-2}\left[dT^2 - (dR^2 + \sin^2 R\, d\Omega^2)\right] = (\cos T + \cos R)^{-2} d\tilde{s}^2$$

donde $d\tilde{s}^2$ es la métrica de $\mathbb{R} \times S^3$.

Entonces, tenemos una transformación conforme $d\tilde{s}^2 = (\cos T + \cos R)^2 ds^2$ que nos lleva[‡] la métrica de Minkowski a la métrica en $\mathbb{R}\times S^3$. Como es conforme, los ángulos no se alteran y la estructura causal es la misma, pero ahora las coordenadas cubren solo una región compacta. Hacer un diagrama $T - R$ y dibujar las curvas t =cte y $r = cte$.

8. a) Muestre que $\sqrt{|g|}\ d\boldsymbol{x}$ es un volumen invariante ante un cambio general de coordenadas, donde $g = \det(g_{\mu\nu})$. Para ello pruebe que

$$\int f(x^\mu)\sqrt{|g|}\ d\boldsymbol{x} = \int f\left(x^{\mu'}\right)\sqrt{|g'|}\ d\boldsymbol{x}', \tag{12}$$

para toda función f escalar.

b) Utilice distintas coordenadas curvilíneas en un espacio euclídeo y verifique que este concepto de volumen coincide con el calculado habitualmente multiplicando elementos de arco.

9. a) Muestre que el símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ se transforma ante un cambio general de coordenadas como una *densidad* de peso -1:

$$\varepsilon_{\lambda'\mu'\nu'\rho'} = \det\left(\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\right)^{-1}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\,\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\,\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\,\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}. \tag{13}$$

Ayuda: muestre primero –si no lo hizo ya en el problema 4– que, para toda matriz M de $n \times n$, se cumple $\det M = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} M^{1i_1} \ldots M^{ni_n}$.

b) Muestre que el símbolo $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \pm\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ (el signo depende de la convención, ver Carroll pág. 83, Schutz ec. 4.28) es una densidad de peso $+1$.

[‡]Más precisamente, tenemos un *embedding* conforme de Minkowski en el "cilindro" $\mathbb{R} \times S^3$, donde en este cilindro la coordenada T corre libremente en los reales. Este cilindro se conoce como el *Einstein's static universe* y ya veremos más adelante por qué. También se puede decir que dicho cilindro es el *universal cover* de la compactificación de Minkowski. Para cebados: dibuje en 3D este embbeding (ayuda, piense a $R = 0$ y $R = \pi$ como antipodales en el cilindro).

c) Muestre que $\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ se comporta como un pseudo-tensor ante un cambio general de coordenadas. ¿Con qué factor se puede corregir $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ para que también transforme como un pseudo-tensor?

10. El corrimiento al rojo gravitatorio se midió por primera vez en 1960. Usando el efecto Mossbauer y la alta definición de la línea de 14,4 keV del Fe^{57}, Pound y Rebka pudieron determinar el corrimiento de frecuencia que sufre un fotón luego de ascender el campo gravitatorio en la superficie terrestre hasta una altura de 22 m. Utilizando el Principio de Equivalencia calcule el valor de $\Delta\nu/\nu$ que se esperaba medir. Muestre que el mismo corrimiento se obtiene si el tensor métrico en las coordenadas del laboratorio tuviera $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$, siendo el potencial gravitatorio tal que $|\Phi|/c^2 \ll 1$.

11. Las señales de los 24 satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) permiten que fijemos nuestra ubicación en la Tierra con un alto grado de precisión. Los satélites se encuentran en seis planos orbitales distribuidos de manera uniforme y cada satélite gira en torno a la Tierra cada 12 horas. Los relojes atómicos en los satélites deben ser muy precisos, porque un intervalo de tiempo de 10 ns se traduce en una distancia de 3 m. Con el fin de sincronizarlos con los relojes en la superficie terrestre, se deben tener en cuenta correcciones relativistas.

    a) Calcule la velocidad del satélite v_s y su distancia al centro de la Tierra R_s.

    b) Obtenga la variación relativa del tiempo del satélite debido a la dilatación temporal de la relatividad especial.

    c) Halle la variación relativa del tiempo del satélite debido a que éste se encuentra en un potencial gravitatorio diferente en comparación con la superficie de la Tierra. ¿Cómo es la magnitud de este efecto comparado con el de la relatividad especial? Estos dos efectos ¿actúan en el mismo sentido o tienden a cancelarse entre sí?

    d) Calcule el error que se acumularía en 1 minuto debido a estos efectos relativistas.

12. Reemplace $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$ en la acción de la partícula relativista libre (con $|\Phi|/c^2 \ll 1$) y muestre que resulta la acción de una partícula clásica en un potencial gravitatorio Φ cuando la velocidad de la partícula es mucho menor que c.

13. En una región de cierta variedad pseudo-riemanniana de cuatro dimensiones existe un sistema de coordenadas (ct, x, y, z) donde el intervalo se escribe como

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{14}$$

siendo $|\Phi|/c^2 \ll 1$ e independiente de t.

    a) Variando la integral $\int d\tau$ obtenga la ecuación para las geodésicas a orden Φ/c^2.

b) Aproxime el resultado anterior para el caso de partículas no relativistas.

14. En el Lagrangiano del Problema 12 utilice el tiempo propio como parámetro y encuentre la magnitud que se conserva como consecuencia de que Φ no depende de t. Identifique la energía mecánica clásica en el caso de movimiento no relativista.

15. En la geometría del Problema 12 encuentre la transformación de coordenadas que conduce a un sistema localmente inercial a primer orden en Φ/c^2.

16. En la aproximación de campo gravitatorio débil, obtenga la línea de universo de un rayo de luz radial respecto de una fuente de masa M esféricamente simétrica. Utilice coordenadas esféricas para escribir la parte espacial del intervalo. Caracterice la región donde es válida la aproximación.

17. Dado el siguiente cambio de coordenadas $\{t', x', y', z'\} \mapsto \{t, x, y, z\}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{c}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\sinh\left(\frac{gt'}{c}\right)\,, \\ x &= \frac{c^2}{g}\left(1+\frac{gx'}{c^2}\right)\cosh\left(\frac{gt'}{c}\right) - \frac{c^2}{g}\,, \\ y &= y'\,, \quad z = z'\,, \end{aligned} \tag{15}$$

donde las constantes c y g tienen las siguientes unidades $[c] = m/s\,, [g] = m/s^2$ (notar que g **no es el determinante** de la métrica). Se pide:

a) Hallar el intervalo de relatividad especial $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ y el diferencial de tiempo propio $d\tau^2 = ds^2/c^2$ en las coordenadas $\{t', x', y', z'\}$.

b) En la aproximación $\frac{gx'}{c^2} \ll 1$ compare el intervalo del ítem anterior con el intervalo de campo débil

$$ds^2 = c^2\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\,. \tag{16}$$

¿Qué interpretación le puede asignar a Φ?

c) Para $\frac{gt'}{c} \ll 1$ y $\frac{gx'}{c^2} \ll 1$ muestre que (15) corresponde a una transformación a un sistema uniformemente acelerado dentro de la teoría de Newton.

d) Muestre que un reloj en reposo en $x' = h$ adelanta respecto de uno situado en $x' = 0$ (también en reposo). ¿Cómo se relaciona ésto con el principio de equivalencia?