Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2021

Guía 3: *Vectores, tensores, formas diferenciales, derivadas exterior y de Lie.*

1. Sean (x, y) coordenadas sobre una variedad diferenciable de 2 dimensiones. Por otro lado, sean las coordenadas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}. \tag{1}$$

   a) Muestre que la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$, con

$$\vec{e}_r = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}, \tag{2}$$

   definida en cualquier abierto que no contenga el origen de coordenadas, es una base anholónoma.

   b) Muestre que

$$\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{3}$$

   c) Calcule la base dual $\{\tilde{\omega}^r, \tilde{\omega}^\theta\}$. Compare con la base $\{\tilde{d}r, \tilde{d}\theta\}$.

Nota: si (x, y) son coordenadas cartesianas de un espacio euclídeo, entonces $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ son los *versores* polares. Sin embargo, la palabra "versor" sólo es de aplicación en aquellos espacios donde haya una manera de evaluar el módulo de un vector (como es el caso del espacio euclídeo).

2. Sea una función f definida en una variedad diferenciable de 2 dimensiones como la del problema anterior.

   a) Escriba las componentes de la 1-forma $\tilde{d}f$ en las bases $\{\tilde{d}x, \tilde{d}y\}$, $\{\tilde{d}r, \tilde{d}\theta\}$ y $\{\tilde{\omega}^r, \tilde{\omega}^\theta\}$. Ejemplifique con $f = x$ y $f = \theta$.

   b) Si se trata de un espacio euclídeo, ¿cuáles de las bases utilizadas son ortonormales?

Nota: la noción de *gradiente* de una función no corresponde a un vector sino a una 1-forma. Para asociar un vector a la noción de gradiente, el espacio debe contar con una métrica que nos permita hablar del incremento de una función *por unidad de longitud.*

3. Represente gráficamente la 1-forma $\tilde{\alpha} = 3\tilde{d}x + 2\tilde{d}y$ y calcule gráfica y numéricamente su aplicación a los siguientes vectores:

$$\text{a) } \vec{U} = 4\frac{\partial}{\partial x} - 7\frac{\partial}{\partial y}. \qquad \text{b) } \vec{V} = -\frac{\partial}{\partial y}. \qquad \text{c) } \vec{W} = -2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}.$$

Explique por qué los dos primeros resultados son iguales.

4. Escriba las componentes del campo vectorial $\vec{V} = \dfrac{e^{-x^2}}{y}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial}{\partial y}$ en las bases:

$$\text{a)}\ \left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}, \qquad \text{b)}\ \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}, \qquad \text{c)}\ \left\{\vec{e}_1 = r\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},\ \vec{e}_2 = \frac{\partial}{\partial x}\right\}.$$

5. a) Muestre que un tensor simétrico es simétrico en cualquier base. *Idem* para un tensor antisimétrico.

   b) Simetrice y antisimetrice el producto tensorial de un tensor de tipo $\binom{0}{2}$ con una 1-forma.

   c) Una p-forma es un tensor completamente antisimétrico de tipo $\binom{0}{p}$. ¿Cuántas componentes independientes tiene una p-forma en un espacio de n dimensiones? ¿Y una $(n-p)$-forma?

6. a) Encuentre la 3-forma que resulta del producto “wedge” entre la 1-forma

$$\tilde{\alpha} = 3x^2y\tilde{d}x - 5z\tilde{d}z \tag{4}$$

   y la 2-forma

$$\tilde{\beta} = 7zw^3\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \tilde{d}x \wedge \tilde{d}w - 2x\tilde{d}y \wedge \tilde{d}z. \tag{5}$$

   ¿Depende el resultado del orden de los factores?

   b) Calcule la derivada exterior de la 3-forma del *item* anterior por dos caminos: i) derivando directamente el resultado, ii) aplicando la regla para derivar un producto de formas.

7. a) Se puede definir una noción de área o de volumen sin necesidad de una métrica (es decir sin conocer cuánto mide un vector, ni cuál es el ángulo que forma con otro vector). Dados dos vectores, $\vec{U}$ y $\vec{V}$, queremos definir el área $a(\vec{U}, \vec{V})$ que subtienden (lo que correspondería al área del paralelogramo en un espacio euclídeo). Exigiremos que $a(\vec{U}, \vec{V})$ sea lineal en ambos argumentos y que, si ambos vectores son iguales, el área subtendida sea nula (estas son las propiedades del producto vectorial, que nos da el área del paralelogramo en un espacio euclídeo). Muestre que esto significa que la noción de área debe estar asociada a una 2-forma.

   b) Del mismo modo, cualquier n-forma $\tilde{\Omega}$ define una noción de volumen en una variedad de n dimensiones. Si en una base coordenada $\{\tilde{d}x^\mu\}$ es

$$\tilde{\Omega} = f\ \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n, \tag{6}$$

   ¿cómo cambia la componente f ante un cambio general de coordenadas?

   c) En una variedad que posee métrica, podemos definir una n-forma de volumen privilegiada, el *volumen métrico*, a partir de una base ortonormal de 1-formas $\{\tilde{\omega}^a\}$:

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^n. \tag{7}$$

Muestre que en una base coordenada el volumen métrico es

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|}\;\; \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n, \tag{8}$$

donde g es el determinante de la matriz de las componentes $g_{\mu\nu}$ del tensor métrico en esa base coordenada.

8. En una variedad diferenciable de dimensión n que posea una noción de volumen dada por la $n-$forma $\tilde{\Omega}$ resulta posible definir la divergencia de un vector $\vec{V}$ como la función $\mathrm{div}_{\tilde{\Omega}}\vec{V}$ tal que:

$$\big(\mathrm{div}_{\tilde{\Omega}}\vec{V}\big)\tilde{\Omega} = \tilde{d}\big[\tilde{\Omega}(\vec{V})\big]. \tag{9}$$

a) Verifique que el volumen métrico en un espacio euclídeo conduce a la forma ordinaria de la divergencia (en coordenadas cartesianas).

b) Si la componente de $\tilde{\Omega}$ en una base coordenada es f, muestre que

$$\mathrm{div}_{\tilde{\Omega}}\vec{V} = f^{-1}\frac{\partial f V^\mu}{\partial x^\mu}. \tag{10}$$

c) Exprese el volumen métrico $\tilde{\Omega} = \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$ del espacio euclídeo tridimensional en la base de coordenadas esféricas $\{\tilde{d}r, \tilde{d}\theta, \tilde{d}\varphi\}$, y use el resultado del inciso (b) para calcular la divergencia de un vector $\vec{V} = V^r\partial_r + V^\theta\partial_\theta + V^\varphi\partial_\varphi$. Compare con la expresión usual de la divergencia en coordenadas esféricas y explique por qué resultan distintas.

9. a) Muestre que la derivada exterior $\tilde{d}$ es un operador nilpotente: $\tilde{d}^2 = 0$.

b) El operador $*$ de Hodge actúa sobre una p-forma $\tilde{\beta}$ dando por resultado una $(n-p)$-forma:

$$(*\beta)_{\mu_{p+1}\cdots\mu_n} = \frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_n}\;\beta^{\mu_1\ldots\mu_p} = \sqrt{|g|}\;\varepsilon_{|\mu_1\ldots\mu_p|\mu_{p+1}\cdots\mu_n}\;\beta^{\mu_1\ldots\mu_p}. \tag{11}$$

Calcule $*d\tilde{\alpha}$ para una 1-forma $\tilde{\alpha}$ en una variedad de 3 dimensiones.

c) En un espacio euclídeo las componentes cartesianas de vectores y 1-formas están identificadas a través de la métrica. De modo que el resultado anterior puede entenderse como el rotor de un vector. Muestre que la propiedad $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{V}) = 0$ puede verse como una consecuencia de la nilpotencia de $\tilde{d}$.

d) Muestre que también resulta de la nilpotencia de $\tilde{d}$ la propiedad $\nabla\times\nabla f = 0$.

10. a) Toda p-forma $\tilde{\alpha}$ que pueda escribirse como $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$, para alguna $(p-1)$-forma $\tilde{\beta}$, se dice *exacta*. Muestre que $\tilde{\beta}$ no es única.

b) Toda p-forma $\tilde{\alpha}$ tal que $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$ se dice *cerrada*. Las únicas 0-formas (funciones) cerradas son las constantes. Muestre que toda n-forma, en una variedad diferenciable de n dimensiones, es cerrada. La nilpotencia de $\tilde{d}$ implica que toda forma exacta es cerrada.

Se puede probar que la inversa –que toda forma cerrada es exacta– no es en general cierta globalmente, aunque sí vale localmente. La cuestión global tiene que ver con la topología del espacio y es el objeto de estudio de la *cohomología*.

c) La 1-forma $\tilde{\alpha} = (x\tilde{d}y - y\tilde{d}x)/(x^2 + y^2)$ está bien definida en cualquier región que no incluya el origen de coordenadas. Muestre que es cerrada. Siendo cerrada debe ser localmente exacta; en efecto muestre que $\tilde{\alpha}$ es la derivada exterior del ángulo polar θ. Sin embargo el ángulo polar no es una función globalmente continua. ¿Qué topología debería tener la región de definición de $\tilde{\alpha}$ para que ésta resulte globalmente exacta?

11. En el espacio de fases de la Mecánica Clásica considere la 2-forma

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}q_i \wedge \tilde{d}p^i. \tag{12}$$

(a) Muestre que las ecuaciones de Hamilton son las componentes de una única ecuación entre 1-formas:

$$\tilde{\omega}\left(\frac{d}{dt}, \cdot\right) = \tilde{d}H(\cdot), \tag{13}$$

donde d/dt es el vector tangente a la curva $(q^i(t), p_i(t))$.

(b) La demostración del *item* anterior sólo depende de la forma particular asumida para $\tilde{\omega}$. De modo que también obtendremos las ecuaciones de Hamilton estándar en cualquier sistema de coordenadas (Q^i, P_i) (variables "canónicas") para el cual

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}Q_i \wedge \tilde{d}P^i. \tag{14}$$

Muestre que un cambio de variables que verifique

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\tilde{d}Q^i + \tilde{d}F = \sum_{i=1}^{n} p_i\tilde{d}q^i \tag{15}$$

es una transformación canónica.

(c) Escoja (q^i, Q^i) como variables independientes. Entonces $F = F(q^i, Q^i)$. Muestre que la condición anterior se satisface si

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i}. \tag{16}$$

12. Considere la 2-forma $\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$ sobre la esfera S^2, donde $\theta \in (0, \pi)$ y $\phi \in (0, 2\pi)$ son las coordenadas usuales.

a) Muestre que ω es no degenerada, es decir, que la ecuación $\omega(\cdot, v) = 0$ implica $v = 0$.

b) Encuentre la función H más general tal que $\omega(\partial_\phi, \cdot) = dH$.

c) ¿Es cerrada ω? Usando el teorema de Stokes, muestre que no es exacta.

Comentario: la forma $\omega_R = R^2\,\omega$ es también una buena $n-$forma simpléctica en la esfera (o sea es cerrada y no degenerada). La ecuación $\int_{S^2}\omega_R = 2\pi\mathbb{Z}$ es una condición para poder cuantizar un espacio de fases clásico, en este caso dado por la esfera (note que esto cuantiza R^2). Las representaciones unitarias de SU(2) pueden construirse a partir de esta observación, mediante el proceso conocido como *cuantización geométrica*: dicho rápido, SU(2) actúa sobre la esfera con rotaciones, y por lo anterior R^2 es semientero, jugando el papel del spin. Los operadores de rotación se representan actuando sobre un fibrado de línea sobre S^2 dado por "funciones" (secciones, en realidad) holomorfas.

13. a) Muestre que las ecuaciones de Maxwell que no poseen fuentes pueden verse como las componentes de una ecuación del tipo $\tilde{d}\tilde{F} = 0$, donde $\tilde{F}$ es una 2-forma en el espacio de Minkowski. Es decir que las leyes de Maxwell dicen que $\tilde{F}$ es cerrada y por lo tanto localmente exacta: $\tilde{F} = d\tilde{A}$.

    b) Escriba en el lenguaje de las p-formas una transformación de *gauge* del potencial electromagnético.

    c) Muestre que las leyes de Maxwell con fuentes pueden escribirse

$$d * \tilde{F} = \frac{4\pi}{c} * \tilde{J}, \tag{17}$$

    donde $\tilde{J}$ es la 1-forma densidad de corriente. (Ver *Gravitation*, C. Misner, K. Thorne y J. A. Wheeler, p. 105-114).

    d) Obtenga la ecuación de continuidad.

14. Una p-forma se integra sobre una sub-variedad de p dimensiones (en efecto, una p-forma define un volumen en una variedad de p dimensiones). Integre la 1-forma

$$\tilde{\alpha} = y\,\tilde{dx} + \sin x\,\tilde{dy} \tag{18}$$

    sobre la sub-variedad definida por la parábola $y = x^2$ entre los puntos $(0,0)$ y (π,π^2).

15. La regla de Barrow, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia son distintas versiones de un único teorema:

$$\int_{\mathcal{U}} \tilde{d}\tilde{\alpha} = \int_{\partial\mathcal{U}} \tilde{\alpha}, \tag{19}$$

    donde $\tilde{\alpha}$ es una $(n-1)$-forma integrada en una región $\mathcal{U}$ orientable de n dimensiones cuyo borde es $\partial\mathcal{U}$. Aplique el teorema en los siguientes casos:

    a) $n = 1$ y $\mathcal{U}$ es un intervalo (a,b) de $\mathbb{R}$.

    b) $n = 2$ y $\mathcal{U}$ es la superficie encerrada por una curva $\mathcal{C}$ en un espacio euclídeo de 2 dimensiones.

c) $n = 3$ y $\mathcal{U}$ es el volumen encerrado por una superficie $\mathcal{S}$ en un espacio euclídeo de 3 dimensiones.

(Ver *Geometrical methods of mathematical physics*, B. F. Schutz, p. 144.)

16. El operador $\tilde{d}$ está definido para operar exclusivamente sobre formas. No permite derivar vectores. Es posible definir una derivación de un campo vectorial $\vec{V}$ con respecto a otro campo vectorial $\vec{U}$. Definimos como la "derivada de Lie" $\mathcal{L}_{\vec{U}}\vec{V}$ de $\vec{V}$ respecto de $\vec{U}$ al vector

$$\mathcal{L}_{\vec{U}}\vec{V} = \big[\vec{U}, \vec{V}\big], \tag{20}$$

donde [,] indica el conmutador de los operadores. Puede demostrarse que esta definición admite una interpretación geométrica en términos de cocientes incrementales con respecto al parámetro del campo $\vec{U}$ (ver *Geometrical methods...*, B. F. Schutz, p. 77).

a) Muestre que la derivada de Lie posee las propiedades de una derivación: linealidad y regla de Leibniz para la derivación del producto de una función por un vector, definiendo $\mathcal{L}_{\vec{U}}f = \vec{U}(f)$.

b) Muestre que las componentes de la derivada de Lie en una base coordenada son

$$\big(\mathcal{L}_{\vec{U}}\vec{V}\big)^{\mu} = U^{\nu}\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - V^{\nu}\frac{\partial U^{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \tag{21}$$

(Ver *Gravitation*, C. Misner, K. Thorne y J. A. Wheeler, p. 235-240).

17. (*Repaso teórico*). La derivada de Lie puede generalizarse a tensores de cualquier tipo; la idea es la siguiente:

- Definimos la derivada de Lie de una función (una 0-forma) como $\mathcal{L}_{\vec{U}}f = \vec{U}(f) = \tilde{d}f(\vec{U})$.
- Si $f = \tilde{\alpha}(\vec{V})$ usamos la regla de Leibniz y despejamos $\mathcal{L}_{\vec{U}}\tilde{\alpha}$.

a) Muestre que las componentes de $\mathcal{L}_{\vec{U}}\tilde{\alpha}$ en una base coordenada son:

$$\big(\mathcal{L}_{\vec{U}}\tilde{\alpha}\big)_{\mu} = U^{\nu}\frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \alpha_{\nu}\frac{\partial U^{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \tag{22}$$

b) Muestre que se pueden definir derivadas de Lie para tensores de cualquier tipo, generalizando el procedimiento anterior. Demuestre que las componentes en una base coordenada son

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_{\vec{U}}\boldsymbol{T}\big)^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} = U^{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} \\ - T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s}\frac{\partial U^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda}} - (\text{todos los índices superiores}) \\ + T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_s}\frac{\partial U^{\lambda}}{\partial x^{\nu_1}} + (\text{todos los índices inferiores}).\end{aligned} \tag{23}$$

c) Muestre que la derivada de Lie de p-formas conmuta con la derivada exterior:

$$\mathcal{L}_{\vec{U}}\tilde{d}\alpha = \tilde{d}(\mathcal{L}_{\vec{U}}\tilde{\alpha})\,. \tag{24}$$

(Ver *Geometrical methods...*, B. F. Schutz, p. 76-79).

18. En el plano $\mathbb{R}^2$, calcule el transporte de Lie del vector ∂_x en el punto $(x = 1, y = 0)$ a lo largo de los siguientes campos de vectores:

a) $\vec{U} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$. b) $\vec{U}(x,y) = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.