

## Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2022

### Guía 1: Relatividad especial.

1. Un detector se mueve en el espacio-tiempo de Minkowski siguiendo la línea de universo descrita por ecuaciones paramétricas  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , siendo  $x^\alpha$  las coordenadas cartesianas) que determinan el siguiente *vector tangente*

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \gamma(v) \left( c \cosh \frac{a\lambda}{c}, c \sinh \frac{a\lambda}{c}, 0, v \right). \quad (1)$$

- Muestre que el parámetro de la curva  $\lambda$  es el tiempo propio  $\tau$  medido a lo largo de esa línea de universo. Por lo tanto el vector tangente dado es la cuadrivelocidad  $U^\alpha$ .
- Integre las ecuaciones de movimiento del detector para obtener la curva que describe. Muestre que su movimiento proyecta una hipérbola en el plano  $t$ - $x$ .
- Verifique que la línea de universo del detector es interior al cono de luz de cualquiera de los eventos pertenecientes a dicha línea. (Dos eventos cualesquiera de una línea de universo de partícula tienen separación “temporal”).
- Caracterice la región del espacio-tiempo que no puede influir sobre el comportamiento del detector. Haga un gráfico espacio-temporal con la curva del detector y la región en cuestión.
- En una región del espacio-tiempo atravesada por el detector la temperatura está descrita por la función

$$T(t, x, y, z) = \frac{Ct}{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Calcule  $dT/d\tau$  a lo largo de la línea de universo del detector.

- Obtenga la transformación del vector aceleración  $\mathbf{a}$  ante un *boost* de Lorentz con velocidad  $\mathbf{v} = v \hat{x}$ .
  - Como caso particular, transforme la aceleración al sistema propio de la partícula (es decir que la velocidad del *boost* es igual a la velocidad  $\mathbf{u}$  de la partícula en el instante considerado).
  - Compruebe que el movimiento del problema anterior, en el caso  $v = 0$ , tiene *aceleración propia* constante.
- Encuentre cómo participan la velocidad  $\mathbf{u}$  y la aceleración  $\mathbf{a}$  en la cuadrivelocidad  $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$  y en la cuadiaceleración  $a^\alpha = dU^\alpha/d\tau$ .
  - Muestre que  $U \cdot U = g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = U_\alpha U^\alpha = -c^2$ .
  - Muestre que  $U^\alpha$  y  $a^\alpha$  son ortogonales (en el sentido de la métrica pseudo-euclidiana):  $U \cdot a = U^\alpha a_\alpha = 0$ . Como  $U$  es siempre temporal sobre cualquier línea de universo de partícula, entonces  $a$  es espacial.
  - Calcule el invariante  $a \cdot a = a^\alpha a_\alpha$  y relaciónelo con la aceleración propia.

4. Sea  $\Lambda^\alpha_\beta$  (la componente  $(\alpha, \beta)$  de) la matriz correspondiente a un *boost* de Lorentz de velocidad  $\boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c} \hat{x}$ :

$$W'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta W^\beta, \quad (3)$$

siendo  $W^\alpha$  las componentes cartesianas de un cuadrivector cualquiera.

- a) Escriba las componentes de la matriz  $\Lambda^\alpha_\beta$ .  
 b) Llamemos  $(\Lambda^{-1})^\alpha_\beta$  a la matriz que realiza la transformación inversa:

$$W^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta W'^\beta, \quad (\Lambda^{-1})^\alpha_\gamma \Lambda^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta. \quad (4)$$

Muestre que  $(\Lambda^{-1})^\alpha_\beta$  se obtiene cambiando  $v$  por  $-v$  en  $\Lambda^\alpha_\beta$ .

5. Componga dos *boosts* de Lorentz en direcciones ortogonales, el primero con velocidad  $\mathbf{v}_1 = v_x \hat{x}$  y el segundo con velocidad  $\mathbf{v}_2 = v_y \hat{y}$ .

- a) Muestre que los *boosts* de Lorentz en direcciones distintas no conmutan.  
 b) Muestre que el resultado de la composición no es un *boost* (ayuda: note que las matrices de los *boosts* son simétricas).  
 c) Muestre que el resultado de la composición es igual a un *boost* de velocidad

$$\mathbf{v} = v_x \hat{x} + \frac{1}{\gamma(v_x)} v_y \hat{y} \quad (5)$$

(composición relativista de ambas velocidades), seguido de una rotación en el plano  $x$ - $y$  (rotación de Wigner). Obtenga el ángulo de la rotación.

- d) ¿Tiene la rotación de Wigner un análogo clásico?

6. Muestre que el operador D'Alembertiano es invariante.

7. Para una partícula de masa  $m$  y cuadrivelocidad  $U^\alpha$  se define el cuadrimpulso como  $p^\alpha = mU^\alpha$ , de modo que

$$p^\alpha = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (6)$$

En el caso de un fotón no se puede definir la cuadrivelocidad. El cuadrimpulso es

$$p^\alpha = \frac{h\nu}{c} (1, \hat{p}), \quad (7)$$

con  $h$  la constante de Planck y  $\hat{p}$  la dirección de propagación.

- a) Muestre que la conservación del cuadrimpulso prohíbe una reacción en la cual un electrón y un positrón se aniquilan para dar lugar a un único fotón. Pruebe que la producción de dos fotones está permitida.

- b) Un fotón de frecuencia  $\nu$  incide sobre un electrón en reposo, cuya masa es  $m_e$ , dispersándose con una frecuencia  $\nu'$  y un ángulo  $\theta$  después del choque (*scattering* de Compton). Muestre que

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta). \quad (8)$$

8. Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  forman el tensor de campo electromagnético

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (9)$$

donde  $A^\alpha = (\phi, \mathbf{A})$  es el cuadvivector potencial electromagnético (en unidades cgs/Gaussianas).

- a) Encuentre cómo aparece la fuerza de Lorentz sobre una carga,

$$\mathbf{f} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right), \quad (10)$$

en la *cuadrifuerza*

$$K^\alpha = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta U^\beta. \quad (11)$$

- b) Deduzca la ley de transformación de la fuerza  $\mathbf{f}$  en Relatividad Especial.

- c) Concluya que la fuerza  $\mathbf{f}$  se transforma igual que  $d\mathbf{p}/dt$ .

9. La acción de una carga  $q$  de masa  $m$  en un campo electromagnético  $A_\alpha$  es

$$S = -mc \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} + \frac{q}{c} \int A_\alpha dx^\alpha. \quad (12)$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Muestre que  $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$  y  $K^\alpha = ma^\alpha$ .

10. Las ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse de la variación de la acción

$$S[A^\alpha(x)] = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^4x + \frac{1}{c^2} \int A_\alpha j^\alpha d^4x, \quad (13)$$

donde  $d^4x$  es el cuadvolumen en coordenadas cartesianas y  $j^\alpha = (c\rho, \mathbf{j})$ .

- a) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción electromagnética.

- b) La transformación de *gauge*  $A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \xi$  no modifica el tensor de campo (¿por qué?). Muestre que las fuentes del campo deben conservar la carga para que la acción  $S[A^\alpha(x)]$  sea invariante ante una transformación de *gauge* sobre cualquier configuración de campo, sea o no una solución de las ecuaciones de Maxwell. Muestre que este aspecto de las fuentes está contenido también en las ecuaciones de Maxwell, ya que el vector  $\partial_\beta F^{\alpha\beta}$  es “automáticamente” conservado.

11. Si  $T^{\alpha\beta}$  es el tensor de energía-momento,  $T^{\alpha j} dS_j$  es un flujo de  $p^\alpha$  a través de  $dS$  por unidad de tiempo, de modo que las componentes  $T^{ij}$  corresponden al tensor de esfuerzos. Atendiendo a estas características:

- a) Escriba el tensor de energía-momento de un fluido ideal en reposo.
- b) Transforme ese tensor a un sistema donde el fluido se mueve con velocidad  $\mathbf{u}$ .

12. El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( F^\alpha{}_\lambda F^{\beta\lambda} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right). \quad (14)$$

Muestre que este tensor tiene traza nula. Usando las ecuaciones de Maxwell pruebe que el tensor de energía-momento electromagnético se conserva en una región libre de cargas.

13. Así como las componentes  $T^{\alpha 0}$  del tensor de energía-momento son densidades de  $p^\alpha$ , y las componentes  $T^{\alpha j}$  dan cuenta de transferencias de  $p^\alpha$  a través de superficies, el tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma} \quad (15)$$

contiene las densidades de momento angular en sus componentes  $M^{\alpha\beta 0}$ , y los torques asociados a las transferencias de cantidad de movimiento. Del mismo modo que la conservación de la energía-momento requiere que  $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ , la conservación del momento angular requiere que  $\partial_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} = 0$ . Muestre que esto sólo es posible si el tensor de energía-momento es simétrico.